中學生通訊解題第八十六期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8601

除了 1 與本身以外還有其他正因數的正整數，我們稱之為合成數，請問：在所有正整數中不能寫成兩個奇合成數之和的偶數共有幾個？

【簡答】14 個

參考解答：

∵ 1、3、5、7、11，13、17、19、23、29、31、37、…不是奇合成數

∴ 2=1+1，4=1+3，6=1+5=3+3，
8=1+7=3+5，10=1+9=3+7=5+5，
12=1+11=3+9=5+7，
14=1+13=3+11=5+9=7+7，
16=1+15=3+13=5+11=7+9，
18=***9+9***，
20=1+19=3+17=5+15=7+13=9+11，
22=1+21=3+19=5+17=7+15=9+13
=11+11，
24=***9+15***，
26=1+25=3+23=5+21=7+19=9+17=11+15=13+13，
28=1+27=3+25=5+23=7+21=9+19=11+17=13+15，
30=***9+21***，
32=1+31=3+29=5+27=7+25=9+23=11+21=13+19=15+17，
34=***9+25***，36=***9+27***，

⇒小於 38 的偶數只有 **18**、**24**、**30**、**34**、**36** 可以寫成兩個奇合成數之和……(1)

而 38 = 1+37= 3+35= 5+33= 7+31= 9+29
= 11+27= 13+25= 15+23= 17+21
= 19+19

∴ 38 不能寫成兩個奇合成數之……..(2)

最後證明大於 38 的偶數 n 皆可寫成兩個奇合成數之和：…………………………(3)

當 n 的個位數為 0　⇒則 $n = 5k + 15$
(例如：$40 = 25 + 15$)；

當 n 的個位數為 2　⇒則 $n = 5k + 27$
(例如：$42 = 15 + 27$)

當 n 的個位數為 4　⇒則 $n = 5k + 9$
(例如：$44 = 35 + 9$)；

當 n 的個位數為 6　⇒則 $n = 5k + 21$
(例如：$46 = 25 + 21$)

當 n 的個位數為 8　⇒則 $n = 5k + 33$
(例如：$48 = 15 + 33$)，

其中 k 是 >2 的整數

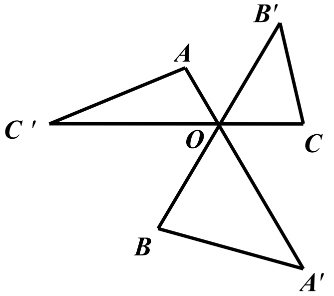
∴由(1)(2)(3)不能寫成兩個奇合成數之和的偶數共有 $38 \div 2 - 5 = 14$ 個。

【解題重點】

本題我們提供的解法分為 2 個步驟：

1. 小於等於 38 的偶數只有 18、24、30、34、36 可以寫成兩個奇合成數之和。
2. 證明大於38的偶數n皆可寫成兩個奇成合數之和。

問題編號
8602



如圖所示，$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ 交於點 O，且 $\overline{AA'}$ = $\overline{BB'}$ = $\overline{CC'}$ =2 ， $\angle AOC'=\angle BOA'=\angle COB'=60^\circ$ 。

求證：

(1) $S\triangle AOC'+S\triangle BOA'+S\triangle COB'<\sqrt{3}$

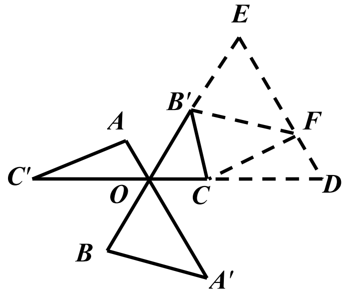
(2) $S\triangle AOC'$,$S\triangle BOA'$,$S\triangle COB'$中至少有一個不大於 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 。

備註：$S\triangle ABC=\triangle ABC$ 的面積

參考解答：

(1) 【方法 1】

如圖，延長 $\overline{OC}$ 至D使得 $\overline{CD}=\overline{C'O}$，延長 $\overline{OB'}$ 至E使得 $\overline{B'E}=\overline{BO}$ 。連接 $\overline{ED}$，易知$\triangle ODE$ 是邊長為2的正三角形。在 $\overline{ED}$ 上截取 $\overline{EF}$ ，使得 $\overline{EF}=\overline{OA'}$ ，則$\triangle OBA'\cong\triangle EB'F$，$\triangle C'AO\cong\triangle CFD$。而$S\triangle ODE=\sqrt{3}$ ，所以，$S\triangle AOC'+S\triangle BOA'+S\triangle COB'<\sqrt{3}$ 。



【方法 2】

令 $\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=b$，$\overline{OC}=c$，得

$S\triangle AOC'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a(2-c)$，

$S\triangle BOA'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b(2-a)$，

$S\triangle COB'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c(2-b)$，

因此$S\triangle AOC'+S\triangle BOA'+S\triangle COB'$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[a(2-c)+b(2-a)+c(2-b)]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{1}{2}(a-2)(b-2)(c-2)-\frac{1}{2}abc+4]$$

因為$0<a, b, c<2$，

故 $\dfrac{1}{2}(a-2)(b-2)(c-2)<0$ ，且$-\dfrac{1}{2}abc<0$

因此$S\triangle AOC'+S\triangle BOA'+S\triangle COB'$

$<\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}$ 。

(2) 承第(1)題【方法 2】

假設$S\triangle AOC'>\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ，$S\triangle BOA'>\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ，$S\triangle COB'>\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 皆成立，因此可得

$a(2-c)>1$，$b(2-a)>1$，$c(2-b)>1$。將此三式相乘得$abc(2-a)(2-b)(2-c)>1$。由算幾不等式，$0<\sqrt{a(2-a)}\le\dfrac{a+(2-a)}{2}=1$，或配方法，$a(2-a)=-(a-1)^2+1\le 1$，因此，$abc(2-a)(2-b)(2-c)\le 1$。與假設矛盾，故得證。

【解題重點】

(1)　【方法 1】

重點在活用圖形拼接，將所求三個三角形，拼在一個邊長為 2 的正三角形內，因此所求面積和< $\sqrt{3}$ 。

【方法 2】

令 $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$，

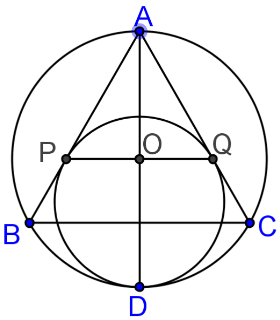
得所求面積和

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}[\dfrac{1}{2}\ (a-2)(b-2)(c-2)-\dfrac{1}{2}abc+4]$，

再利用 $0<a, b, c<2$ 的條件限制即可得證。

(2)　由反證法與算幾不等式或配方法即可證出。

問題編號
8603



如圖所示，在△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，有一個圓內切於△$ABC$ 的外接圓，且於 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別相切於 P、Q 兩點，求證：$\overline{PQ}$ 的中點 O 是△ABC 的內心。

參考解答：

【方法 1】

設小圓圓心為O_1，圓O_1與△ABC的外接圓切於D點，連結 $\overline{AO_1}$，

∵ $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別切圓O_1於P、Q

∴ $\overline{AO_1}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$，且$\angle BAO=\angle CAO$

∵△ABC為等腰三角形

∴D在 $\overline{AO_1}$ 的延長線上，下面只需要證 $\overline{OB}$ 平分$\angle ABC$，連結 $\overline{OB}$、$\overline{PD}$、$\overline{QD}$，

∵ $\overline{AD}$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線

∴ $\angle PDO=\dfrac{1}{2}\angle PDQ$

∵ $\overline{AB}$ 切圓O_1於P　∴$\angle APQ=\angle PDQ$

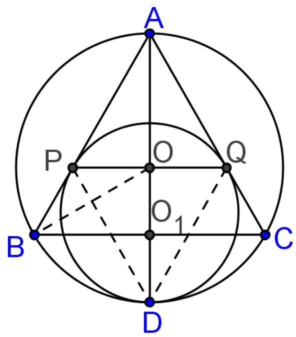
∵ $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}$　∴$\angle ABC=\angle APQ=\angle PDQ$，

∵ $\angle POD+\angle PBD=180^\circ$

∵P、B、D、Q四點共圓

得$\angle PBO=\angle PDO=\dfrac{1}{2}\angle PDQ$，所以

$\angle PBO=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，故$O$為△$ABC$的內心。



【方法 2】

設小圓圓心為 O_1，圓 O_1與△ABC 的外接

圓切於 D，連結 $\overline{AO_1}$，

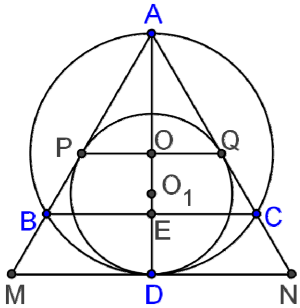
$\because$ $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別切圓 O_1 於 P、Q

$\therefore$ $\overline{AO_1}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$

$\because$ $\triangle ABC$ 為等腰三角形

$\therefore$ D 在 $\overline{AO_1}$ 的延長線上，

且 $\angle BAO = \angle CAO$



設 $A(0, R)$、$B(-b, 0)$、$C(b, 0)$、$E(0, 0)$

$\because$ $\triangle AEB \sim \triangle ABD$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$

$\overline{AD} = \dfrac{R^2+b^2}{R}$ ，$\overline{AD} - \overline{AE} = \dfrac{b^2}{R}$

設 $R^2 + b^2 = a^2$ ，則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \dfrac{a^2}{R^2}$

過 D 作圓 O_1 之切線，且分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 M、N

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{a^2}{R^2}b, -\dfrac{b^2}{R}\right)$，$D\left(0, -\dfrac{b^2}{R}\right)$，

$N\left(\dfrac{a^2}{R^2}b, -\dfrac{b^2}{R}\right)$

$\triangle ABC$ 之內心為 $\left(0, \dfrac{bR}{a+b}\right)$

$\triangle AMN$ 之內心卽為小圓之圓心 O_1，$O_1\left(0, \dfrac{bR^2-ab^2}{(a+b)R}\right)$

$\because$ $\overline{PQ} // \overline{BC}$ ，P 之 y 坐標 $=$ O 之 y 坐標

$\therefore$ 只須證明 P 之 y 坐標即為 $\triangle ABC$ 之內心 $\left(0, \dfrac{bR}{a+b}\right)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{O_1P}$，$\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 之交點即為 P，

$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB}: y = \dfrac{R}{b}x + R \\ \overleftrightarrow{O_1P}: y = -\dfrac{b}{R}x + \dfrac{bR^2-ab}{(a+b)R} \end{cases}$ 之交點為 P，

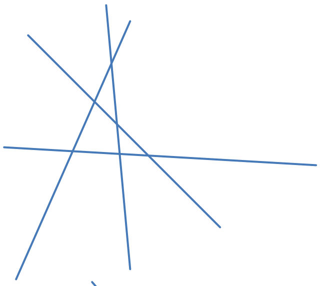
解得 $y = \dfrac{bR}{a+b}$ ，得證。

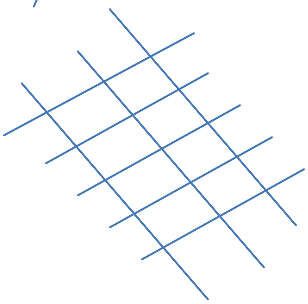
【解題重點】

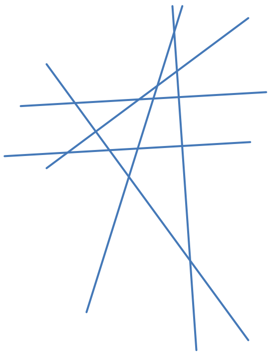
1. 此題利用的幾何性質有：
   * 切線段等長。
   * 弦切角＝對同弧的圓周角。
   * 同位角相等。
   * 四點共圓的充要條件為四邊形對角互補。
   * 對同弧的圓周角相等。
2. 此題利用解析幾何的性質：
   設 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$
   則 $\triangle ABC$ 的內心坐標為
   $\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$
3. 本題參與徵答的同學大部分以幾何方法解題；有一位同學以解析幾何的方法解題，但因為其假設與所定之坐標系不符合，以及未解出 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \dfrac{a^2}{R^2}$ ，所以作答不完整。

問題編號
8604

(1) 觀察下列各圖，請製表求：線數 N、各線交點數 P、平面被分成的區塊數 A







(2) 若沒有任意三條線共點，請歸納出 N、P、A 三數的關係，思考一下為什麼？

(3) 若平面上有 20 條線，其中有一組 5 條互相平行的直線及一組 6 條交於一點的直線，除此之外，沒有兩條平行的直線也沒有三條以上共點的直線，則平面被這些直線分成幾個區域。

參考解答：

(1)(2)

	N	P	A	A=N+P+1
1	4	6	11	11=4+6+1
2	8	15	24	24=8+15+1
3	6	14	21	21=6+14+1

一開始平面上為一個區域，每畫上一條線，看該線會被分成幾段，則會多出幾塊區域，而段數由交點數+1 可得，而+1 可視作所多畫上去的這一條線，故欲算所有的區域，只要算所有的線數+交點數+1 即可，即 A=N+P+1

(3)若有共點時，共點的這一組，第一條畫下時，未使用這個交點，但第二條以後都用這個交點，故 6 條交於一點的直線會使用這個交點 5 次，所以區域數共有 $1+20$(線數)$+20\times19/2-5\times4/2-6\times5/2+5$(除共點之點數及共點使用數)$=191$

【解題評析】

第二小題的題目中，漏掉了「沒有任三條線共點」的前提，致使在第三題的作答上，很多同學被誤導了，甚感抱歉，本小題的本意是希望同學可以利用第二小題的想法，自己想出如何處理有共點的情形，一種想法是利用六線共點出發，再依第二小題的想法得出答案，這也是大部分答對同學所使用的方法，或者利用那個共點的點被使用數，再依第二小題的想法得出答案。希望有興趣的同學可以想懂第二種想法，如此才能解決更複雜的問題。

問題編號
8605

箱中有 10 顆小球，分別印有編號 1, 2, 3,…., 10。在公司年終尾牙上進行一場小遊戲，每個人可由箱中任抓一把球，若抓到 N 顆球，則可獲得 N 元獎金。把球放回箱中後，繼續此遊戲，直至所得球號的組合與之前重複為止（該次獎金不計）。試問每個人最多可獲得多少獎金？請詳述您的想法。

例如：

第一次取得 1, 3, 5, 7→得 4 元獎金

第二次取得 1, 2, 3, 8, 9, 10→得 6 元獎金

第三次取得 1, 2, 4, 8, 9, 10→得 6 元獎金

第四次取得 1, 3, 5, 7→球號組合與第一次相同，獎金不計且遊戲終止

⇒ 共獲得獎金 4+6+6=16 元

【簡答】5120

參考解答：

由 10 個數中任選 k 個數的組合有

$$C_k^{10}=\frac{10\times 9\times ......\times(10-k+1)}{k\times(k-1)\times......\times 1}=\frac{10!}{k!\times(10-k)!}$$

$=C_{10-k}^{10}$ 組，由此可知每當有 k 個數被選取，同時就有對應的 $(10-k)$ 個數不被選取。

依題意，可獲得的獎金最多為

$$C_k^{10}+2C_2^{10}+3C_3^{10}+......+10C_{10}^{10}$$

$$=\frac{10!}{1!9!}+2\times\frac{10!}{2!8!}+3\times\frac{10!}{3!7!}+.....+10\times\frac{10!}{10!10!}$$

$$=10\times\frac{9!}{0!9!}+10\times\frac{9!}{1!8!}+10\times\frac{9!}{2!7!}+.....+10\times\frac{9!}{9!0!}$$

$$=10\times\frac{9!}{0!9!}+10\times\frac{9!}{1!8!}+10\times\frac{9!}{2!7!}+.....+10\times\frac{9!}{9!0!}$$

$$=10\times(C_0^9+C_1^9+C_2^9+......+C_9^9)=10\times 2^9$$

=5120(元)

【解題重點】

本次投稿的同學在計算最後的結果時，都是使用「暴力計算」法，雖然也可求出正確的答案，但難免曠日費時且易發生計算錯誤的情形。尤其考慮到球數增多時，沒有一個系統性的算法，顯然不是件妙事！但這也許要歸因於同學對階乘運算及二項式定理不熟悉的關係。在此，提供同學另一個解法，這其實也是本題希望同學思考的方向。

若欲得到最多獎金，則每一種球號的組合應該都被選取過。此外，無論選到的球號組合為何，獲得的獎金皆為該次取得的球數。換言之，每顆球在每次被選取時，都會對獎金造成 1 元的貢獻。

考慮 1 號球被選取的同時，2~10 號球皆有「被選取」與「不被選取」二種狀態，因此 1 號球共在 2×2×…..×2=2^9 個組合裡被選取，因而可貢獻獎金 2^9 元。又每顆球對獎金有同樣的貢獻度，因此最多共可獲得 2^9.×10=5120 元獎金。這個想法並不需要具備多餘的組合知識與計算技巧，且對任意球數都可快速的求得正確答案。換個角度思考，往往會獲得令人驚奇的結果，這就是組合數學吸引人的地方。