中學生通訊解題第八十七期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8701

已知 a, b 皆為正整數，滿足 $1\le a\le b\le 200$，且 a 與 b 的乘積 ab 為 65 的倍數，則數對 (a, b) 有幾組解？

【簡答】共有 1041 組解

參考解答：

【方法 1】

因為 $65=5\times13$，所以分下列情形討論：

(1) 當 a,b 均不是 65 的倍數，且 a,b 中一個為 5 的倍數，另一個為 13 的倍數時，因為 5 的倍數中不是 65 的倍數者有 $\left[\frac{200}{5}\right]-\left[\frac{200}{65}\right]=40-3=37$ 個，13 的倍數中不是 65 的倍數者有 $\left[\frac{200}{13}\right]-\left[\frac{200}{65}\right]$ $=15-3=12$ 個，故有 $37\times12=444$ 組解。

(2) 當 a,b 中至少一個是 65 的倍數時，因為 65 的倍數有 65,130,195 共 3 個，另一數可從 1~200 中任選，再扣掉 (65,130)、(65,195)、(130,195)的這 3 組解會重複計算，故有 $3\times200-3=597$ 組解。

綜合上述，數對(a,b)共有 1041 組解。

【方法 2】

為了方便，我們以『 $x|y$ 』的符號表示整數 $x\neq0$ 為整數 y 的因數及以$[x]$表示小於或等於 x 的最大整數。

因為 $65=5\times13$，所以分下列情形討論：

(1) 若 $65|a$，則 $a=65,130,195$，加上 $a\le b\le200$ 的條件，故此類共有 $136+71+6=213$ 組解。

(2) 若 $65|b$，則 $b=65,130,195$，加上 $1\le a\le b$ 的條件，且不可和情形(1)重複，需扣掉 (65,65)、(130,130)、(195,195) 及 (65,130)、(65,195)、(130,195)這 6 組解，故此類共有 $65+130+195-6=384$ 組解。

(3) 若 $5|a$, $13|b$，且 $a\neq65,130,195$，$b\neq65,130,195$，則可設 $a=5k$，$b=13t$，其中 k,t 皆為正整數，依題意知 $1\le5k\le13t\le200$，所以 $t=1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14$，$1\le k\le\left[\frac{13}{5}t\right]$，$(k\neq13,25,39)$

故此類共有 $2+5+7+10+14+17+19+22+26+29+31+34=216$ 組解。

(4) 若 $13|a$, $5|b$，且 $a\neq65,130,195$，$b\neq65,130,195$，則可設 $a=13k$，$b=5t$，其中 k, t 皆為正整數，依題意知 $1\le13k\le5t\le200$，所以 $k=1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14$，$\left[\frac{13}{5}k\right]+1\le t\le40$，$(t\neq13,$

26,39)，故此類共有 35+32+30+27+23+20+18+15+11+8+6+3=228 組解。

綜合上述，數對(a,b)共有 1041 組解。

【解題評析】

所有同學都知道此題需討論

(1) a,b 均不是 65 的倍數，且 a,b 中一個為 5 的倍數，另一個為 13 的倍數；

(2) a,b 中至少一個是 65 的倍數

此題利用的有：

(1) 前 n 項和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 。

(2) 級數的分項對消，將 a_k 化成 $\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 。

(3) 若 $t\in N$，$\sqrt{t}$ 為有理數，則 t 為完全平方數。

(4) 此題 $\sqrt{n+1}=2$，3，4，…，44 。注意，$\sqrt{n+1}>1$ ，一位同學錯在這個地方。

問題編號
8702

已知數列$\langle a_n\rangle$的一般式為

$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$，$n$ 為正整數，其前 n 項和為 S_n，則在數列 S_1，S_2，…，S_{2011} 中，有理數項共有幾項？

【簡答】43

參考解答：

由 $a_k=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$，得 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，因為 $44<\sqrt{2012}<45$，所以 $\sqrt{n+1}=2$，3，4，…，44，因此 S_1，S_2，…，S_{2011} 中只有 43 個有理數項。

【解題評析】

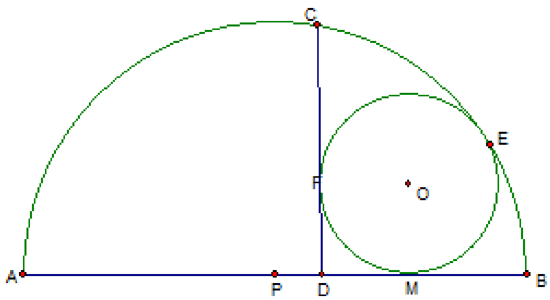
問題編號
8703

如圖，C 在以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓 P 上，圓 O 與 $\overline{AB},\overline{CD}$ 及圓 P 均相切，切點分別為 M,F,E， $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直，試證：

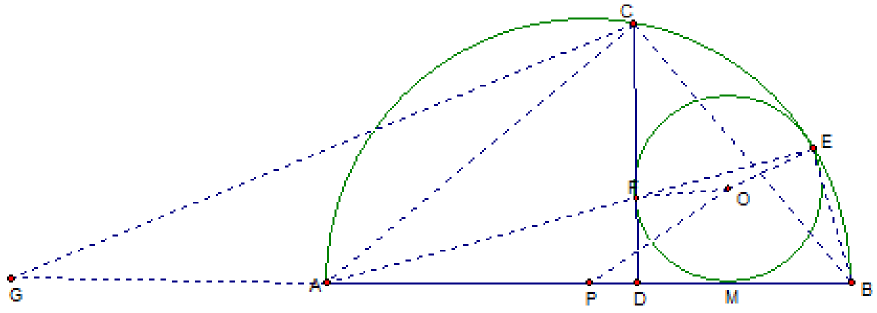
(1) A,F,E 三點共線

(2) $\overline{AC}=\overline{AM}$

(3) $\overline{MC}^2=2\overline{MD}\cdot\overline{MA}$



參考解答：



(1) 易知 $\overline{OF} // \overline{AP}$，且 P, O, E 三點共線，則 $\angle APE=\angle FOE$，

$$\Rightarrow \angle PEA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle APE)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle FOE)=\angle OEF$$

，故 A,F,E 三點共線

(2) 由母子相似性質，$\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}$；由弦切割性質，$\overline{AM}^2=\overline{AE}\cdot\overline{AF}$；由 $\angle FOB+\angle BEF=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，則 B,E,F,D 四點共圓，則由圓外冪性質，$\overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AE}\cdot\overline{AF}$，由以上，$\overline{AC}=\overline{AM}$

(3) 延長 $\overline{AM}$ 至 G 使得 $\overline{AG}=\overline{AM}$，則由 $\overline{AC}=\overline{AM}$，可得 $\triangle CGM$ 為直角三角形，再由母子相似性質，$\overline{MC}^2=\overline{MD}\cdot\overline{MG}=2\overline{MD}\cdot\overline{MA}$。

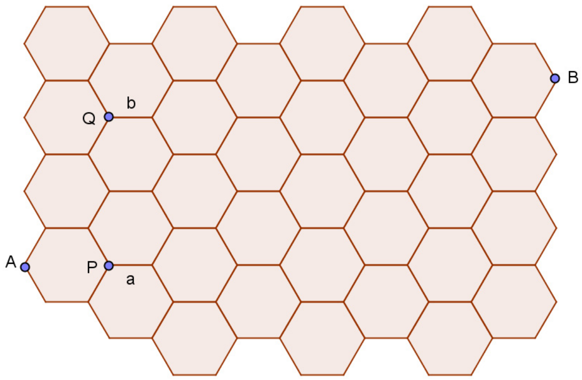
【解題評析】

一直以來幾何題的答題人數都偏少，幾何在國中，因為有難度，所以使很多人望之卻步，在教學上也因為學生能力異質性太大，而無法提供較有深度的教材，這可能值得我們思考是否在國中教育上有必要就幾何作能力分班教學。三位同學的解法不盡相同，但都不失創意，希望有更多人也願意分享不同的幾何作法。

問題編號

8704

在一個由邊長為1的正六邊形構成的網格平面上有兩點 A 和 B，沿網格線從 A 到 B 的最短路徑的長度為 100。一隻昆蟲沿這條路線由 A 爬到 B。求證：昆蟲爬行過程中有一半的路程爬行的方向相同。



參考解答：

顯然，網格平面上只有三種不同方向的線段。不妨設由 A 到 B 的 100 條線段中，水平方向的線段最多。

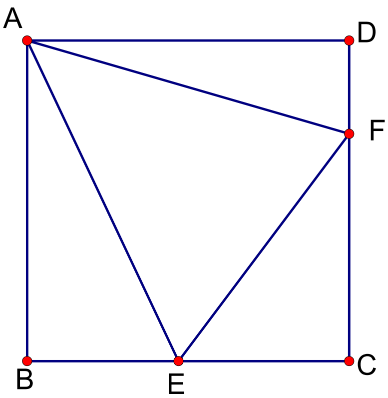
首先，我們證明，昆蟲爬行的路線中的任何兩條相鄰的水平線段之間夾有的其它方

向的線段條數必為奇數(所謂兩條相鄰的水平線段指二者之間不再有水平線段)。設 a 和 b 是這條路線上的兩條相鄰水平線段，中間夾有偶數條其它方向的線段。於是當昆蟲由 P 出發經過 a 和偶數條其它方向的線段到達 b 時，只能沿與 a 相反的方向通過 b 而到達點 Q。但這時，由 P 出發沿虛線到達點 Q 的路徑更短，此不可能。同理可知，任何兩條同向線段之間所夾的其它方向的線段數均為奇數。因而，當將所記路線上的線段依次編號為 1,2,….,100 時，任何兩條同向線段的編號都具有相同的奇偶性。故知線段條數最多的一種方向的線段數必為 50 條。

問題編號

8705

如圖，正方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，E, F 兩點分別在 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 邊上，且 $\angle BAE=30°$，$\angle DAF=15°$，求△AEF 的面積＝？



【簡答】$3-\sqrt{3}$

參考解答：

過 A 點作 $\overline{AG}\perp\overline{AF}$ 且交 $\overline{CB}$ 延長線於 G 點

$\Rightarrow \triangle ABG \cong \triangle ADF(ASA) \Rightarrow \overline{AG}=\overline{AF}$

$\Rightarrow \angle GAE=\angle FAD=15°$

$\angle GAE=15°+30°=45°$

而 $\angle EAF=90°-30°-15°=45°$

$\Rightarrow \triangle AGE \cong \triangle AFE$

$\Rightarrow \overline{GE}=\overline{EF}$，$\angle AEB=\angle AEF=60°$

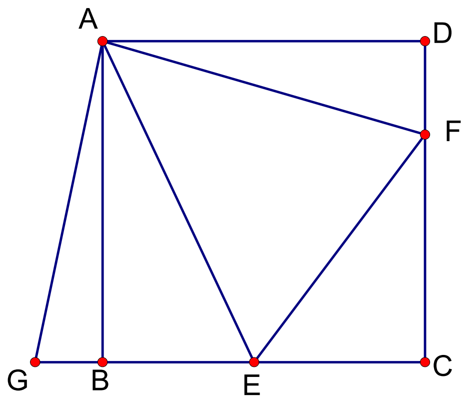
$\therefore \angle AFE=\angle AGE=75° \Rightarrow \angle CFE=30°$

且 $\overline{AB}=\sqrt{3} \Rightarrow \overline{BE}=1 \Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{3}-1$

$\therefore \overline{EF}=2(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow$ △AEF 面積＝△AGE 面積

$=\frac{1}{2}\times 2(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$ 。



【解題評析】

國中階段尚未學習到三角函數及應用，所以老師是希望同學們能由幾何證明的方式做出輔助線再利用三角形全等性質計算出所求三角形面積。