內切圓和整數邊長的直角三角形

朱啟台 [1] 李政豐 [2*] 陳昭地 [1]

[1] 國立臺灣師範大學 數學系

[2] 國立竹南高級中學

壹、前言

在中學幾何課程中，我們常碰到如(3,4,5),(6,8,10),(9,12,15)，邊長是整數的相似直角三角形，我們很有興趣的是：要如何做出最基本的“兩兩互質的直角三角形的邊長”，例如(3,4,5)、(5,12,13)、(9,40,41)。這就是本原畢氏三元數組的表徵，雖然它是很有啟發性的教材，然而課本談得很少，殊為可惜，尤其是它對整數論及幾何學的學習有很大的助益。

由國民中學幾何課程中“圓外一點到此圓之兩切線段等長”的性質，得到兩股為 a,b，斜邊是 c，內切圓半徑為 r 的直角三角形，它們之間有以下的關係 $a+b=c+2r$，亦即 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$。

我們可以理解“半徑是正整數 r 的圓，它有無限多種外切直角三角形”；但是如果我們限制這種外切直角三角形的邊長是兩兩互質的正整數，其邊長是不是有限多組？若為有限，要如何證明它？重點在如何找到這有限多種直角三角形。如果沒有借助於本原畢氏三元數組的性質，我們不易得到以下漂亮的結論：

(1) 由正整數 r 之標準分解式為 $2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$，（其中 p_i 為相異奇質因數，$x,l,\ x_1,x_2,\ldots,x_l$ 都是非負整數）知道有 2^l 組本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，它們的內切圓半徑均為 r。

(2) 如果不限定直角三角形的邊長為本原畢氏三元數組，只要畢氏數即可，當內切圓半徑為 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$，則有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\cdots(2x_l+1)$ 種邊長是正整數的直角三角形，其內切圓半徑均為 r。

(3) ΔABC 三邊為正整數 a,b,c，$a<b<c$，其內切圓半徑為 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$

若三邊 a,b,c，$a<b<c$ 是本原畢氏三元數組 $\Leftrightarrow$ $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質。

且滿足 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質的數對 (a,b) 恰有 2^l 組。

在以上研究中，不免需要用到一般三角形三邊長 $a\le b\le c$ 及其內切圓半徑 r 之間的關係，我們也有如下的發現：

(4) ΔABC 為 $\angle C=90^\circ$ 之直角三角形之充要條件為 $a+b-c=2r$。

(5) ΔABC 之任一邊均大於 $2r$，即 $a-2r>0$, $b-2r>0$, $c-2r>0$。

*為本文通訊作者

貳、本文

如果說化學的分子是可以代表一種化學物性質的最基本粒子。數學中的質數是可以代表整數結構中最基本的組成數字。那麼本原畢氏三元數組就是畢氏數中最基本的有序三元數組。

定義：設 a ,b ,c 是正整數，若 $a^2+b^2=c^2$ 則稱 a,b,c 是一組畢氏三元數組。如果畢氏三元數組 a,b,c 的最大公因數為 1，亦即 $(a,b,c)=1$，則 a,b,c 稱為一組本原畢氏三元數組。

性質(1)：a ,b ,c 是正整數，且滿足 $a^2+b^2=c^2$，如果 $(a ,b ,c)=1$，即三數的最大公因數為 1，則 a ,b ,c 兩兩互質。

證明：如果有一個質數 p，$p|a$ (即 p 能整除 a)，且 $p|b$，則 $p|(a^2+b^2)$ 即 $p|(c^2)$，必然 $p|c$。與 $(a ,b ,c)=1$ 矛盾，故 $(a ,b)=1$。同理可證 $(b ,c)=1$、$(a ,c)=1$ 也成立。

性質(2)：若 a ,b ,c 為本原畢氏三元數組，即 a ,b ,c 是正整數，$a^2+b^2=c^2$，且 $(a ,b ,c)=1$，則 a,b 是一奇一偶，c 必定是奇數。

解說：

1. 若 a,b 皆為偶數，則 $c^2=a^2+b^2$ 也是偶數，則c 必定是偶數(因為奇數的平方必定是奇數)，與 $(a ,b ,c)=1$ 矛盾。
2. 若 a,b 皆為奇數，令 $a=2k+1,b=2m+1$ (m, k 是正整數或0)，則 $c^2=a^2+b^2=4k^2+4k+4m^2+4m+2$ 是數，令 $c=2n$ (n 是正整數)，代入上式 $c^2=a^2+b^2\Rightarrow 4n^2=4k^2+4k+4m^2+4m+2$ (兩邊除2) $\Rightarrow 2n^2=2k^2+2k+2m^2+2m+1$ 等式左邊是偶數右邊是奇數，矛盾。
3. 因此 a ,b 必是一奇一偶，且 c 一定是奇數引理 1 若 $(a,c)=1$，且 c、a 都是奇數，則 $(c-a，c+a)=2$。

證明：因為 c、a 都是奇數，故 $(c-a)$、$(c+a)$ 皆為偶數

步驟 1：設 p 是不為 2 的質數，若質數 $p|(c-a)$ 且 $p|(c+a)$，

$p|[(c-a)+(c+a)] \Rightarrow p|(2c) \Rightarrow p|c$

$p|[(c+a)-(c-a)] \Rightarrow p|(2a) \Rightarrow p|a$

與 $(a,c)=1$ 矛盾，故 $(c-a)$、$(c+a)$ 除了 2 之外，沒有其他奇質因數。

步驟 2：$k\geq 2$，設 $2^k|(c-a)$ 且 $2^k|(c+a)$

$2^k|[(c-a)+(c+a)] \Rightarrow 4|(2c) \Rightarrow 2|c$

$2^k|[(c+a)-(c-a)] \Rightarrow 4|(2a) \Rightarrow 2|a$

與 $(a, c)=1$ 矛盾，故 $(c-a)$、$(c+a)$ 除了 2 之外，沒有 2^k $(k\geq 2)$ 的公因數。即 $((c-a),(c+a))=2$

定理一、本原畢氏三元數組的一種構造法

若 a,b,c 是一組本原畢氏三元數組，$a^2+b^2=c^2$，$a,b,c\in N$，$(a,b,c)=1$，令 a 是奇數，b 是偶數。則存在 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶；使得 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$。

證明：

步驟 1：$b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$

$b=\sqrt{(c-a)(c+a)}$ ………………… (A)

由引理 1、若 $(a,c)=1$，且 c、a 都是奇數，則 $(c-a,c+a)=2$。沿上面(A)

式 $b\in N$，$b=\sqrt{(c-a)(c+a)}$，$(c-a)$、$(c+a)$皆為偶數，$(c-a,c+a)=2$，且 $(c-a)(c+a)$又是一個完全平方數。則可令 $c-a=2n^2$，$c+a=2m^2$，其中 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$，代入 b 則 $b=\sqrt{(c-a)(c+a)}=2mn$。由

$$\begin{cases} c-a=2n^2 \\ c+a=2m^2 \end{cases} \Rightarrow a=m^2-n^2, c=m^2+n^2$$

步驟 2：因為 a，c 是奇數，故 m,n 其中一個奇數，一個偶數。

(若兩個都是奇數，或都是偶數，則 a,c 都是偶數，不合)

步驟 3：如果 m,n 不互質，則 $a=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$ 也不互質，與$(a,c)=1$ 矛盾。若 a,b,c 為本原畢氏三元數組，由本原畢氏三元數組產生的一種方法，令 $a=m^2-n^2$、$b=2mn$、$c=m^2+n^2$，其中 m,n 是正整數，$m>n$，$(m,n)=1$，且 m,n 一奇一偶，則

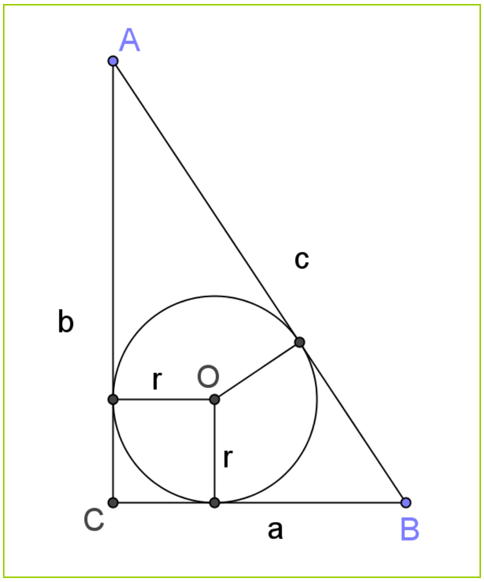
(1) 當 $m<(1+\sqrt{2})n$

$$\Rightarrow (m-n)<\sqrt{2}\,n \Rightarrow (m-n)^2<2n^2$$
$$\Rightarrow m^2-2mn+n^2<2n^2$$
$$\Rightarrow m^2-n^2<2mn$$
$$\Rightarrow m^2-n^2<2mn<m^2+n^2$$
$$\Rightarrow a<b<c$$

(2) 反之，當 $m>(1+\sqrt{2})n \Rightarrow 2mn<m^2-n^2<m^2+n^2 \Rightarrow b<a<c$

性質(3)：直角 ΔABC 三邊長 $a=m^2-n^2$, $b=2mn, c=m^2+n^2$，(其中 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1,m,n$ 奇偶性互異)，其內切圓半徑 $r=n(m-n)$必為正整數。

證明：由圓外一點到此圓之兩切線段等長，得到 $a+b=c+2r$，如圖(1)



圖(1)

其內切圓半徑 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$

$=\dfrac{m^2-n^2+2mn-m^2-n^2}{2}=n(m-n)$必為正整數。

性質(4)：任給正整數 r，則以 $2r+1$，$2r^2+2r$，$2r^2+2r+1$ 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑就是 r。

證明：由直角三角形內切圓半徑 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$

，$\dfrac{(2r+1)+(2r^2+2r)-(2r^2+2r+1)}{2}=r$

亦即，任給正整數 r，知道 $2r+1$，$2r^2+2r$，$2r^2+2r+1$ 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑就是 r 。

性質(5)：直角三角形斜邊上的高，分此

直角三角形，形成大小不一的三個兩兩相似的直角三角形 ΔCAD 、 ΔBCD 、 ΔABC ，令 r_1 、 r_2 、 r_3 分別為它們的內切圓半徑，h_c 是 ΔABC 斜邊上的高，則有以下的關係：$r_1^2+r_2^2=r_3^2$ ，$h_c=r_1+r_2+r_3$ 。

證明：

步驟 1：如圖(2) ΔCAD 、 ΔBCD 、 ΔABC 是相似的直角三角形，它們的所有對應長度都成比例，故三者斜邊與內切圓半徑的比值都相等 $\frac{b}{r_1}=\frac{a}{r_2}=\frac{c}{r_3}=k$

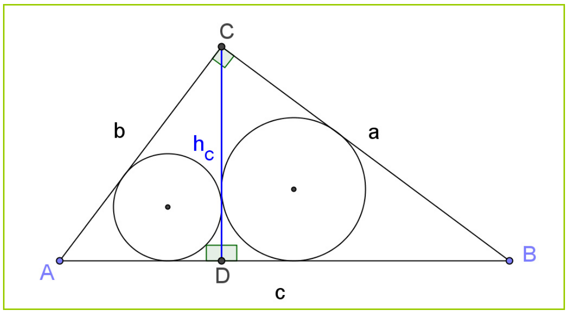
由畢氏定理

$c^2=b^2+a^2 \Rightarrow (r_3k)^2=(r_1k)^2+(r_2k)^2 \Rightarrow r_1^2+r_2^2=r_3^2$

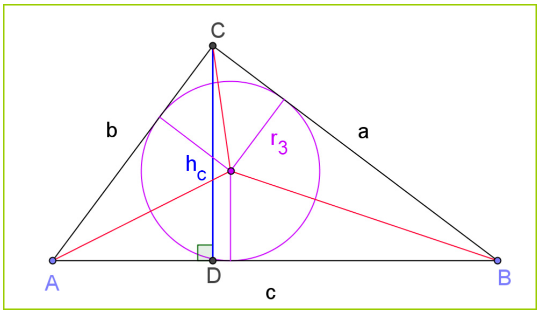
步驟 2：如圖(3)由 ΔABC 面積公式

$$\frac{1}{2}(c)(h_c)=\frac{1}{2}(a+b+c)(r_3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{B})$$

將 $b=r_1k$ ，$a=r_2k$ ，$c=r_3k$ 代入(B)式得 $\frac{1}{2}(r_3k)(h_c)=\frac{1}{2}(r_1k+r_2k+r_3k)(r_3)$ 兩邊各除以 $\frac{1}{2}r_3k$ ，得到 $h_c=r_1+r_2+r_3$ 。



圖(2)



圖(3)

定理二

若正整數 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$（$p_i$ 為相異的奇質因數，$l\ge 0$）則有 2^l 組以本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，它們的內切圓半徑均為 r。

證明：我們先觀察幾個比較簡單的例子；若 a ,b ,c 是本原畢氏三元數組，a 是奇數，b 是偶數，c 是奇數。即存在 m,n 是正整數， $m>n$ ，$(m,n)=1$ ，m,n 一奇一偶，使得 $a=m^2-n^2$ ，$b=2mn$ ，$c=m^2+n^2$ ，內切圓半徑 $r=n(m-n)$。

(1) 當 r=1 時，由 $r=n(m-n)$及 m 、n 的條件；

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
1	1	1	2	是	是

此時僅有 n=1，m=n+1=2，一組解(3,4,5)。

(2) 當 r=2 時，由 $r=n(m\text{-}n)$及 m 、n 的條件；

r	n	$m-n$	m	m,n 是奇偶互異	m,n 是否互質
2	1	2	3	否	是
2	2	1	3	是	是

也僅得 n=2，m=2+1=3 一組解(5,12,13) 。

(3) 當 r=3 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
3	1	3	4	是	是
3	3	1	4	是	是

n=1，m=3+1=4 → (15,8,17)

n=3，m=3+1=4 → (7,24,25)

(4) 當 r=4=2^2 時，由 m、n 之條件僅能取

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
4	1	4	5	否	是
4	2	2	4	否	否
4	4	1	5	是	是

N=4，m=4+1=5 → (9,40,41)一組解

(5) 當 r=5 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
5	1	5	6	是	是
5	5	1	6	是	是

n=1，m=5+1=6 → (35,12,37)

n=5，m=1+5=6 → (11,60,61)

(6) 當 r=6=2×3 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
6	1	6	7	否	是
6	2	3	5	是	是
6	3	2	5	否	是
6	6	1	7	是	是

n=2，m=3+2=5 → (21,20,29)

n=6，m=1+6=7 → (13,84,85)

(7) 當 r=2×3×5 時，由 m、n 之條件，得到下列四組解：

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
30	1	30	31	否	是
30	2	15	17	是	是
30	3	10	13	否	是
30	5	6	11	否	是
30	6	5	11	是	是
30	10	3	13	是	是
30	15	2	17	否	是
30	30	1	31	是	是

n=2，m=15+2=17 → (285,68,293)

n=6，m=5+6=11 → (85,132,157)

n=10，m=3+10=13 → (69,260,269)

n=30，m=1+30=31 → (61,1860,1861)

觀察上面七個例子，我們是否可看出如何找到 m,n 及本原畢氏三元數組的方法？

再進一步證明之前，先解說內切圓半徑 $r=n(m-n)$ 之一些性質：若直角 ΔABC 的三邊長 a ,b ,c 是本原畢氏三元數組，存在 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$, m,n 奇偶性互異，使得 $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$，其內切圓半徑 $r=n(m-n)$。則

(i) n 與 $(m-n)$ 互質。

(ii) 當 r 為奇數，則 n 是奇數，$(m-n)$ 是奇數，m 是偶數。

(iii) 當 r 為偶數，則 n 是偶數，$(m-n)$ 是奇數，m 是奇數。

證明：

(i) 若有質因數 p，$p|n$ 且 $p|(m-n)$，則 $p|(m-n+n)$ 即 $p|m$，與(m,n)=1 矛盾，故 n 與$(m-n)$互質。

(ii) 當 r 為奇數，則 n 與$(m-n)$ 都是奇數，則 $n+(m-n)=m$ 必為偶數。

(iii) 當 r 為偶數，由窮舉法，考慮所有情形有下列四種，但只有一種成立：

若 n 為奇數，$(m-n)$是奇數，與 r 為偶數矛盾，不合。

若 n 為奇數，$(m-n)$是偶數，則 m 為奇數，與 m,n 奇偶互異矛盾，不合。

若 n 為偶數，$(m-n)$是偶數，則 m 為偶數，與(m,n)=1 矛盾，不合。

若 n 為偶數，$(m-n)$是奇數，則 m 為奇數，成立。(只有這種情況成立)

最後再來說明定理二，先將 r 的標準分解式寫出來：$r= 2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$，

$p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 為由小到大的奇質因數，其中 $x_1, x_2, ..., x_l, x, l$ 都是非負整數。

(1) $r = 1$，即 $x_1, x_2, ..., x_l, x,\ l$ 都是 0，由上面的證明與觀察第一行(1)知：n=1，m=2，三邊長(a,b,c)=(3,4,5)，恰有一組本原畢氏三元數組，即有 $2^l = 2^0 = 1$ 組。

(2) $r = 2^x$，即 $x_1, x_2, ..., x_l$,都是 0，$x \ge 1$，因為 r 是偶數，由上面(i)：n與 $(m-n)$ 要互質，2^x 不能分在兩個因式中，由(iii)當 r 為偶數，則 n 是偶數，m 是奇數，故 $n = 2^x$，$(m-n)$=1，即 $m = 2^x + 1$。
由定理一知：$2^{x+1} + 1$，$2^{x+1}(2^x + 1)$，$2^{2x+1} + 2^{x+1} + 1$ 是唯一的一組本原畢氏三元數組，即有 $2^l = 2^0 = 1$組。例如上面的觀察(2) $r = 2$, $n = 2$, $m - n = 1$, $m = 3$, 恰有一組本原畢氏三元數組(5,12,13)。又如上面的觀察(4) $n = 2^2 = 4$，$m - n = 1$，$m = 5$，恰有一組本原畢氏三元數組(9,40,41)。

(3) $r = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_l^{x_l}$，$p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 為由小到大的奇質因數，其中 $x_1, x_2, ..., x_l$ 都是正整數，$l \ge 1$。由 $r = n(m-n)$，且 n 與 $(m-n)$ 互質，所有的 $p_k^{x_k}$ $(1 \le k \le l)$，都只能完整出現在 n 或$(m-n)$兩者之一的因數裏，不能拆開分兩邊，所以 n 就是 $(1+p_1^{x_1})(1+p_2^{x_2})\cdots(1+p_l^{x_l})$ 展開式中的一項，n 確定了，$(m-n)$就確定，m 隨之確定。由乘法原理，因為 n 有 2^l 種可能，故也恰有 2^l 組本原畢氏三元數組為三邊的直角三角形，其內切圓半徑是 $r = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_l^{x_l}$。

例如 r=3×5=$n(m-n)$時

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
15	1	15	16	是	是
15	3	5	8	是	是
15	5	3	8	是	是
15	15	1	16	是	是

如下表共有 2^2=4 組本原畢氏三元數組為三邊的直角三角形，其內切圓半徑是 15。

n	m	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
1	16	255	32	257
3	8	55	48	73
5	8	39	80	89
15	16	31	480	481

(4) $r = 2^x \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_l^{x_l}$，$p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 為由小到大的奇質因數，其中 $x_1, x_2, ..., x_l, x,\ l$ 都是正整數。

因為 r 是偶數，由上面(iii)當 r 為偶數，則 n 是偶數，$(n, m-n) = 1$，m 是奇數，因此 2^x 一定是 n 的因數，n 的因數除了 2^x 之外，就是 $(1+p_1^{x_1})(1+p_2^{x_2})\cdots(1+p_l^{x_l})$ 展開式中的一項，因此 n 有 2^l 種，每一種 n 都恰對應一種 m，因此數對(n,m)有 2^l 種，故有 2^l 組本原畢氏三元數組為三邊的直角三角形其內切圓半徑是 $r = 2^x \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_l^{x_l}$。

例如，當 r=2×3×5=30 為偶數時

r	n	$m-n$	m	m,n 是否奇偶互異	m,n 是否互質
30	2	15	17	是	是
30	6	5	11	是	是
30	10	3	13	是	是
30	30	1	31	是	是

如下表共有 2^2=4 組本原畢氏三元數組為

三邊的直角三角形，其內切圓半徑是 30。

n	m	$a=m^2-n^2$	$b=2mn$	$c=m^2+n^2$
2	17	285	68	293
6	11	85	132	157
10	13	69	260	269
30	31	61	1860	1861

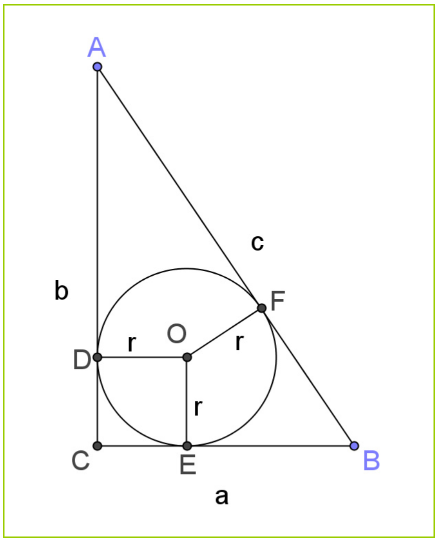
由上述(1)(2)(3)(4)，定理二因此得證。

如果我們不限定三角形的邊長一定是本原畢氏三元數組，只要是畢氏三元數組即可，當它的內切圓半徑為 r，那要如何求得所有的畢氏三元數組？

有關 ΔABC 的三邊 $a\le b\le c$ 及其內接圓半徑 r 之一些關係，我們有如下之引理：

引理 2 若 ΔABC，a,b,c 分別是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊，$a\le b\le c$，其內切圓半徑為 r。若 $a+b-c=2r$ 成立，則 ΔABC 為直角三角形。

證明 1：(綜合幾何法)



圖(4)

如圖(4)，由圓外一點到此圓之兩切線段等長，$\overline{AF}=\overline{AD}$，$\overline{BF}=\overline{BE}$，得到 $a+b-c=\overline{CD}+\overline{CE}$，由 $a+b-c=2r$，推得 $\overline{CD}+\overline{CE}=2r$，由切線段長相等，得到 $\overline{CD}=\overline{CE}=r$。四邊形 CEOD 四邊相等是個菱形，$\angle CEO=\angle CDO=90^\circ$，故 CEOD 是正方形，$\angle C=90^\circ$，故得 $a^2+b^2=c^2$，得證。

證明 2：(代數法)

由三角形面積與內切圓半徑的關係以及海龍公式

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，}$$

其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 為周長之半

兩邊平方 $\Rightarrow r^2s^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$

$$\Rightarrow r^2s=(s-a)(s-b)(s-c)$$

將 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ 及 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 代入上式

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

兩邊消去 $\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (a+b-c)(a+b+c)$$
$$=(b+c-a)(a+c-b)$$
$$\Rightarrow (a+b-c)(a+b+c)$$
$$=(c-(a-b))(c+(a-b))$$
$$\Rightarrow (a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab-c^2=c^2-a^2-b^2+2ab$$

$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$，得證。

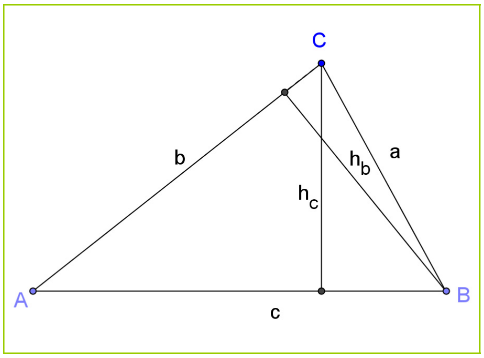
引理 3. ΔABC 的三邊 a,b,c 分別是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊，其內切圓半徑為 r，不論 ΔABC 是銳角、直角或鈍角三角形，則三邊長都大於 $2r$。

證明 1：(面積證法)

設 $a\le b\le c$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，ΔABC 的內切圓半徑為 r，不論 ΔABC 是銳角、直角或鈍角三角形，若能證得 $(a-2r)>0$，即得證三邊長都大於 $2r$。設 Δ 是三角形的面積，由

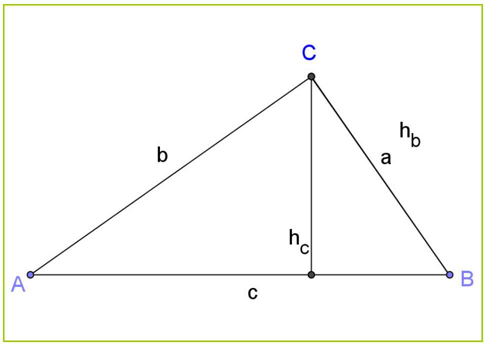
$$(\frac{a+b+c}{2})r=\Delta \Rightarrow (a+b+c)r=2\Delta$$

如圖(5)、圖(6)、圖(7)，不論 ∠C 是銳角、直角或鈍角，以下的不等式都成立：由 $a\ge h_b \Rightarrow ab\ge bh_b=2\Delta$，由 $a\ge h_c \Rightarrow ac\ge ch_c=2\Delta$ (其中 h_b, h_c 分別是 b, c 邊所對應的高)則 $a(a+b+c)>ab+ac\ge 4\Delta=4(\frac{a+b+c}{2})r=2(a+b+c)r$。

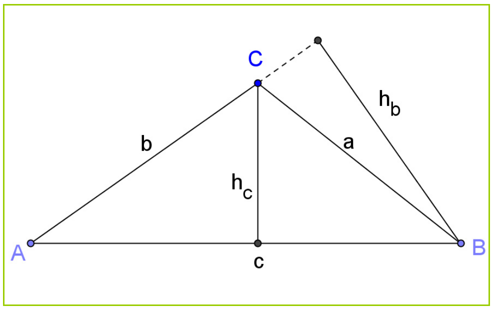


圖(5)

將 $a(a+b+c)>2(a+b+c)r$，兩邊除掉 $(a+b+c)$，即得 $a>2r \Rightarrow a-2r>0$



圖(6)

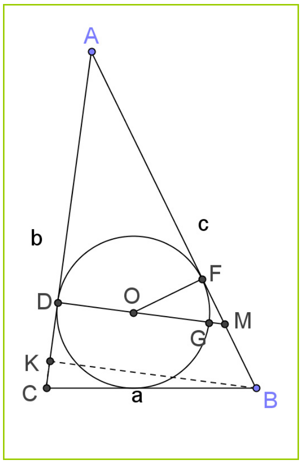


圖(7)

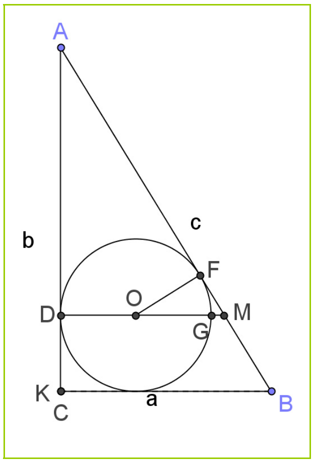
證明 2：(綜合幾何法)

若 $a\le b\le c$，ΔABC 的內切圓半徑為 r，由內切圓的圓心 O 向直線 AC 做垂線垂足為 D，向直線 AB 做垂線，垂足為 F，延長直線 OD 交內切圓於 G，交直線 AB 於 M，再由 B 點向直線 AC 做垂線，垂足為 K。

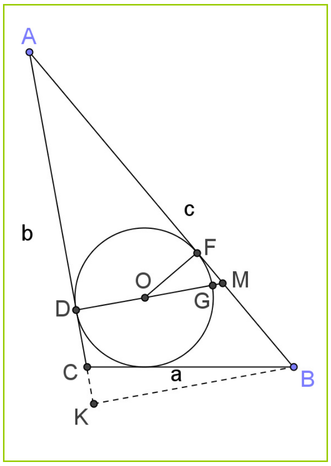
不論是銳角三角形，如圖(8)。直角三角形，如圖(9)。或鈍角三角形，如圖(10)。在圖(8)、圖(10)中，ΔBCK，斜邊 $a>\overline{KB}>\overline{DM}>\overline{DG}=2r$。



圖(8)



圖(9)



圖(10)

在圖(9)中，$\angle C=90^\circ$時，K,C 重合，$a\geq\overline{KB}>\overline{DM}>\overline{DG}=2r$，即 $a-2r>0$ 成立。因此，三角形的三邊長都大於內切圓的直徑 $2r$。

定理三

給定一個圓的半徑為正整數 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$，$p_1<p_2<\cdots<p_l$ 為由小到大的奇質因數，其中 $x_1,x_2,\ldots,x_l,x,l$ 都是非負整數。

則有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\cdots(2x_l+1)$ 種以畢氏三元數組(包含本原與非本原)為三邊的直角三角形，其內切圓半徑均為 r。

證明：設 a,b,c 是畢氏三元數組，$a^2+b^2=c^2\ldots(1)$，且三邊長 a,b,c 的直角 ΔABC 內切圓半徑為 r，由內切圓半徑 r 的性質，$a+b-2r=c\ldots(2)$，將(2)代入(1)

$$a^2+b^2=(a+b-2r)^2$$
$$=a^2+b^2+4r^2-4ar-4br+2ab$$
$$\Rightarrow 2ab-4ar-4br+4r^2=0$$

(兩邊除以 2)

$$\Rightarrow ab-2ar-2br+2r^2=0$$
$$\Rightarrow ab-2ar-2br=-2r^2$$
$$\Rightarrow ab-2ar-2br+4r^2=-2r^2+4r^2$$
$$\Rightarrow (a-2r)(b-2r)=2r^2$$ 由引理(3)

知道 $a>2r$，$b>2r$

若內切圓半徑為 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$ 則 $2r^2=2^{2x+1}\cdot p_1^{2x_1}\cdot p_2^{2x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{2x_l}$，由於 $2r^2$ 的所有正因數有 $(2x+2)(2x_1+1)(2x_2+1)\cdots(2x_l+1)$ 個，若限制 $a<b$ 的條件下，由 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$，數對 $(a-2r,b-2r)$ 的數目，是 $2r^2$ 的所有正因數個數的一半，

即有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\cdots(2x_l+1)$ 種。相應的數對 (a,b) 也有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\ldots(2x_l+1)$ 種。

故有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\cdots(2x_l+1)$ 種以畢氏三元數組 a,b,c 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 r。上述證明也用到引理 2：若 $a+b-c=2r$ 則 $a^2+b^2=c^2$。

由定理一與內切圓半徑 r 的性質，我們可以證得以下的定理；

定理四

若 a,b,c 是一組本原畢氏三元數組，$a^2+b^2=c^2$，以 a,b,c 為邊長的直角三角形，其內切圓半徑為 r，則 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質。

證明:

若 a,b,c 是一組本原畢氏三元數組，$a^2+b^2=c^2$，令 a 是奇數 b 是偶數 c 是奇數。存在 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，使得 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，以 a,b,c 為邊長的直角三角形，其內切圓半徑 $r=n(m-n)$。則

$$a-2r=m^2-n^2-2n(m-n)=(m-n)^2$$

$$b-2r=2mn-2n(m-n)=2n^2$$

由反證法，若有質數 p 滿足 $p|(a-2r)$ 且 $p|(b-2r)$ 亦即 $p|(m-n)^2$ 且 $p|(2n^2)$，則

步驟 1：若 $p=2$，由 $2|(m-n)^2 \Rightarrow 2|(m-n)$，但是 m,n 是一奇一偶，$m>n$，$(m-n)$ 是奇數，矛盾。

步驟 2：若 p 是奇質數，由

$p|(m-n)^2 \Rightarrow p|(m-n)$ …………(1)

由 $p|(2n^2) \Rightarrow p|n^2 \Rightarrow p|n$ …….(2)

由(1)(2) $p|((m-n)+n) \Rightarrow p|m$ …(3)

由(2)(3)知道與 $(m,n)=1$ 相矛盾。

綜合步驟 1.與步驟 2. 知道 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質。

由 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，使得 $a=m^2-n^2$ 是奇數，$b=2mn$ 是偶數，$c=m^2+n^2$ 是奇數。而已知 $2r$ 是偶數，故 $(a-2r)$ 是奇數，$(b-2r)$ 是偶數。

因此，如果已知 a,b,c 是一組本原畢氏三元數組，以 a,b,c 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 r，則 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質，且奇偶性互異。

而當 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質時，由 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$ 的條件，$(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 的奇偶性互異是必然，因為

(1) 當 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 均為偶數，則與 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質的條件相矛盾。

(2) 當 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 均為奇數，則與 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$ 為偶數的條件相矛盾。

定理五

若 a,b,c 是一組畢氏三元數組，以 a,b,c 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 r。若 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質，則 a,b,c 是本原畢氏三元數組。

證明：用反證法，若 a,b,c 是一組畢氏三元數組，但非本原畢氏三元數組，假設 $(a,b)\neq 1$(當 $(a,c)\neq 1$ 或 $(b,c)\neq 1$ 時，同

理可證)，由性質(1)存在質數 p， $p|a$ 且 $p|b \Rightarrow p\big|(a^2+b^2) \Rightarrow p\big|c^2 \Rightarrow p|c$

由 $p|a$, $p|b$, $p|c \Rightarrow p\big|(a+b-c)$

因為 r 是內切圓半徑，及 $a+b-c=2r$

$\Rightarrow p|2r$

因此 $p|(a-2r)$ 且 $p|(b-2r)$

亦即 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 不互質。與假設條件相矛盾。

所以，當 a,b,c 是一組畢氏三元數組；若 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質 $\Rightarrow a,b,c$ 是一組本原畢氏三元數組。

綜合定理三，定理四與定理五，我們可以得到下面的系理:

系理 1. 假設 $a<b<c$，a,b,c 是畢氏三元數組，以 a,b,c 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$ 其中 $x_1,x_2,\ldots,x_l,x,l$ 都是非負整數，由直角三角形邊長的性質 $a^2+b^2=c^2$ ..(1) 及其內切圓半徑 r 的性質， $a+b-2r=c$...(2) 可推得 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$，則 a,b,c 是本原畢氏三元數組 $\Leftrightarrow$ $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質

且恰有 2^l 組本原畢氏三元數組 $a,b,c,$ 滿足 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 互質的條件。

例題 1.當 $r=2$，則有 $(1+1)(2\cdot0+1)(2\cdot0+1)\cdots(2\cdot0+1)$=2 種以畢氏三元數組為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 r=2。其中本原畢氏三元數組有 2^0=1 種。

由 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$ 亦即 $(a-4)(b-4)$ = 8

$(a-2r)$	$(b-2r)$	a	b	c
1	8	5	12	13
2	4	6	8	10

其中 1,8 互質，(5,12,13)是本原畢氏三元數組而 2,4 不互質，(6,8,10)是畢氏三元數組但非本原。

例題 2.當 $r=6=2^1\cdot3^1$，則有 $(1+1)(2\cdot1+1)(2\cdot0+1)\cdots(2\cdot0+1)=6$ 種以畢氏三元數組 a,b,c (其中 $a<b<c$)為三邊的直角三角形，其內切圓半徑為 r=6。其中本原畢氏三元數組有 2^1=2 種。

由 $(a-2r)(b-2r)=2r^2$ 亦即 $(a-12)(b-12)=72$

$(a-2r)$	$(b-2r)$	a	b	c
1	72	13	84	85
2	36	14	48	50
3	24	15	36	39
4	18	16	30	34
6	12	18	24	30
8	9	20	21	29

其中 1,72 互質，8,9 互質，故(13,84,85)、(20,21,29)是本原畢氏三元數組。其他的 $(a-2r)$ 與 $(b-2r)$ 不互質，故 (14,48,50)、(15,36,39)、(16,30,34)、(18,24,30) 則只是畢氏三元數組但非本原。

參、結語

上面問題“有 $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\ldots(2x_l+1)$ 種畢氏三元數組(其中有 2^l 組為本原畢氏三元數組)，作為邊長的直角三角形，其內切圓半徑均為 r”，當 l 是較小的

正整數時，依本文所述的演算法，我們可透過 georgebra 驗證它的正確性，經由視覺化的表徵，讓學生能深刻體會這個幾何與數論結合的定理，欣賞數學預測與估算的美妙，使得學習變成簡單而有趣。

我們從國中開始學習畢氏定理，看似簡單的畢氏三元數組，可以衍生出那麼多重要而有趣的性質，這是我們所始料未及的一件事。這些性質對中學的數學老師，我們認為是很重要的經驗，對國中、高中的數學教學，有相當大的幫助，當老師在講解畢氏數的時候，不是只舉幾個特例，就可以說明清楚這些重要的關鍵，也不是知道 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$ 就算了解畢氏數，或者有些畢氏數如 9,12,15，還找不到正整數 m,n，$m>n$，使得 $9=m^2-n^2$，$12=2mn$，$15=m^2+n^2$。經過這段時間的思考，我們好像覺得高中數學課程，對於幾何教學，缺少了某些知能。於是藉著暑假的空檔，自告奮勇，趕緊把這些很好的想法寫下來，期望對中學數學老師在教學實務上有所助益。

參考文獻

李政憲、陳昭地（2013）。畢氏三元數組，國民中學數學教材原型 C 冊主題 1-4，新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地（2013）。直角三角形母子相似定理與海龍公式，國民中學數學教材原型 C 冊，新北市：國家教育研究院。