中學生通訊解題第八十五期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8501

設二次曲線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 $(m,0),(n,0)$，其中 m,n 為相異整數，若該曲線通過點 $(1,-2011)$，試求數對 (a,b)。

簡答：$(2008,-4020)$ 或 $(-2012,0)$

【分析】由題目的序數可以得知以下的一些性質：

(1) 二次曲線 $y=x^2+ax+b$ 通過 $(m,0),(n,0),(1,-2011)$ 三個點。

(2) m,n 是方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩根，因此可得：

(i) $x^2+ax+b=(x-m)(x-n)$

(ii) $m+n=-a, mn=b$

參考解答：

(1) 不失一般性，假設 $m<n$ 且

$y=x^2+ax+b=(x-m)(x-n)$

(2) 因為曲線通過 $(1,-2011)$，所以

$(1-m)(1-n)=-2011$

又 $1-n<1-m$ 、 m,n 為相異整數，且 2011 為質數

因此 $\begin{cases}1-m=2011\\1-n=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m=1\\1-n=-2011\end{cases}$

解得 $(m,n)=(-2010,2)$ 或 $(0,2012)$

(3) (i) 當 $(m,n)=(-2010,2)$ 時，

$y=(x+2010)(x-2)$

$=x^2+2008x-4020$ ，

即 $(a,b)=(2008,-4020)$

(ii) 當 $(m,n)=(0,2012)$ 時，

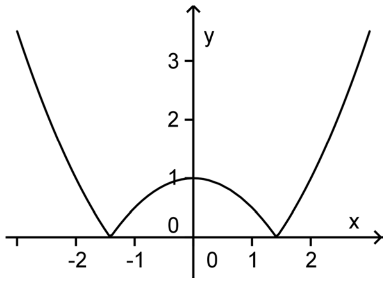
$y=(x-0)(x-2012)=x^2-2012x$ ，即 $(a,b)=(-2012,0)$

因此數對 $(a,b)=(2008,-4020)$ 或 $(-2012,0)$ 。

【解題評註】

本題需要用到二次函數的因式分解概念，或者使用二次方程式的根與係數關係。另外還要知道 2011 是質數，並且將兩整數進行因數分解。

問題編號
8502



給定 y 軸上的一點 $A(0, a)$, $(a>1)$，對於曲

線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-1\right|$ 上的動點 $M(x,y)$，試求 A、M 兩點之間距離 $\overline{AM}$ 的最小值(用 a 表示)。

簡答：$\overline{AM}$ 的最小值＝$\begin{cases} a-1, 1<a\le 4 \\ \sqrt{2a+1}, a>4 \end{cases}$

參考解答：

如圖，易求得曲線上諸點的座標為：$E(-\sqrt{2},0)$，$F(\sqrt{2},0)$，$D(0,1)$，當 $x^2<2$，即 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ 時，曲線方程為 $y=1-\frac{x^2}{2}\ldots(1)$

而當 $x^2\ge 2$ 時，即 $x\le-\sqrt{2}$ 或 $x\ge\sqrt{2}$ 時，曲線方程為 $y=\frac{x^2}{2}-1\ldots(2)$

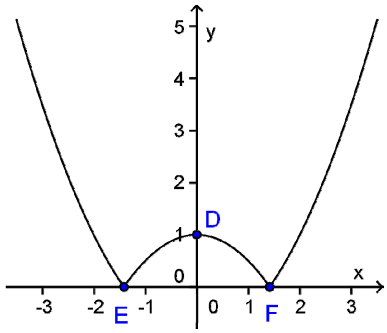
對於情形(1)，即當 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ 時，顯然 M 為(0,1)時，$\overline{AM}$ 有最小值為 $a-1$；

對於情形(2)，即當 $x\le-\sqrt{2}$ 或 $x\ge\sqrt{2}$ 時，設點 $M(x,\frac{x^2}{2}-1)$，由於 $\overline{AM}^2=x^2+(\frac{x^2}{2}-1-a)^2=\frac{1}{4}(x^2-2a)^2+2a+1$

因 $a>1$，則 $2a>2$，$\sqrt{2a}>\sqrt{2}$，於是，當 $x=\pm\sqrt{2a}$ 時，$\overline{AM}$ 有最小值 $\sqrt{2a+1}$；再比較 $a-1$ 與 $\sqrt{2a+1}$，$(a-1)^2-(2a+1)=a(a-4)$，則當 $1<a\le 4$ 時，$(a-1)\le\sqrt{2a+1}$，即最小值為 $a-1$；

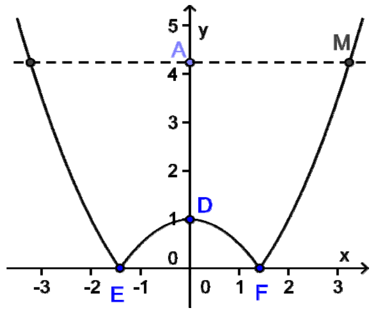
而當 $a>4$ 時，$(a-1)>\sqrt{2a+1}$，則最小值為 $\sqrt{2a+1}$

所以 $\overline{AM}$ 的最小值＝$\begin{cases} a-1, 1<a\le 4 \\ \sqrt{2a+1}, a>4 \end{cases}$。

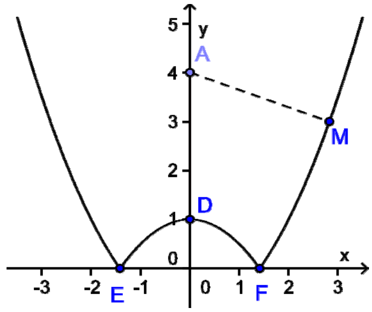


【解題評註】

1. 此題主要數學觀念是絕對值、二次函數的圖形、以及配方法求最小值，並且能加以討論比較兩數的大小。
2. 此題，大部分同學的作答很好，可見同學在這方面的能力佳。
3. 必須一提的是，當 $x\le-\sqrt{2}$ 或 $x\ge\sqrt{2}$ x，$\overline{AM}$ 有最小值時，此時 M 點坐標為 $(\pm\sqrt{2a},a-1)$，而不是在 $(\pm\sqrt{2a+2},a)$，如下圖所示的 $\overline{AM}$ 並不是最小值。

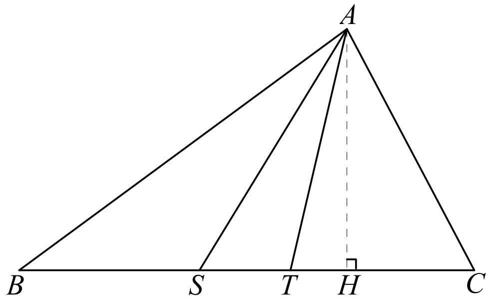


4. 欣賞一下此題的特例情形：當 $a=4$ 時，如下圖所示，$A(0,4)$，$D(0,1)$，$M(2\sqrt{2},3)$，且 $\overline{AD}=\overline{AM}$



問題編號
8503

在ΔABC中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，$\overline{AT}$是$\angle BAC$的平分線，在$\overline{BC}$上有一點 S，使$\overline{BS}=\overline{TC}$，求證：$\overline{AS}^2=\overline{AT}^2=(\overline{AB}-\overline{AC})^2$。



參考解答：

作$\overline{BC}$邊上的高$\overline{AH}$，則有

$\overline{AS}^2-\overline{AT}^2$

$=(\overline{AH}^2+\overline{SH}^2)-(\overline{AH}^2+\overline{TH}^2)$ (畢氏定理)

$=\overline{SH}^2-\overline{TH}^2$ (消去$\overline{AH}^2$)

$=(\overline{SH}-\overline{TH})\cdot(\overline{SH}+\overline{TH})$ (因式分解)

$=\overline{ST}(\overline{BH}-\overline{BS}+\overline{TC}-\overline{HC})$ (和差變換)

$=\overline{ST}(\overline{BH}-\overline{HC})$

$=(\overline{BT}-\overline{TC})(\overline{BH}-\overline{HC})$ (和差變換)$\cdots\cdots(1)$

$\because$ $\overline{AT}$平分$\angle BAC$，故有

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{TC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BT}-\overline{TC}}{\overline{AB}-\overline{AC}}$$

$$=\frac{\overline{BT}+\overline{TC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}$$

$\therefore$ $\overline{BT}-\overline{TC}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\cdot(\overline{AB}-\overline{AC})\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)知

$$\overline{AS}^2-\overline{AT}^2=(\overline{AB}-\overline{AC})\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\cdot(\overline{BH}-\overline{HC})$$

$\because$ $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\cdot(\overline{BH}-\overline{HC})$

$$=\frac{\overline{BH}+\overline{HC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\cdot(\overline{BH}-\overline{HC})=\frac{\overline{BH}^2-\overline{HC}^2}{\overline{AB}+\overline{AC}}$$

$$=\frac{(\overline{AB}^2-\overline{AH}^2)-(\overline{AC}^2-\overline{AH}^2)}{\overline{AB}+\overline{AC}}$$

$$=\frac{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2)}{\overline{AB}+\overline{AC}}=\overline{AB}-\overline{AC}$$

$\therefore$ $\overline{AS}^2-\overline{AT}^2=(\overline{AB}-\overline{AC})(\overline{AB}-\overline{AC})$

$=(\overline{AB}-\overline{AC})^2$。

【解題重點】

本題我們提供的解法，是利用畢氏定理、內角平分線性質及和差變換解題。

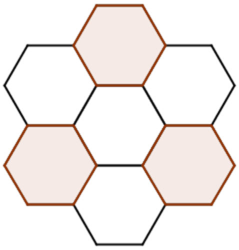
來函徵答的同學有的用量化的方法、有的用三角函數的方法、也有人用三角函數導出的特殊定理解題。為了強化同學們的幾何解題能力，我們比較鼓勵同學們朝純幾何思維的方向思考。

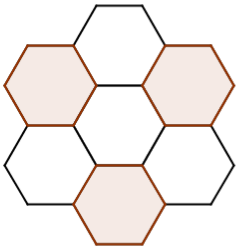
問題編號
8504

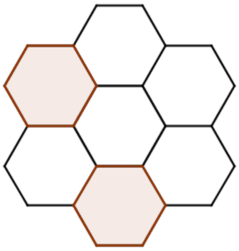
已知 7 個正六邊形中的每個都塗有黑白兩色之一(如圖所示)，每一步操作都可以隨意選定一個正六邊形，並將它以及與它相鄰的所有正六邊形同時改塗成另一種顏色(即黑改白、白改黑)。求證：在對圖(a)進行若干步改塗後，

(1) 有可能得到如圖(b)所示的塗色方式。

(2) 不可能得到如圖(c)所示的塗色方式。

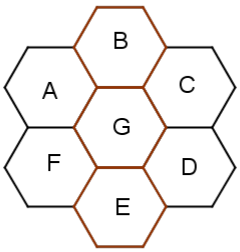

(a)


(b)

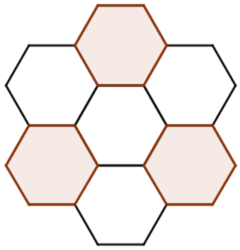

(c)

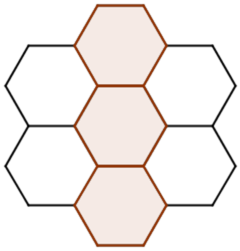
參考解答：

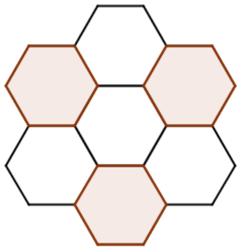
(1) 將 7 個正六邊形分別標上字母如下圖所示，



依序塗 E(F,G,D 跟著變色)及 B(A,G,C 跟著變色)即可，如下圖(d) (e) (f)，即可由圖(a)得到圖(b)所示的塗色方式。


(d)


(e)


(f)

(2) 在塗白色的正六邊形中寫上+1，塗黑色的正六邊形中寫上−1。題中所規定的每步操作，相當於將涉及到的正六邊形中的數同時乘以−1。容易看出，在任何操作之下，4 個正六邊形 A, C, D, F 中所寫數的乘積都不改變，因此總為+1。但因圖(c)中這 4 個數之積為−1，所以無論怎樣操作和操作多少次，都不能得到圖(c)所示的塗色方式。

問題編號
8505

x 的方程式 $3x^3+2ax^2+bx-7=0$，當常數 a,b 是正整數時，x 有正整數解，求 a,b 之值為？

簡答：a=1,b=2

參考解答：

設 m 為其正整數解，則

$2am^2+bm=7-3m^3$，

若 $m\geq 2\Rightarrow 2am^2+bm<0$ 不合。

故 $m=1\Rightarrow 3+2a+b-7=0$

$\Rightarrow 2a+b=4\Rightarrow a=1,b=2$。

【解題重點】

本題只需對正整數的特性有一定的了解，再加上對不定方程式自然數解的概念。只要同學動手嘗試，幾無做不出來之理。