同餘法尋找因數

蘇進發 [1*] 陳昭地 [2]

[1]臺北市立石牌國民中學

[2]國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

對於一個整數能否被另一正整數整除，是整數除法運算經常遇到的問題。在國中階段的學生，除了利用長除法來判斷之外，也另外透過分堆與部分運算，發展對 2、3、5、9 的簡易判斷法則。筆者也曾在教學現場，再利用課程探索時間，使用截尾倍率法與學生互動，來判斷因、倍數的關係，例如：275 截去 5 後剩下 27，再減去 1 倍的 5，得 22，因為 22 為 11 的倍數，所以 275 為 11 的倍數，又例如：403 截去 3 後剩下 40，再加上 4 倍的 3，得 52，因為 52 為 13 的倍數，所以 403 為 13 的倍數，藉由學生好奇心，引導探索，刺激思考，課程內容設計，頗受學生喜愛。

今在編寫國家教育研究院的國民中學數學教材原型時，且在台灣師大數學系陳昭地教授的指導下，發現同餘的概念，可能出現於高中教學中，但利用其概念，卻可簡易處理一些因、倍數的問題，也是國中生，可以嘗試進行的教學活動，今在介紹同餘的主題下，將利用同餘概念，來判定因數的準則。建議教師於國中七年級上學期的第二次段考結束後，並教了一些未知數的化簡，再實施此教學活動。

*為本文通訊作者

貳、教學目標

一、透過撲克牌遊戲引發動機。

二、瞭解對模 7 同餘的概念。

三、瞭解對模 m 同餘的概念。

四、認識同餘的基本性質。

五、利用同餘法尋找因數 3、4、7、8、9、11、13、25、101 的規則。

參、教學活動

活動一：同餘概念的撲克牌遊戲

步驟 1：

教師先將 52 張撲克牌，去除 2 張 A 與 2 張 K，且牌中的 J、Q、K、A，分別代表 11、12、13、1，其餘代表如牌面之數，然後將牌按被 3 除之餘 1、餘 2 與整除來分類，最後，再將每張牌依被 3 除之餘 1、餘 2 與整除的順序重複整理成一疊。(此步驟為教師預備動作，不需告訴學生。)

步驟 2：

教師請一位學生(例如：平時認真但成績不理想)上台洗牌，只允許上下切

牌，然後將撲克牌交給老師，此時，教師也在黑板寫上三列文字，如下圖所示，文字內容，可依所選之學生做變動，並請學生站立於講桌前。

(1) 我不喜歡數學
(2) 我數學非常差
(3) 我數學有潛力

步驟 3：

教師將撲克牌拿在手上，離桌面約 10 公分，緩慢落下，請勿散開，可以重複操作，並告訴此學生，可以隨時喊停，當學生喊停的時候，教師拿出桌面最上面的 3 張撲克牌，或手上最下面的 3 張撲克牌，交給學生，並將其餘的撲克牌疊於一旁。

步驟 4：

教師請學生將手中撲克牌之數，依序讀出，教師則在黑板前，依學生所讀出之數，從(1)到(3)重複連續數數，並接續數到最後 1 張牌完，此時，最後停留之位置必為「(3)我數學有潛力」。

例如：所選出的撲克牌為 7、3、8 後，當學生先讀出 7 時，教師則從(1)數到(3)，再重複(1)到(3)，最後停留在(1)的位置，接著，學生讀出 3 時，教師從接續的(2)數起，最後停留於(1)的位置，當學生再讀出 8 時，教師又從接續的(2)數起，最後停留於(3)的位置。

步驟 5：

重複步驟 3 到步驟 4，學生將得到一樣的結果，教師可以因此，給學生一些正面鼓勵的話。並告知學生，學會同餘的概念，即可瞭解老師的操作原因。

➢**隨堂練習 1**：請將 1 到 13 的正整數，依被 3 除之的餘數分成 3 類。

活動二：將整數依除以 7 的餘數來分類

步驟 6：請回答下列各問題：

(1) 23 除以 7 的商數為___餘數為___。

(2) 6 除以 7 的商數為___餘數為___。

(3) -9 除以 7 的商數為___餘數為___。

步驟 7：教師引導學生，將整數 0,±1,±2,±3,…,±n,…，依除以 7 的餘數，分類成下表：

7 的倍數	…，-21，-14，-7，	**0**	，7，14，21…
7 的倍數加 1	…，-20，-13，-6，	**1**	，8，15，22…
7 的倍數加 2	…，-19，-12，-5，	**2**	，9，16，23…
7 的倍數加 3	…，-18，-11，-4，	**3**	，10，17，24…
7 的倍數加 4	…，-17，-10，-3，	**4**	，11，18，25…
7 的倍數加 5	…，-16，-9，-2，	**5**	，12，19，26…
7 的倍數加 6	…，-15，-8，-1，	**6**	，13，20，27…

請學生盯住，正中央行的數，0，1，2，3，4，5，6，也注意觀察每一橫列上的任意兩整數相差都是 7 的倍

數，而且此兩整數被 7 除後的餘數都是相同！例如第 4 橫列中的 17、-11 其差 28 是 7 的倍數，它們被 7 除的餘數都是 3，其中 17=7×2+3，-11=7×(-2)+3。

➢**隨堂練習 2**：試檢驗上表中第 5 橫列兩整數-17，25 其差是否是 7 的倍數？它們被 7 除的餘數是否相等？

步驟 8：教師解說同餘的意思。在步驟 7 的任一橫列中，任意兩整數其差永遠是 7 的倍數，且被 7 除所得的餘數自上而下各橫列，分別為 0，1，2，3，4，5，6。換言之，各橫列的整數除以 7，都可得到相同餘數，數學上就稱同一橫列中的任意兩整數 a、b 對模 7 **同餘**，記作 $a \equiv b \pmod 7$，唸作 a、b 對模 7 同餘。例如：$-11 \equiv 17 \pmod 7$，$-17 \equiv 25 \pmod 7$；當然 9、23 對模 7 同餘；25、18 對模 7 也是同餘。

➢**隨堂練習 3**：請在下列各小題中，正確填入“O”、錯誤填入“X”。

(1) $330 \equiv 1 \pmod 7$……(　)

(2) $332 \equiv 3 \pmod 7$……(　)

(3) $334 \equiv 5 \pmod 7$……(　)

(4) $336 \equiv 6 \pmod 7$……(　)

步驟 9：將整數 a 除以 7 得到相同餘數的歸成一類，即可將步驟 7 的分類表，簡記成：

$a \equiv 0 \pmod 7$，$a \equiv 1 \pmod 7$，

$a \equiv 2 \pmod 7$，……，$a \equiv 6 \pmod 7$

步驟 10：從步驟 6 到步驟 9 的過程，我們可將整數 a 依除以 7 所得的餘數分成 7 類：

7 的倍數：$a \equiv 0 \pmod 7$

7 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod 7$

7 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod 7$

7 的倍數加 3：$a \equiv 3 \pmod 7$

7 的倍數加 4：$a \equiv 4 \pmod 7$

7 的倍數加 5：$a \equiv 5 \pmod 7$

7 的倍數加 6：$a \equiv 6 \pmod 7$

活動三：將整數依除以正整數 m 的餘數來分類

步驟 11：依活動二的分類法對 2 而言，整數 a 可分類成偶數與奇數：

偶數：$a \equiv 0 \pmod 2$

奇數：$a \equiv 1 \pmod 2$

步驟 12：依活動二的分類法對 3 而言，整數 a 可分成 3 類：

3 的倍數：$a \equiv 0 \pmod 3$

3 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod 3$

3 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod 3$

➢**隨堂練習 4**：試依活動二的分類法，將整數 a 對 5 分成 5 類。

步驟 13：對一般的正整數 m 而言，整數 a 可分成 m 類：

m 的倍數：$a \equiv 0 \pmod m$

m 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod m$

m 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod m$

……

m 的倍數加(m-1)：$a \equiv m-1 \pmod m$

其中 $a \equiv b \pmod m$，唸作 a、b 對模 m 同餘，即 a、b 除以 m 的餘數都相等或($a-b$)為 m 的倍數。且同餘的符

號「≡」是在 1801 年高斯首先使用的，不同餘就可記作「≢」，例如：

$31 \equiv 17\,(\text{mod } 2)$，$16 \not\equiv 23\,(\text{mod } 2)$

$92 \equiv 15\,(\text{mod } 7)$，$36 \not\equiv 18\,(\text{mod } 7)$

➤**隨堂練習 5**：請在下列各小題中，正確填入“O”、錯誤填入“X”。

(1) $91 \equiv 0 \pmod{13}$……( )

(2) $123 \not\equiv 35 \pmod{11}$……( )

(3) $325 \equiv 8 \pmod{3}$……( )

(4) $128 \equiv 3 \pmod{7}$……( )

活動四：認識同餘的基本性質

步驟 14：教師在活動二，引導學生觀察「對模 7 的同餘表」得出：任取兩個同餘式 $a \equiv r_1\,(\text{mod } 7)$，$b \equiv r_2\,(\text{mod } 7)$，易知：

(1) $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{7}$

(2) $ab \equiv r_1 r_2 \pmod{7}$

(3) $ka \equiv kr_1 \pmod{7}$ (其中 k 為整數)

例如：已知：$17 \equiv 3 \pmod{7}$，$12 \equiv 5 \pmod{7}$，可得：

(1) $17 + 12 \equiv 3 + 5\,(\equiv 1) \pmod{7}$

(2) $17 \times 12 \equiv 3 \times 5\,(\equiv 1) \pmod{7}$

(3) $3 \times 17 \equiv 3 \times 3\,(\equiv 2) \pmod{7}$
(此時 k=3)

(此步驟中的 r_1、r_2，是為了方便記錄，如同未知數用法，教師可做說明。)

➤**隨堂練習 6**：已知：$17 \equiv 2\,(\text{mod } 5)$，$13 \equiv 3\,(\text{mod } 5)$，試檢驗下列各式子，是否正確?

(1) $17 + 13 \equiv 2 + 3 \pmod{5}$

(2) $17 \times 13 \equiv 2 \times 3 \pmod{5}$

(3) $2 \times 17 \equiv 2 \times 2 \pmod{5}$

➤**隨堂練習 7**：已知：$28 \equiv 2 \pmod{13}$，$20 \equiv 7 \pmod{13}$，試檢驗下列各式子，是否正確？

(1) $28 + 20 \equiv 2 + 7 \pmod{13}$

(2) $28 \times 20 \equiv 2 \times 7 \pmod{13}$

(3) $5 \times 28 \equiv 5 \times 2 \pmod{13}$

步驟 15：對一般正整數 m 而言，模 m 的同餘式亦有同樣的性質。已知，$a \equiv b\,(\text{mod } m)$，$c \equiv d \pmod{m}$，則：

(1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

(2) $ac \equiv bd \pmod{m}$

(3) $ka \equiv kb \pmod{m}$ (其中 k 為整數)

(考量學生此時能力，在活動四中，只做發現後的歸納，不做論證。)

活動五：同餘概念與其基本性質在尋找因數上的應用

步驟 16：教師複習舊概念與整理前面活動重點，如下所列，以利活動五之進行

(1) 3417=3×1000+4×100+1×10+7
$=3\times10^3+4\times10^2+1\times10^1+7$

(2) $a \equiv 0\,(\text{mod } |a|)$，$a \neq 0$

(3) $a \equiv 0\,(\text{mod } 1)$

(4) 若 $a \equiv b\,(\text{mod } m)$，$c \equiv d\,(\text{mod } m)$，其中 m 為正整數，則：

① $a \pm c \equiv b \pm d\,(\text{mod } m)$，符號順取

② $ac \equiv bd\,(\text{mod } m)$

③ $ka \equiv kb\,(\text{mod } m)$ (其中 k 為整數)

特別是，若 $a^n \equiv 0\,(\text{mod } m)$，其中 m、n 為正整數，則 $a^{n+1} \equiv 0\,(\text{mod } m)$。

➤**隨堂練習 8**：已知 $10^1 \equiv 10 \pmod{25}$，

$10^2 \equiv 0 \pmod{25}$，則 10^3 、 10^{10} 對模 25，分別為多少？

步驟 17：教師說明十進位數，對模 m 的一般式。

設

$10 \equiv r_1 \pmod{m}$，

$10^2 \equiv 10 \times r_1 \equiv r_2 \pmod{m}$，…，

$10^n = 10 \times 10^{n-1} \equiv 10 \times r_{n-1} \equiv r_n \pmod{m}$

則十進位數

$$\begin{aligned} N &= a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots \\ &\quad + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \\ &= a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \ldots \\ &\quad + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_n \times 10^n \end{aligned}$$

故 $N \equiv a_0 + a_1 \times r_1 + a_2 \times r_2 + \ldots$

$$\begin{aligned} &+ a_{n-1} \times r_{n-1} + a_n \times r_n \pmod{m} \\ \equiv\ & a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots \\ &+ a_{n-1} r_{n-1} + a_n r_n \pmod{m} \end{aligned}$$

步驟 18：利用同餘法尋找因數 3 或 9。

因為

$10^1 \equiv 1$(mod 3 或 9)，

$10^2 = 10 \times 10 \equiv 1 \times 1 \equiv 1$(mod 3 或 9)，

$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 1 \times 1 \equiv 1$(mod 3 或 9)，

……

$10^n \equiv 1$(mod 3 或 9)，

所以十進位數

$N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

$\equiv a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1 + \ldots$

$+ a_{n-1} \times 1 + a_n \times 1$(mod 3 或 9)

$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

$+ a_{n-1} + a_n$ (mod 3 或 9)

故知，若 $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \equiv 0$ (mod 3 或 9)，則 3 或 9 為 N 的因數。

例如，3 或 9 是否為 7425 的因數？

(1) 因為 $5+2+4+7=18 \equiv 0 \pmod{3}$，所以 3 為 7425 的因數。

(2) 因為 $5+2+4+7=18 \equiv 0 \pmod{9}$，所以 9 為 7425 的因數。

➤**隨堂練習 9**：9 是否為 83754 的因數?

步驟 19：利用同餘法尋找因數 11。

因為

$10^1 \equiv -1 \pmod{11}$，

$10^2 = 10 \times 10 \equiv (-1) \times (-1) \equiv 1 \pmod{11}$，

$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv (-1) \times 1 \equiv -1 \pmod{11}$，

……

$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$，

所以十進位數

$$\begin{aligned} N &= a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \\ &\equiv a_0 + a_1 \times (-1) + a_2 \times 1 + a_3 \times (-1) + \ldots \\ &\quad + a_n \times (-1)^n \pmod{11} \\ &\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \\ &\quad + (-1)^n \times a_n \pmod{11} \end{aligned}$$

故知，若 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n \times a_n \equiv 0 \pmod{11}$，則 11 為 N 的因數。

例如，11 是否為 379246 的因數？

因為 $6-4+2-9+7-3=-1 \not\equiv 0 \pmod{11}$，所以 11 不為 379246 的因數。

隨堂練習 10：11 是否為 83754 的因數？

步驟 20：利用同餘法尋找因數 4 與因數 8。

(1) 尋找因數 4

因為

$10^1 \equiv 2 \pmod{4}$，

$10^2 = 10 \times 10 \equiv 2 \times 2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$，

$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 2 \times 0 \equiv 0 \pmod{4}$，⋯，

$10^n = 0 \equiv 0 \pmod 4$，$n \geqq 2$

所以十進位數

$N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

$\equiv a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 0 + \ldots + a_n \times 0 \pmod 4$

$\equiv a_0 + 2a_1 \pmod 4$

故知，若 $a_0 + 2a_1 \equiv 0 \pmod 4$ ，則 4 為 N 的因數。

例如，4 是否為 9136 的因數？

因為 $6+2\times3=12 \pmod 4$，所以 4 為 9136 的因數。

(2) 尋找因數 8

因為

$10^1 \equiv 2 \pmod 8$，

$10^2 = 10\times10 \equiv 2\times2 \equiv 4 \pmod 8$，

$10^3 = 10\times10^2 \equiv 2\times4 \equiv 8 \equiv 0 \pmod 8$

……

$10^n = 0 \pmod 8$，$n \geqq 3$

所以十進位數

$N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

$\equiv a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 4 + a_3 \times 0 + \ldots + a_n \times 0 \pmod 8$

$\equiv a_0 + 2a_1 + 4a_2 \pmod 8$

故知，若 $a_0 + 2a_1 + 4a_2 \equiv 0 \pmod 8$，則 8 為 6152 的因數。

例如，8 是否為 6152 的因數？

因為 $2+2\times5+4\times1=16 \equiv 0 \pmod 8$，所以 8 為 6152 的因數。

➢**隨堂練習 11**：4 與 8 是否為 9275316 的因數？

步驟 21：利用同餘法尋找因數 25。

因為

$10^1 \equiv 10 \pmod{25}$，

$10^2 = 10\times10 \equiv 100 \equiv 0 \pmod{25}$ ，

$10^3 = 10\times10^2 \equiv 10\times0 \equiv 0 \pmod{25}$，…，

$10^n \equiv 0 \pmod{25}$， $n \geq 2$

所以十進位數

$N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \equiv a_0 + 10a_1 \pmod{25}$

故知，若 $a_0 + 10a_1 \equiv 0 \pmod{25}$，則 25 為 N 的因數。

例如，25 是否為 8175 的因數？

因為 $5+10\times7=75 \equiv 0 \pmod{25}$，所以 25 為 8175 的因數。

➢**隨堂練習 12**:25 是否為 3792855 的因數?

步驟 22：利用同餘法尋找因數 7。

因為

$10^1 \equiv 3 \pmod 7$，

$10^2 = 10\times10 \equiv 3\times3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$

$10^3 = 10\times10^2 \equiv 3\times2 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$

$10^4 = 10\times10^3 \equiv 3\times(-1) \equiv -3 \pmod 7$

$10^5 = 10\times10^4 \equiv 3\times(-3) \equiv -9 \equiv -2 \pmod 7$

$10^6 = 10\times10^5 \equiv 3\times(-2) \equiv -6 \equiv 1 \pmod 7$

$10^7 = 10\times10^6 \equiv 3\times1 \equiv 3 \pmod 7$，

…出現循環

所以 $a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$

$\equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 \pmod 7$

(若十進位數 N 超過 7 位，則 a_n 依序再乘以 3，2，-1，-3，-2，1，…)故知，若 $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 \equiv 0 \pmod 7$，則 7 為 N 的因數。

例如，7 是否為 1527 的因數？

因為 $7+3\times2+2\times5-1=22 \not\equiv 0 \pmod 7$，所以 7 不為 1527 的因數。

➢**隨堂練習 13**：7 是否為 3724 的因數？

步驟 23：利用同餘法尋找因數 13。

因為

$10^1 \equiv -3 \pmod{13}$

$10^2 = 10\times10 \equiv (-3)\times(-3) \equiv 9 \equiv -4 \pmod{13}$

$10^3 = 10\times10^2 \equiv (-3)\times(-4) \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$10^4 = 10\times10^3 \equiv (-3)\times(-1) \equiv 3 \pmod{13}$

$10^5 = 10\times10^4 \equiv (-3)\times3 \equiv -9 \equiv 4 \pmod{13}$

$10^6 = 10\times10^5 \equiv (-3)\times4 \equiv -12 \equiv 1 \pmod{13}$

$10^7 = 10\times10^6 \equiv (-3)\times1 \equiv -3 \pmod{13}$，

…出現循環

所以 $a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$

$\equiv a_0-3a_1-4a_2-a_3+3a_4+4a_5+a_6 \pmod{13}$

(若十進位數 N 超過 7 位，則 a_n 依序再乘以−3，−4，−1，3，4，1，…)

故知，若 $a_0-3a_1-4a_2-a_3+3a_4+4a_5+a_6 \equiv 0 \pmod{13}$，則 13 為 N 的因數。

例如，13 是否為 1768 的因數？

因為 $8-3\times6-4\times7-1=-39 \equiv 0 \pmod{13}$，所以 13 為 1768 的因數。

➢**隨堂練習 14**：13 是否為 30125 的因數？

步驟 24：利用同餘尋找因數 101。

因為

$10^1 \equiv 10 \pmod{101}$

$10^2 = 100 \equiv -1 \pmod{101}$

$10^3 = 10\times10^2 \equiv 10\times(-1) \equiv -10 \pmod{101}$

$10^4 = 10\times10^3 \equiv 10\times(-10) \equiv -100 \equiv 1 \pmod{101}$

$10^5 = 10\times10^4 \equiv 10\times1 \equiv 10 \pmod{101}$，…出現循環

所以 $a_4a_3a_2a_1a_0$

$\equiv a_0+10a_1-a_2-10a_3+a_4 \pmod{101}$

(若十進位數 N 超過 5 位，則 a_n 依序再乘以 10，−1，−10，1，…)

故知，若 $a_0+10a_1-a_2-10a_3+a_4 \equiv 0 \pmod{101}$，則 101 為 N 的因數。

例如，101 是否為 8687 的因數？

因為 $7+10\times8-6-10\times8=1\not\equiv0 \pmod{101}$，所以 101 不為 8687 的因數。

➢**隨堂練習 15**：

(1) 101 是否為 37572 的因數？

(2) 37575 除以 101 的餘數為多少？

活動六：解說同餘概念的撲克牌遊戲

步驟 25：在 52 張撲克牌中，將牌依被 3 除之餘 1、餘 2 與整除的分類，其張數分別為 20、16 與 16 張，故去除 2 張 A 與 2 張 K，即被 3 除之餘 1 的 4 張牌之後，則此 3 類撲克牌的張數都相同(16 張)。

步驟 26：教師將每張牌依被 3 除之餘 1、餘 2 與整除的順序重複整理成一疊時，也請一位學生上台洗牌，只允許上下切牌，此時撲克牌的內容，仍會保持一定的規律，…，被 3 除之餘 1、被 3 除之餘 2 與被 3 除之整除，…，故當學生喊停的時候，教師拿出桌面最上面的 3 張撲克牌，或手上最下面的 3 張撲克牌，此 3 張撲克牌必為：「被 3 除之餘 1、餘 2 與整除的各一張。」，因此，所取出的 3 張牌總和，除以 3 必整除，即教師數完數的位置，將停於第三列。

活動七：作業

1. 試用同餘法判定 3002 能否被 4 整除。
2. 試用同餘法判定 1089 能否被 9 整除。
3. 試用同餘法判定 1859 能否被 11 整除。
4. 試用同餘法判定 12901 能否被 7 整除。
5. 試用同餘法判定 2431 能否被 13 整除。
6. 試用同餘法判定 8888 能否被 101 整除。
7. 在活動一的撲克牌遊戲中，若老師將撲克牌按被 4 除之餘 1、2、3 與整除來分類，過程如活動一，且此時教師在黑板上，已寫了四列文字，當學生喊停的時候，老師拿出 4 張撲克牌給學生，如同活動一的情形，則學生讀完最後 1 張撲克牌時，教師數完數的位置，會停留於第一列或第二列或第三列或第四列？

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：

被 3 除之餘 1	1、4、7、10、13
被 3 除之餘 2	2、5、8、11
被 3 整除	3、6、9、12

活動二：

步驟 6：(1) 3、2　(2) 0、6 (3) −2、5。($0\le$ 餘數<除數)

隨堂練習 2：

(1) 是。因為 $(25-(-17))\div7=42\div7=6$。

(2) 是。因為餘數都是 4。

隨堂練習 3：(1) O (2) O (3) O (4) X。

活動三：

隨堂練習 4：

5 的倍數：$a\equiv0 \pmod 5$

5 的倍數加 1：$a\equiv1 \pmod 5$

5 的倍數加 2：$a\equiv2 \pmod 5$

5 的倍數加 3：$a\equiv3 \pmod 5$

5 的倍數加 4：$a\equiv4 \pmod 5$

隨堂練習 5：(1) O (2) X (3) X (4) X　。

活動四：

隨堂練習 6：(1)正確(2)正確(3)正確。

隨堂練習 7：(1)正確(2)正確(3)正確　。

活動五：

隨堂練習 8：

(1) 因為 $10^2\equiv0 \pmod{25}$，所以 $10^3=10\times10^2\equiv10\times0\equiv0 \pmod{25}$

(2) $10^{10}\equiv0 \pmod{25}$

隨堂練習 9：因為 $4+5+7+3+8=27\equiv0 \pmod 9$，所以 9 為 83754 的因數。

隨堂練習 10：因為 $4-5+7-3+8=11\equiv0 \pmod{11}$，所以 11 為 83754 的因數。

隨堂練習 11：

(1) 因為 $6+2\times1=8\equiv0 \pmod 4$，所以 4 為 9275316 的因數。

(2) 因為 $6+2\times1+4\times3=20\not\equiv0 \pmod 8$，所以 8 不為 9275316 的因數。

隨堂練習 12：因為 $5+10\times5=55\not\equiv0 \pmod{25}$，所以 25 不為 3792855 的因數。

隨堂練習 13：因為 $4+3\times2+2\times7-3=21\equiv0 \pmod 7$，所以 7 為 3724 的因數。

隨堂練習 14：因為 $5-3\times2-4\times1-0+3\times3=4\not\equiv0 \pmod{13}$，所以 13 不為 30125 的因數。

隨堂練習 15：

(1) 因為 $2+10\times7-5-10\times7+3\equiv0 \pmod{101}$，所以 101 為 37572 的因數。

(2) 餘數為 3。

活動七：

1. 因為 $10^1\equiv2 \pmod 4$，
$10^2\equiv2\times2\equiv4\equiv0 \pmod 4$，
所以 $3002\equiv2+2\times0\equiv2\not\equiv0 \pmod 4$，
故 3002 不能被 4 整除。

2. 因為 $10^1\equiv1 \pmod 9$，
$10^2\equiv1\times1\equiv1 \pmod 9$，
$10^3\equiv1\times1\equiv1 \pmod 9$，
所以 $1089\equiv9+8+0+1\equiv18\equiv0 \pmod 9$，
故 1089 能被 9 整除。

3. 因為 $10^1\equiv-1 \pmod{11}$，
$10^2\equiv(-1)\times(-1)\equiv1 \pmod{11}$，
$10^3\equiv(-1)\times1\equiv-1 \pmod{11}$，
所以 $1859\equiv9-5+8-1\equiv11\equiv0 \pmod{11}$
故 1859 能被 11 整除。

4. 因為 $10^1\equiv3 \pmod 7$，
$10^2\equiv3\times3\equiv9\equiv2 \pmod 7$，
$10^3\equiv3\times2\equiv6\equiv-1 \pmod 7$，
$10^4\equiv3\times(-1)\equiv-3 \pmod 7$，
所以 $12901\equiv1+3\times0+2\times9-2-3\times1\equiv14\equiv0 \pmod 7$，故 12901 能被 7 整除。

5. 因為 $10^1\equiv-3 \pmod{13}$，
$10^2\equiv(-3)\times(-3)\equiv9\equiv-4 \pmod{13}$，
$10^3\equiv(-3)\times(-4)\equiv12\equiv-1 \pmod{13}$，
所以 $2431\equiv1-3\times3-4\times4-2\equiv-26\equiv0 \pmod{13}$，故 2431 能被 13 整除。

6. 因為 $10^1\equiv10 \pmod{101}$，
$10^2\equiv100\equiv-1 \pmod{101}$，
$10^3\equiv10\times(-1)\equiv-10 \pmod{101}$，
所以 $8888\equiv8+10\times8-8-10\times8\equiv0 \pmod{101}$，故 8888 能被 101 整除。

7. 因為教師拿出的 4 張撲克牌，分別為被 4 除之餘數為 1、2、3 與整除，所以此 4 張撲克牌的總和之餘數，必定為 2，故教師數完數後的最後位置，將停於第二列。

肆、結語

對目前國中學生而言，利用同餘法處理因、倍數的問題，雖然是新的嘗試，但此概念，除了幫助學生用不同角度，再次思考 2，3、4、5、9 為因數的方法，也解說了利用分堆方式，較不容易處理的 7、11、13 等為因數之情形，增加學生知識之廣度。然而，令我們驚訝的是，同餘的概念，不知不覺地影響他們以後的學習，也是我們意料外的事。例如：任何整數的平方，被 4 除之其餘數必為 1 或整除，學生可以利用 mod 4 來說明。

進行此單元教學時，請勿流於口訣背誦，而忽略本單元內容之瞭解，否則學生無法利用同餘法，繼續尋找其它因數。記得，早期在教學現場，曾經問國中新生一個問題：如何判斷一個整數有 2 為因數？學生答：此數的末位數字為 0、2、4、6、8。為了教學，繼續追問：如何判斷一個整數有 3 為因數？此學生竟然答：此數的末位數字為 0、3、6、9。害我哭笑不得，應該是概念不明瞭，而產生的「創意」答案吧！

總之，在高中才可能出現的同餘法，此時，利用其基本概念與性質，在國中階段的學生，卻可方便尋找整數的因數，教師應不拘泥於時機，只要學生能接受，都可利用時間，增進學生探索與認識新知的機會。

伍、參考文獻

李政憲、曹博盛、陳昭地(2013)。巧尋質因數(一)、(二)，國民中學數學教材原型 A 冊第 2-2、2-3 單元主題。新北市：國家教育研究院。

蘇進發、陳昭地(2013)。同餘法找因數，國民中學數學教材原型 A 冊附錄。新北市：國家教育研究院。

林壽福、吳如皓(2009)，數學魔術：27 個數學概念奇蹟。臺北市：尖端出版社。