免死金牌變因下之約瑟夫問題初探

林佳言 鄒佳築 蘇柏奇*

苗栗縣立興華高級中學

約瑟夫問題是以一世紀歷史學家 Flavius Josrphus 為名的古老問題的變形，相傳在猶太-羅馬戰爭時，Josrphus 與其它 40 名同伴被圍困，由於這些人不願意成為俘虜，因此他們決定自殺，這 41 人圍成一個圓圈，按順時針方向進行，每隔一人就自殺一個直到所有人都死光為止。然而 Josrphus 與另一位朋友不願意自殺，而 Josrphus 藉由算出最後兩個自殺的位置而使兩人逃過一劫。

本文探討加入『讓其中一個人有一片免死金牌』之變因的約瑟夫問題，假設編號 1 到 x 的 x 個人圍成一圈，由第 1 個人開始，依順時針方向，以【殺掉、保留】、【殺掉、保留】、....的方式自殺，直到只剩一人，但其中第 y 個人有一片免死金牌（可免死一次），將最後存活下來之人的編號記為 $J(x,y)$。

我們以土法煉鋼的方式，做出 $y \leqq x \leqq 20$ 的表格如下。以有 10 個人，第 3 個人有一片免死金牌為例，我們得到最後留下的是第 6 個人，即 $J(10,3)=6$。

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1																			
2	2	2																		
3	1	2	2																	
4	2	4	3	4																
5	4	2	4	2	5															
6	6	2	6	4	6	4														
7	1	6	2	4	2	6	2													
8	2	4	3	8	4	6	4	8												
9	4	2	4	6	5	2	6	8	6											
10	6	8	6	4	6	8	7	4	8	10										
11	8	2	8	10	8	6	8	10	9	6	10									
12	10	12	10	4	10	12	10	8	10	12	11	8								
13	12	10	12	2	12	6	12	2	12	10	12	2	13							
14	14	2	14	12	14	4	14	8	14	4	14	12	14	4						
15	1	6	2	4	2	14	2	6	2	10	2	10	16	14	2					
16	2	4	3	8	4	6	4	16	4	8	4	4	4	8	4	16				
17	4	2	4	6	5	10	6	8	6	2	6	10	6	14	6	10	6			
18	6	8	6	4	6	8	7	12	8	10	8	4	8	12	8	16	8	12		
19	8	14	8	10	8	6	8	10	9	14	10	12	10	6	10	14	10	18	10	
20	10	12	10	16	10	12	10	8	10	8	11	16	12	14	12	8	12	16	12	20

*為本文通訊作者

初步發現當其中一人有免死金牌時，存活的位置是有規律可循的，事實上它們相當有規律，根據這些規律，我們發展了一套計算存活位置的公式。

壹、$J(x,y)$ 之規律探索

以下依序探討 y=1,y=2 及 y≧3 的之 $J(x,y)$。

一、$J(x,1)$

我們關注 y=1 的情況，將 y=1 的存活位置列表如下：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$J(x,1)$	1	2	1	2	4	6	1	2	4	6	8	10	12	14

我們發現存活位置 $J(x,1)$有以下規律：

1. 順序是 1→2；1→2→4→6；1→2→4→6→8…
2. 如果 J(x,1) >x，則又會重新開始。

   例如：由 J(6,1)=6，依規律得 J(7,1)=8，但 J(7,1)=8>7，故修正為 J(7,1)=1。

我們將分兩種情況討論 $J(x,1)$：

1. 何時 $J(x,1)$=1：

   僅列出 $J(x,1)$=1 的情形如下，不難看出當 $x=2^k-1$ 時，$J(x,1)$=1。

x	1	3	7	15	31
$J(x,1)$	1	1	1	1	1

2. 何時 $J(x,1)$=1：

   僅列出 $J(x,1)$≠1 的情形如下，從中觀察到首項為 2、公差為 2 的等差數列。

   根據這樣的規律，我們假設當 $x=2^k+t$ (t≧0)時，則 $J(x,1)=2+2t$。

x	2						
$J(x,1)$	2						
x	4	5	6				
$J(x,1)$	2	4	6				
x	8	9	10	11	12	13	14
$J(x,1)$	2	4	6	8	10	12	14

二、$J(x, 2)$

我們將 y=2 的存活位置列表如下。

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$J(x,2)$	2	2	4	2	2	6	4	2	8	2	12	10	2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$J(x,2)$	6	4	2	8	14	12	2	16	22	20	18	24	2
x	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$J(x,2)$	28	10	2	6	4	2	8	14	12	26	16	22	20

乍看之下，上表毫無規律可言，但經過不斷的嘗試，我們發現若將 x 適當分類，則 $J(x,2)$存在規律，以下將逐步討論。

1. $x=2n$

首先，若將 x 分為 $2n$、$2n+1$ 兩類，列出 $x=2n$ 之 $J(x,2)$如下表，不難看出其與 $J(x,1)$之相似處。

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$J(x,2)$	2	4	2	4	8	12	2	4	8	12	16	20	24	28	2	4	8	12

僅列出 $J(x,2)=2$ 的情形如下，得：當 $x=2^k-2$ 時，$J(x,2)=2$。

x	2	6	14	30
$J(x,2)$	2	2	2	2

僅列出 $J(x,2)\neq 2$ 的情形如下，從中觀察到首項為 4、公差為 4 的等差數列。根據這樣的規律，得：當 $x=2^k+2t$ ($t\geqq 0$)時，則 $J(x,2)=4+4t$。

x	4						
$J(x,2)$	4						
x	8	10	12				
$J(x,2)$	4	8	12				
x	16	18	20	22	24	26	28
$J(x,2)$	4	8	12	16	20	24	28

2. $x=4n+3$

承上段，將尚未討論的 $2n+1$ 分為 $4n+1$、$4n+3$ 兩類，列出 $x=4n+3$ 之 $J(x,2)$如下表，類似的規律再度浮現。

x	3	7	11	15	19	23	27	31	35
$J(x,2)$	2	6	2	6	14	22	2	6	14

僅列出 $J(x,2)=2$ 的情形如下，得：當 $x=2^k-5$ 時，$J(x,2)=2$。

x	3	11	27
$J(x,2)$	2	2	2

僅列出 $J(x,2)\neq 2$ 的情形如下，從中觀察到首項為 6、公差為 8 的等差數列。根據這樣的規律，得：當 $x=2^k-5+4t$ ($t\geqq 1$)時，則 $J(x,2)=6+8(t-1)$。

x	7						
$J(x,2)$	6						
x	15	19	23				
$J(x,2)$	6	14	22				
x	31	35	39	43	47	51	55
$J(x,2)$	6	14	22	30	38	46	54

3. $x=8n+5$

再承上段，將尚未討論的 $4n+1$ 分為 $8n+1$、$8n+5$ 兩類，列出 $x=8n+5$ 之 $J(x,2)$如下表，類似的規律再度浮現。

x	5	13	21	29	37	45	53	61	69
$J(x,2)$	2	10	2	10	26	42	2	10	26

僅列出 $J(x,2)=2$ 的情形如下，得：當 $x=2^k-11$ 時，$J(x,2)=2$。

x	5	21	53
$J(x,2)$	2	2	2

僅列出 $J(x,2)\neq 2$ 的情形如下，從中觀察到首項為 10、公差為 16 的等差數列。根據這樣的規律，得：當 $x=2^k-11+8t$($t\geqq 1$)時，則 $J(x,2)=10+16(t-1)$。

x	13				
J(x,2)	10				
x	29	37	45		
J(x,2)	10	26	42		
x	61	69	77	85	93
J(x,2)	10	26	42	58	74

4. x=An+B(A=2^h=2B−2)

我們在把數字分類時，發現一個現象，就是：$2^h n+1$ 的數分成 $2^{h+1}n+1$ 和 $2^{h+1}n+2^h+1$ 兩類(如：$2n+1$ 分為 $4n+1$、$4n+3$ 兩類；$4n+1$ 分為 $8n+1$、$8n+5$ 兩類...)。其中，$2^{h+1}n+2^h+1$ 這一類，藉由分成 $J(x,2)=2$ 和 $J(x,2)\neq 2$ 兩種情形而得到 $J(x,2)$ 之值；而 $2^{h+1}n+1$ 這類，則又再度分成 $2^{h+2}n+1$ 和 $2^{h+2}n+2^{h+1}+1$ 兩類，此時，其中一類可得 $J(x,2)$之值，而另一類則又再區分為兩類，形成一個無止盡的分類。

當 $x=2^{h+1}n+2^h+1$ 時，可得 $J(x,2)$之值，若將此類簡化為 x=An+B，其中 A=2^h，h 為整數且滿足 A=2B−2。以下列出 A=2^h (h=4~8)的 $J(x,2)$值。

16*n*+9	x	9	25	41	57	73	89	105	121
	$J(x,2)$	2	18	2	18	50	82	2	18
32*n*+17	x	17	49	81	113	145	177	209	241
	$J(x,2)$	2	34	2	34	98	162	2	34
64*n*+33	x	33	97	161	225	289	353	417	481
	$J(x,2)$	2	66	2	66	194	322	2	66
128*n*+65	x	65	193	321	449	577	705	833	961
	$J(x,2)$	2	130	2	130	386	642	2	130
256*n*+129	x	129	385	641	897	1153	1409	1665	1921
	$J(x,2)$	2	258	2	258	770	1282	2	258

將 A=2^h (h=1~8)的 $J(x,2)$之算式列表如下。並藉此規律推導出 x=An+B 之 $J(x,2)$ 算式。

分類	$J(x,2)=2$	$J(x,2)\neq 2$
2*n*+2	$x=2^k-2$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-2+2t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=4+4(t-1)$
4*n*+3	$x=2^k-5$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-5+4t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=6+8(t-1)$
8*n*+5	$x=2^k-11$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-11+8t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=10+16(t-1)$
16*n*+9	$x=2^k-23$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-23+16t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=18+32(t-1)$
32*n*+17	$x=2^k-47$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-47+32t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=34+64(t-1)$
64*n*+33	$x=2^k-95$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-95+64t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=66+128(t-1)$
128*n*+65	$x=2^k-191$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-191+128t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=130+256(t-1)$
256*n*+129	$x=2^k-383$ 時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-383+256t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=258+512(t-1)$
A*n*+B	$x=2^k-(\mathrm{A}+\mathrm{B}-2)$時，則 $J(x,2)=2$	$x=2^k-(\mathrm{A}+\mathrm{B}-2)+\mathrm{A}t(t\geqq 1)$時，則 $J(x,2)=(\mathrm{A}+2)+2\mathrm{A}(t-1)$

我們進一步化簡上表中的最 x=An+B 之 $J(x,2)\neq 2$ 的式子如下：

當 x= An+B (A、B 滿足 A=2B−2)，由 $x=2^k-(A+B-2)+At$，得 $At=x-2^k+A+B-2$，

將 At 代入 $J(x,2)=(A+2)+2A(t-1)$，化簡得 $J(x,2)=2B-2+A+2x-2^{k+1}$，

再將 2B=A+2 代入前式，化簡得 $J(x,2)=2A+2x-2^{k+1}$。

經由一番嘗試，我們得知：需先判別 x 屬於哪一個分類，再經由其分類之規律，即可求得 $J(x,2)$。我們發展了以下作法。

項次	作法
步驟 1	求 A、B 滿足 $x=An+B$, $A=2^k=2B-2$
步驟 2	取 2^T 滿足 $2^T>x$ 且 $2^T>A+B-2$
步驟 3	若 $x=2^T-(A+B-2)$，則 $J(x,2)=2$
步驟 4	若 $x\neq 2^T-(A+B-2)$，取 2^{Q+1} 滿足 $2^{Q-1}<x<2^Q$ 則 $J(x,2)=2x+2A-2^{Q+1}$， 但若 $J(x,2)=2x+2A-2^{Q+1}<0$，則 $J(x,2)=2x+2A-2^Q$

舉例說明如下：

(1) 求 $J(81,2)$=?

$81=2\times40+1=2^2\times20+1=2^3\times5+1=2^4\times5+1=2^5\times2+17$。

其中，取 $A=2^5$、B=17 滿足 A=2B−2。取 $2^T=2^7$ 滿足 $2^T>81$ 且 $2^T>32+17-2$。

因為 x=81、$2^T=2^7$、$A=2^5$、B=17 滿足 $x=2^T-(A+B-2)$，故得 $J(81,2)=2$。

(2) 求 $J(57,2)$=?

$57=2\times28+1=2^2\times16+1=2^3\times7+1=2^4\times3+9$。

其中，取 $A=2^4$、B=9 滿足 A=2B−2。取 $2^T=2^6$ 滿足 $2^T>57$ 且 $2^T>16+9-2$。

因為 x=57、$2^T=2^6$、$A=2^4$、B=9 不滿足 $x=2^T-(A+B-2)$，取 $2^{Q+1}=2^7$ 滿足 $2^{Q-1}<57<2^Q$。故得 $J(57,2)=2\times57+2\times2^4-2^7=18$。

(3) 求 $J(145,2)$=?

$145=2\times72+1=2^2\times36+1=2^3\times18+1=2^4\times9+1=2^5\times4+17$。

其中，取 $A=2^5$、B=17 滿足 A=2B−2。取 $2^T=2^8$ 滿足 $2^T>145$ 且 $2^T>32+17-2$。

因為 x=145、$2^T=2^8$、$A=2^5$、B=17 不滿足 $x=2^T-(A+B-2)$，取 $2^{Q+1}=2^9$ 滿足 $2^{Q-1}<145<2^Q$，可是 $2\times145+2\times2^5-2^9<0$，故得 $J(145,2)=2\times145+2\times2^5-2^8=98$。

三、$J(x,y)$, $y\geqq 3$

我們關注 $y\geqq 3$ 的情況，我們發現 $J(x,y)$和 $J(x+1,y+2)$有關，我們得到 $J(x+1,y+2)=J(x,y)+2$（如下圖左），然而，若 $J(x+1,y+2)=J(x,y)+2>x$，則應須修正為：$J(x+1,y+2)=2$（如下圖右）。

我們可以進一步得到 $J(x,y)=J(x-t,y-2t)+2t$ (t 為整數)。

x \ y	1	2	3
31	1	6	2
32	2	4	3
33	4	2	4

x \ y	1	2	3	4	5	6
8	2	4	3	8	4	6
9	4	2	4	6	5	2

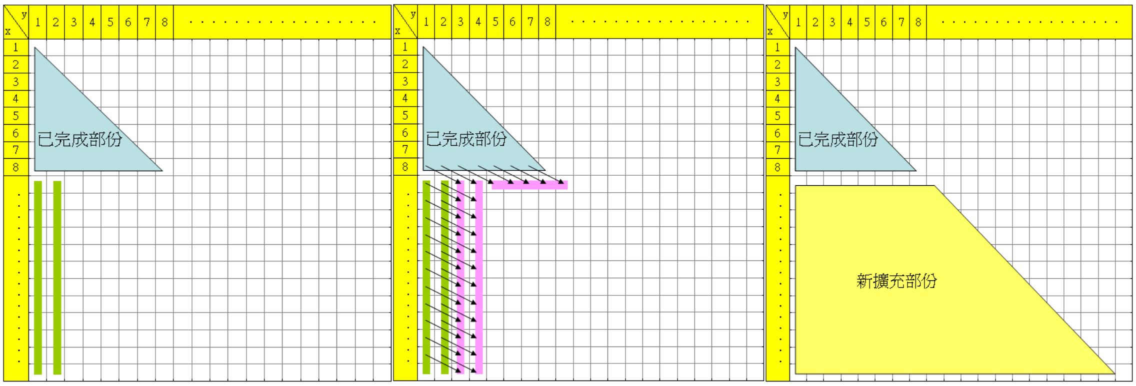
貳、規律的推廣運用

根據上述規律的探索，我們發展一套擴張表格的方法如下：

步驟 1. 依照 $y=1$、$y=2$ 的規律填入，如下圖左。

步驟 2. 依照 $y\geqq 3$ 的規律，將已完成部分往下推算，如下圖中。

步驟 3. 重複步驟 2，完成表格擴張，如下圖右。



另外，我們也發展了一套計算 $J(x,y)$，$y\geqq 3$ 的方法，需將 y 區分為奇數、偶數。分述如下：

一、y 是偶數

當 y 是偶數時，可用 $J(x,2)$來推算 $J(x,y)$，我們歸納出：$J(x,y)=J(x-\frac{y}{2}+1,2)+y-2$，但若 $J(x,y)>x$ 時，上式修正為：$J(x,y)=2\times[J(x-\frac{y}{2}+1,2)+y-2]-2x$。以求 $J(17,14)$為例計算如下：

由 $J(x,y)=J(x-\frac{y}{2}+1,2)+y-2$，得 $J(17,14)=J(11,2)+14-2$。再利用 $J(x,2)$的算式，得 $J(11,2)=2$，故得 $J(17,14)=J(11,2)+14-2=14$。

二、y 是奇數

當 y 是奇數時，可用 $J(x,1)$來推算 $J(x,y)$，我們歸納出：$J(x,y)= J(x-\frac{y-1}{2},1)+y-1$，但若 $J(x,y)>x$ 時，上式修正為：$J(x,y)=2\times〔J(x-\frac{y-1}{2},1)+y-1〕-2x$。以 $J(19,7)$為例計算如下：

由 $J(x,y)=J(x-\frac{y-1}{2},1)+y-1$，得 $J(19,7)=J(17,1)+7-1$。再利用 $J(x,1)$的算式，得 $J(17,1)=4$，故得 $J(19,7)=J(17,1)+7-1=10$。

參、VB 程式的設計

在探索 $J(x,2)$的過程中，我們藉由 VB 程式的輔助來求 x 相當大的 $J(x,2)$，本段將說明程式設計的想法。

一開始，由使用者輸入總數（即變數 x）及擁有免死金牌的元素（即變數 y）。接著，令陣列 AA(i)=i, i=1,2,…,x。當陣列中的元素值為−1 時，則表示此元素已被殺，反之，則表示此元素仍被保留。其代表意義如下圖所示。

AA(1)	AA(2)	AA(3)	AA(4)	AA(5)	AA(6)	AA(7)	AA(8)	AA(9)	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

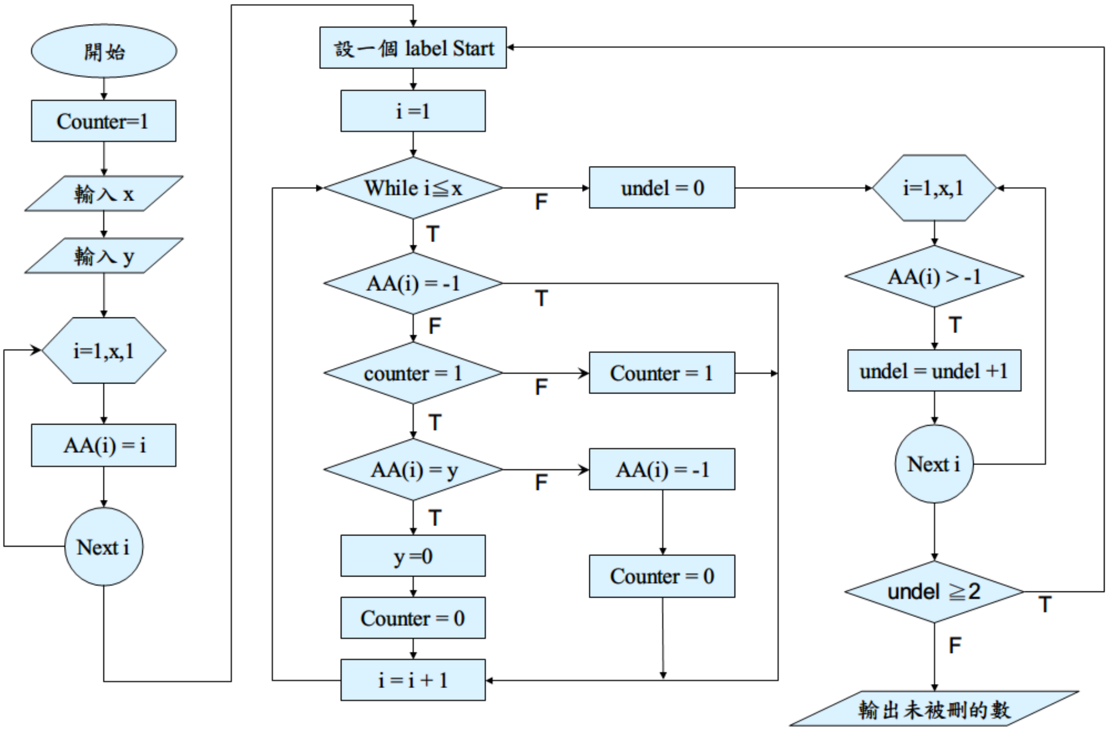
接下來探討何時此元素會被殺呢？首先，我們設定一個 counter 變數，counter 的值決定「殺或留」，分述如下：

1. 當 counter=1 表示此元素當下應該被殺，但在被殺前，程式會先令 counter=0，表示此元素已檢查過，然後再檢查免死金牌變數 y 的值是否為此元素，若是（即 y=AA(i)），則取消此元素的免死金牌（即令 y=0），保留此元素的值；反之（即 $y\neq$AA(i)），將此陣列元素的值改為-1（即 AA(i)=-1），表示此元素已被殺。
2. 當 counter=0 表示此元素當下應該被保留，程式會令 counter=1，表示此元素已檢查過。

每進行完一輪殺或留的迴圈後，程式會檢查陣列中尚未被殺的元素個數（即變數 undel）。若 undel≧2，則回到設定的 label start，再次進入殺或留的迴圈；若 undel=1，表示僅剩一個編號，則輸出此編號。程式的流程圖如下，程式碼如附錄。

肆、結語

我們找出殺一留一時 y=1、2 的規律和算式，並藉由遞迴關係很快地算出 $J(x,y)$的值，後續若能有殺 α 留一，或殺一留 β，進而推算出殺 α 留 β 的規律和算式，則狀況應該會更完整、有趣。若有機會，我們會繼續補上這個缺口，使得這個大圓，顯得更加完整。



參考資料

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik 原著,賴飛羆譯,“具體數　學”,東華書局, 1990.

附錄：*J*(*x*,*y*)之 VB 程式碼

```
Dim AA(100000) As Integer '最多 100000 個數
Dim x As Integer
Dim y As Integer  '領有免死金牌一次者
Dim undel As Integer  '尚留存的個數
Dim Counter As Integer
Private Sub Command1_Click()
Counter = 1 '當為 1 時，被留到的數才會被刪除
x = InputBox("請輸入人數")
y = InputBox("請輸入有免死金牌的數")
For i = 1 To x
AA(i) = i
Next i
Start:
i = 1
While i <= x
If AA(i) = -1 Then
Else
If Counter = 1 Then
If AA(i) = y Then
y = 0
Counter = 0
Else
AA(i) = -1
Counter = 0
End If
Else
Counter = 1
End If
End If
i = i + 1
Wend
'檢查剩於個數
undel = 0
For i = 1 To x
If AA(i) <> -1 Then undel = undel + 1
Next i
If undel >= 2 Then GoTo Start
Print
For i = 1 To x
If AA(i) > -1 Then Print AA(i);
Next i
Print
End Sub
```