中學生通訊解題第八十四期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8401

找出所有的有序正整數序對 $(x\,,\,y)$，使得其和 $x+y$，其差 $x-y$，其積 xy，其商 $\dfrac{x}{y}$ 等四項總和為 735。

參考解答：(90, 6)

由上述已知條件可得

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=735$$

$$\Rightarrow 2x+xy+\frac{x}{y}=735$$

$$\frac{x}{y}(2y+y^2+1)=735 \Rightarrow \frac{x}{y}(y+1)^2=15\times 7^2$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{x}{y}=15 \\ y+1=7 \end{cases} \quad \therefore y=6, x=90 \qquad \therefore (x,y)=(90,6)$$

解題評註：

此題屬於代數數論簡易計算題。大多數的同學，採用已知條件化簡，並利用因倍數整數性質歸納出最後的解答。除此之外，觀察此題徵答結果，在書寫品質上均有明顯的進步，值得肯定。

問題編號
8402

設直角△ABC 的三邊長分別為 a, b, c，且 $a<b<c$。若 $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{a}{c+b}=\dfrac{1}{6}$，則 $a：b：c=$ __________。

參考解答：3：4：5

【方法 1】

因為 $c^2-a^2=b^2$，$c^2-b^2=a^2$，所以

$$\frac{1}{6}=\frac{b}{c+a}-\frac{a}{c+b}=\frac{b(c-a)}{c^2-a^2}-\frac{a(c-b)}{c^2-b^2}$$

$$=\frac{c-a}{b}-\frac{c-b}{a}=\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}$$

$$=\frac{-(a-b)-(a+b-c)}{ab}$$

又 $ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$

$$=\frac{(a+b)^2-c^2}{2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}\text{，}$$

所以 $\dfrac{1}{6}=\dfrac{-2(a-b)}{a+b+c}$，

即 $13a-11b=-c\ldots(*)$。

兩邊平方得

$169a^2-286ab+121b^2=c^2=a^2+b^2$。

整理得 $(4a-3b)(21a-20b)=0$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{20}{21}$ 。

又$a<b<c$，且$3^2+4^2=5^2$，$20^2+21^2=29^2$，故 $a：b：c = 3：4：5$ 或 $20：21：29$，但 $a：b：c = 20：21：29$ 代入(*)式不合，故 $a：b：c = 3：4：5$。

【方法 2】

(1) 設三邊長$a = m^2－n^2$，$b = 2mn$，$c = m^2 + n^2$，其中$m>n$

代入 $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{a}{c+b}=\dfrac{1}{6}$ 可得

$$\frac{2mn}{2m^2}-\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{n}{m}-\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow 7m^2－11mn－6n^2=0$

$\Rightarrow (m－2n)(7m+3n)=0$

$\Rightarrow m=2n$或$7m=－3n$(不合)

$\Rightarrow m=2n$，可得$a：b：c = 3：4：5$。

(2) 設三邊長$a=2mn$，$b=m^2－n^2$，$c=m^2+n^2$，其中$m>n$

代入 $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{a}{c+b}=\dfrac{1}{6}$ 可得

$$\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}-\frac{2mn}{2m^2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{n}{m}-\frac{m-n}{m+n}=-\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow 5m^2－13mn－6n^2 =0$

$\Rightarrow (5m+2n)\ (m－3n) = 0$

$\Rightarrow m=3n$或$5m=－2n$(不合)

$\Rightarrow m=3n$，可得$a：b：c = 3：4：5$。

【解題重點】

方法1：重點在活用畢氏定理及因式分解，求出$a：b：c$ 的值。

方法 2：重點在令 $a=m^2－n^2$，$b = 2mn$，$c=m^2 + n^2$ 或 $a=2mn$，$b=m^2－n^2$，$c = m^2 + n^2$ 及因式分解，求出 $a：b：c$ 的值。

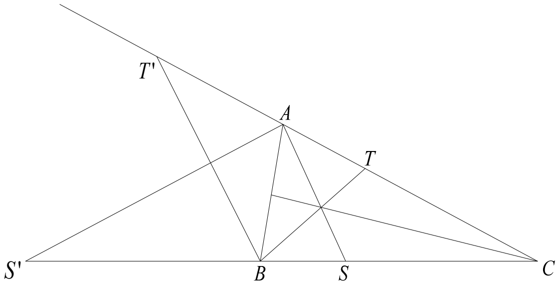
解題評註：

參與本題徵答的同學大部分都有抓到解題重點。可惜部分同學有些錯誤，例如：未驗算 $a：b：c = 20：21：29$ 不合。方程式整理後未用因式分解求關係式，只代值討論整數解。

問題編號 8403

在ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別是 a、b、c，且 $a > b > c$，若 $\overline{AS}$ 、 $\overline{AS'}$ 為 $\angle A$ 的內角平分線和外角平分線，S, S' 分別為 $\overline{AS}$ 、 $\overline{AS'}$ 和 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BC}$ 延長線的交點。$\overline{BT}$ 、 $\overline{BT'}$ 為$\angle B$ 的內角平分線和外角平分線，T, T' 分別為 $\overline{BT}$ 、$\overline{BT'}$ 和 $\overline{AC}$ 、$\overline{AC}$ 延長線的交點。$\overline{CU}$ 、 $\overline{CU'}$ 為$\angle C$ 的內角平分線和外角平分線，U, U' 分別為 $\overline{CU}$ 、 $\overline{CU'}$ 和 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AB}$ 延長線的交點。(圖中未畫出 $\overline{CU}$ 、 $\overline{CU'}$)

求證：$\dfrac{1}{\overline{SS'}}+\dfrac{1}{\overline{UU'}}=\dfrac{1}{\overline{TT'}}$ 。



參考解答：

$\because$ $\overline{AS}$ 、 $\overline{AS'}$ 為$\angle A$的內角平分線和外角平分線， $\overline{BT}$ 、 $\overline{BT'}$ 為$\angle B$的內角平分線和外角平分線

$$\therefore \frac{\overline{CS}}{\overline{SB}}=\frac{b}{c}=\frac{\overline{CS'}}{\overline{S'B}} \Rightarrow \frac{\overline{CS}}{\overline{BC}}=\frac{b}{b+c}，\frac{\overline{CS'}}{\overline{BC}}=\frac{b}{b-c}$$

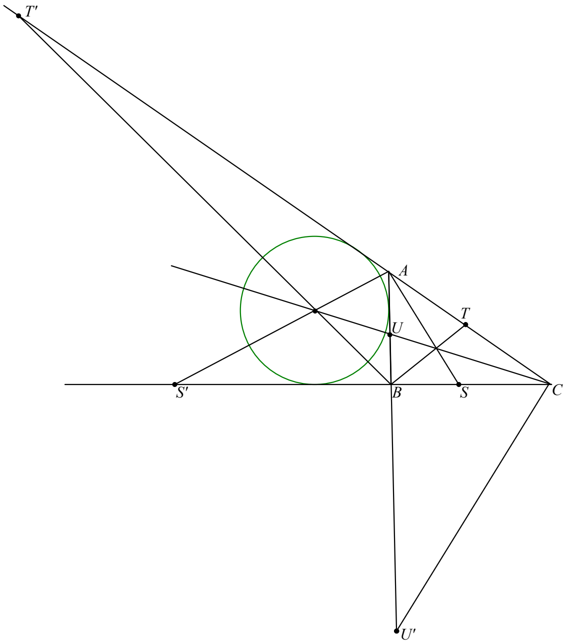
$$\therefore \overline{CS}=\frac{ab}{b+c}，\overline{CS'}=\frac{ab}{b-c}，$$

$$\overline{SS'}=\frac{ab}{b-c}-\frac{ab}{b+c}=\frac{2abc}{b^2-c^2}$$

同理可得 $\overline{TT'}=\dfrac{2abc}{a^2-c^2}$ ，$\overline{UU'}=\dfrac{2abc}{a^2-b^2}$ ，

$$\therefore \frac{1}{\overline{SS'}}+\frac{1}{\overline{UU'}}=\frac{(b^2-c^2)+(a^2-b^2)}{2abc}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2abc}=\frac{1}{\overline{TT'}}\text{。}$$



解題重點：

本題我們提供的解法是量化的幾何方法，利用內角平分線和外角平分線性質，算出各線段的長度即可解決。利用非量化的幾何方法也可解本題，有興趣的同學不妨試試。

問題編號
8404

將 1,2,3,…,2010 這 2010 個數任意分成兩組，每組 1005 個，將第一組由大到小排列(記為 $a_1>a_2>a3>....>a_{1005}$)，另一組由小到大排列(記為 $b_1>b_2>b3>....>b_{1005}$)，試求 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+....+|a_{1005}-b_{1005}|$ 的值。

參考解答：1010025

任何一個絕對值中，較大的數必大於 1005，較小的數必不大於 1005

(1) 若有 $a_k>1005$, $b_k>1005$ ，則 $a_1,a_2,...,a_{k-1},a_k,b_k,b_{k+1},...,b_{1004},b_{1005}$ 這 1006 個數均大於 1005，但只有 1005 個數大於 1005，矛盾故任何一個絕對值中，較小的數必不大於 1005

(2) 同理，可證明任何一個絕對值中，較大的數必大於 1005 於 $|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,....,|a_{1005}-b_{1005}|$ 中的較小數為 1~1005，較大的數 1006~2010，故原式之值為為 $(1+2+...+2010)-(1+2+...+1005)$ = 1010025。

解題重點：

有些同學解法是利用 n =1, 2 得到的結果去推一般 n 的結果，這是一種數學歸納的想法，但歸納的結果必須透過證明才能保

證。另外，也有同學在理解題意上，可能有所誤會，所謂任意的分成兩組，是指不論如何分都會得到相同的結果，這也是須要證明的所在，而不是舉一個特例分法得到答案即可，有些人或許會說既然是定值，不是任意取一組都可以嗎？問題是：「如何知道它是定值」，因此，一般來說，題目應該是被解讀為「就分組的方式討論其值」，只不過這題剛好是定值而已。

問題編號

8405

x 為有理數，使得 $9x^2+23x-2$ 的值恰為兩個連續正偶數的乘積，求 x 的值=？

參考解答：$x=2,-\frac{41}{9},-17,\frac{130}{9}$

設兩個連續正偶數為 $k,k+2$，

則 $9x^2+23x-2=k(k+2)$

$\Rightarrow 9x^2+23x-(k^2+2k+2)=0$

$\because x\in Q$

$\therefore D=23^2+4\times 9(k^2+2k+2)$ 為完全平方數

令 $D=565+\left[6(k+1)\right]^2=p^2$，$(p\geq 0)$

$\therefore\ p^2-\left[6(k+1)\right]^2=565=113\times 5=565\times 1$

$\Rightarrow \left[p+6(k+1)\right]\left[p-6(k+1)\right]=113\times 5=565\times 1$

(1) $\begin{cases} p+6(k+1)=113 \\ P-6(k+1)=5 \end{cases}\Rightarrow k=8$ 代回方程式

$x=2$ 或 $-\frac{41}{9}$

(2) $\begin{cases} p+6(k+1)=565 \\ P-6(k+1)=1 \end{cases}\Rightarrow k=46$ 代回方程式

$x=-17$ 或 $\frac{130}{9}$。

解題重點：

本題的概念在於「一元二次方程式」的根為有理根，則判別式是完全平方數，再搭配因數分解及聯立方程式即可解出 x 的值。