# 比較三種平均數之教學設計

丁斌悅 [1*] 曹博盛 [2] 陳彥廷 [3] 陳昭地 [2]

[1] 國立政治大學附屬高級中學

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

[3] 國立臺中教育大學 數學教育系

## 壹、前言

近年來，筆者參與國家教育研究院國民中學數學教材原型的編撰，其中，談到數學上常用的三種平均數：算術平均數(Arithmetic Mean, 簡稱 A)、幾何平均數(Geometric Mean, 簡稱 G)以及調和平均數(Harmonic Mean, 簡稱 H)，在中學數學教材中，似乎只出現算術平均數與幾何平均數。而這些概念大多出現在高中階段(國中有等差中項與算術平均數，但著墨不深)，並且，調和平均數已被遺落在中學數學教材之外，實在可惜！有鑑於上述這三個數學中常見平均數具其重要性，作者嘗試設計一份教學活動，期能透過逐步引導的方式，讓學生發現這三個平均數(A、G 及 H)具有 $A \ge G \ge H$ 及 $G^2 = A \times H$ 的性質。希望提供中學教師能在面對數學課程日漸縮減的現況，思考在適當時機引導學生進行思考、探究，讓學生產生對數學的興趣，進而發現數學之美。

## 貳、設計的理念與架構

基於上述想法，本文首先站在八年級學生現有的先備知識基礎上，透過算術平均數(A)、幾何平均數(G)以及調和平均數(H)的性質發現與說明介紹，讓學生理解前述三種平均數的意義；其次引入實例，讓學生看見三種平均數與其生活的關聯；最後，再提供教師有關這三種平均數延伸與應用的點子，以作為後續提供學生作業或深層思考的參考。圖 1 為本文課程活動安排的架構。

## 參、教學活動內容

以下，茲依據圖 1 的架構依序介紹本文設計的教學活動內涵：

### 活動一：從情境中引入發現三者關係

假設情境引入算術平均數(Arithmetic Mean, 簡稱 A)、幾何平均數(Geometric Mean, 簡稱 G)、調和平均數(Harmonic Mean, 簡稱 H)等三種平均數；讓學生主動發現 $A \ge G \ge H$ 及 $G^2 = A \times H$ 的關係。

假設某所學校一位素有民主風範的數學老師，在學期即將結束之際，設計了三種平均數要求全班學生投票以決定最有利於自己平時成績的一種算法。這位老師對此班學生總共進行了兩次的數學平時評

*為本文通訊作者

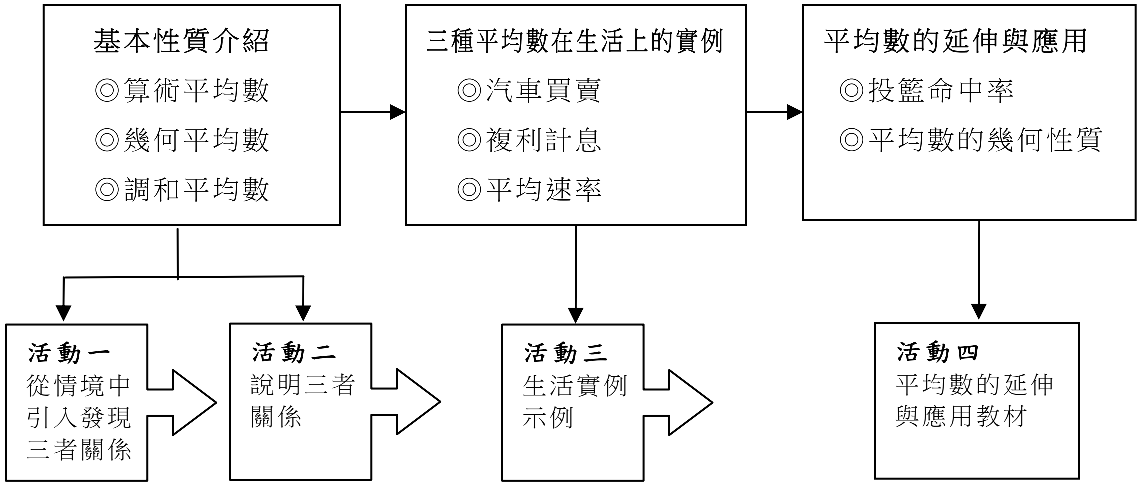


圖 1、本文課程活動安排的架構

量，每位學生自己第一次的平時評量成績記作 $a$ 分，第二次則記作 $b$ 分，他(她)建議班上同學有如下的三種平時評量成績之平均計算方式：

$$A=\frac{a+b}{2} \quad 、\quad G=\sqrt{a\times b} \quad 、\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

為了節省時間，這位數學老師允許學生使用電算器的輔助，並要求學生兩分鐘內自行計算並記錄自己個人這三種方案的結果，聲明若計算之結果遇有小數點時，以四捨五入法記錄到小數點後二位。經過兩分鐘，全體學生都完全正確地記錄出自己個人在三案上的結果（A、G、H）。

於是這位數學老師要求全班學生舉手表決，以決定最後的數學平時成績結算方式，結果發現全班同學都同意 A 案，而同意 G 案與 H 案的為同樣的 3 位學生，此時老師便問這 3 位學生:「你們為何三案皆同意啊？」這 3 位學生異口同聲回答:「因為我在這三案所計算出來的分數都一樣啊！」老師進一步問全班同學:「為何這 3 位同學利用這三案所計算出來的分數是一樣的呀？又為何全班同學皆同意 A 案呢？你們知道是什麼原因嗎？」

**隨堂練習 1：**

(1) 假設班上的名叫<u>中明</u>的學生第一次得分 25 分第二次得分 64 分，那麼他的計算結果 A=____分，G=____分，H 又是____分。

(2) 假設班上另一位學生名叫<u>志強</u>的，第一次得分 81 分，第二次得分 49 分，那麼他的計算結果應該是 A=____分，G=____分，而 H=____分。

(3) 假設你也是該班的學生，第一次得分 81 分，第二次得 100 分，那麼你計算的結果是 $A=\frac{181}{2}$ 或 90.5 分

G＝90 分及 $H=\dfrac{16200}{181}$ 或約 89.50 分（A、H 可以視情況需要，用假分數或小數表示。若遇有小數點時，可以四捨五入法記錄到小數點後二位）那麼可以得到 $A>G>H$ 以及 $G^2=A\times H$ 的關係嗎？

① 兩者都可以___；

② 只有一個可以____；

③ 兩者都不可以___。

（請擇一打〝✓〞）

(4) 假設另一位同學小雅也在該班，她的第一次與第二次得分都是 90 分，那麼她計算的結果 A=___分，G=___分，H=____分。

從上面的投票結果及隨堂練習 1 各小題後，這位數學老師問班上的學生有什麼發現？接著一位反應靈敏、思考快速，名叫大仁的學生，首先舉手搶答：「老師我發現了 $A\ge G\ge H$ 及 $G^2=A\times H$ 的關係。」隨即老師露出微笑並點頭表示讚賞、同意大仁的發現。

為了更加確定這兩個結果的真實性，這位數學老師要求全班學生緊接著再作以下的隨堂練習 2：

**隨堂練習 2：**

(1) 若 $a=20$，$b=80$，則 A=_____，G=____，H=____。

(2) 若 $a=8$，$b=2$，則 A=______，G=____，H=____。

(3) 若 $a=b=95$，那麼 A=_____，G=____，H=____。

(4) 若 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{8}$，則 A=_____，G=____，H=____。

(5) 若 $a=\dfrac{1}{80}$，$b=\dfrac{1}{20}$，則 A=_____，G=____，H=____。

作完以上的隨堂練習 2 各小題後，老師再問全班同學所得的結果是否都符合下列兩個關係式：

$$A\ge G\ge H \text{ 及 } G^2=A\times H$$

全班同學全部都點點頭表示符合。接著老師便說：「同學你們是否更加確定了，隨意的兩正數 $a$ 與 $b$ 永遠符合下列的兩個關係式：

$$(*)\ A\ge G\ge H \text{ 及 } G^2=A\times H$$

### 活動二：說明(或是證明) $A\ge G\ge H$ 及 $G^2=A\times H$

**步驟 1：** 這位老師接續剛剛的結果，說：「事實上，不僅上面的關係式(＊)正確，假設 $a\ge b$ 時，還有下面的關係式：

$$a\ge A，H\ge b$$

合併起來可得 $G^2=A\times H$，及 $a\ge A\ge G\ge H\ge b$，其中 A 稱為 $a$、$b$ 二正數的**算術平均數**，G 稱為 $a$、$b$ 二正數的**幾何平均數**，而 H 稱為 $a$、$b$ 二正數的**調和平均數**。它們恆有 $G^2=A\times H$，$A\ge G\ge H$ 的關係！」

**步驟 2：**「上面你們大仁同學所發現的關係式，到目前為止，頂多只能說是猜測或是臆測，會不會有例外？可不可能有例外？我們應該要有更完整的說明(或是證明)：對任意二正數 $a$ 、 $b$ ，為什麼 $A \ge G \ge H$ 及 $G^2 = A \times H$ 的關係式一定正確！要更一般性地、完整地說明出理由，以確定不會有以偏蓋全、或有例外發生之可能性。」

**步驟 3：**同學想了幾分鐘，默默無語，終於有同學舉手發問：「老師，那麼要如何對上面的關係式作出一般性的、完整的說明呢？」於是老師就分成下列 3 個步驟說明(或是證明)給學生看！

**步驟 4：**直接了當的先從等式著手

( $G^2 = A \times H$ )：

由 $A = \dfrac{a+b}{2}$ ， $H = \dfrac{2ab}{a+b}$

於是 $A \times H = \dfrac{a+b}{2} \times \dfrac{2ab}{a+b} = ab$

得其結果即為 $ab$，$G = \sqrt{ab}$ 的平方，所以得到 $G^2 = A \times H$ 。那麼完成其中一個等式的說明(或是證明)。

**步驟 5：** 再看比較頭痛的部分( $A \ge G \ge H$ )：只要經過巧妙的處理，說明 $A \ge G$ 就不難了，因為 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

相當於 $(\dfrac{a+b}{2})^2 \ge (\sqrt{ab})^2$

即 $(a+b)^2 \ge 4ab$

而上式又相當於 $a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$

即 $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$ 亦即 $(a-b)^2 \ge 0$

而 $(a-b)^2 \ge 0$ 對任意二正數 $a$ 、 $b$ 恆正確！

於是將上面的說明反方向進行，由 $(a-b)^2 \ge 0$

得 $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$ ，

再得 $a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$ ，

又得 $\dfrac{(a+b)^2}{4} \ge ab$

隨即可得 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

（即 $A \ge G$ ，稱作**算幾不等式**）

值得一提的是：

當 $a = b$ 時，等式成立，

即 $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ，也就是 $A = G$ 。

**步驟 6：**合併以上兩步驟得 $G^2 = A \times H$ 及 $A \ge G$

亦即 $\dfrac{A}{G} = \dfrac{G}{H}$ 及 $\dfrac{A}{G} \ge 1$

故得 $\dfrac{G}{H} = \dfrac{A}{G} \ge 1$ ，即得 $\dfrac{G}{H} \ge 1$

於是 $G \ge H$ ，故得 $A \ge G \ge H$ 。

同樣地，當 $a = b$ 時，等式成立，

即 $G = H$ ，可得 $A = G = H$ 。

老師隨即說：以上三個步驟（步驟 4～步驟 6），就是 $G^2 = A \times H$ 與 $A \ge G \ge H$ 的完整說明(或是證明)！

### 活動三：三種平均數在生活上的實例

例 1：算術平均（數）是常聽到的日常用語！例如：買賣一部二手汽車，賣方原本定價 42 萬元，而買方認為價錢太高了，心中一再盤算之後出價 38 萬，……，買賣雙方經過一番討價還價後，雙方終於同意以 40 萬元成交。40 萬元就是 38 萬元與 42 萬元的「算術平均數」；雙方各退讓同樣的一步：各增減 2 萬元。

例 2：在數學上使用幾何平均數的機會，在將來會出現較頻繁。其生活上使用的時機，以銀行業來說就常會遇上！例如，某一銀行牌告 100 萬元三年期的借款採用年利率 5%並以複利計息，並公告每一年計算一次；某人因購屋之需，就向該銀行借了 100 萬元，那麼從一開始借款起，其本利和逐年計算如下：（單位：萬元）

借款當日：100

一年期滿：

$$100+100\times\frac{5}{100}=100(1+\frac{5}{100})$$

二年期滿：

$$100(1+\frac{5}{100})+100(1+\frac{5}{100})\times\frac{5}{100}$$

$$=100(1+\frac{5}{100})(1+\frac{5}{100})=100(1+\frac{5}{100})^2$$

同理，三年期滿：$100(1+\frac{5}{100})^3$

其中的第一年期滿 $100(1+\frac{5}{100})$ 就是其前後一年的 100，$100(1+\frac{5}{100})^2$ 的幾何平均數；

同樣地，第二年期滿的 $100(1+\frac{5}{100})^2$ 是 $100(1+\frac{5}{100})$ 與三年到期應還的本利和 $100(1+\frac{5}{100})^3$ 之幾何平均數。

例 3：較難舉例的是調和平均數，不過看看下面的例子，就可知道了！

提問：汽車上山的平均速率為 36 公里/小時，下山沿原路返回，平均速率為 64 公里/小時，請問上、下山一趟，全程的平均速率是每小時多少公里呢？

說明：全程平均速率等於全程距離除以所花的時間。於是可將此山路的距離設成 $s$ 公里，全程則為 $2s$ 公里；另將上山所花的時間記為 $a$ 小時，下山所花的時間為 $b$ 小時。因此可以得到上、下山一趟的平均速率可記為 $\frac{2s}{a+b}$ 公里/小時。

另外，上、下山的平均速率分別是 $\frac{s}{a}$ 和 $\frac{s}{b}$，其調和平均數為：

$$\frac{2(\frac{s}{a})(\frac{s}{b})}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}=\frac{2(\frac{s^2}{ab})}{\frac{s(a+b)}{ab}}=\frac{2s}{a+b}$$

也就是說：$\frac{2s}{a+b}$ 恰好是上、下山平均速率 $\frac{s}{a}$ 和 $\frac{s}{b}$ 的調和平均數。

此題中，$\frac{2s}{a+b}=\frac{2(\frac{s}{a})(\frac{s}{b})}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}=\frac{2(36)(64)}{36+64}$

$=\frac{2\times 36\times 64}{100}=46.08$

最後的答案 46.08 公里/小時，也就是 $\frac{2(36)(64)}{36+64}$ 公里/小時所以此輛汽車上、下山一趟全程的平均速率，為上、下山各平均速率的調和平均數。

值得一提的是：$a$ 、$b$ 的調和平均數 $\frac{2ab}{a+b}$，另一種寫法 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，

理由如下：$\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

也就是說：$a$ 、$b$ 的調和平均數，就是 $a$ 、$b$ 倒數的算術平均數之倒數！因此，此題的另一種算法為：

$\frac{2s}{a+b}=\frac{2}{\frac{a}{s}+\frac{b}{s}}=\frac{2}{\frac{1}{36}+\frac{1}{64}}=\frac{2}{\frac{64+36}{36\times 64}}$

$=\frac{2\times 36\times 64}{64+36}=\frac{2\times 36\times 64}{100}=46.08$

（$\frac{s}{a}=36,\frac{a}{s}=\frac{1}{36}$；$\frac{s}{b}=64,\frac{b}{s}=\frac{1}{64}$）

也可得到相同的結果。

**隨堂練習 3：**

(1) 騎自行車上、下山的平均速率分別為 8 公里/小時與 18 公里/小時，請問此自行車上、下山一趟，全程平均速率為每小時多少公里？

(2) 請各組(位)學生，再舉一個調和平均數之日常生活實例。結合上面的生活實例不在少數！同學們將來還會遇到許多生活以外、數學上的其他實例。另外，算幾不等式的數學實例與其應用，更會在未來的數學課堂上或是數學評量試題中出現，它是初等數學最重要的不等式之一，不可不注意喔！

## 活動四：平均數的延伸與應用

1. 有關算幾不等式的簡易應用

   $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$，對任意二正數 $a$ 、$b$ 恆成立！

   **理由：**$\frac{(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})}{2}\geq\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}$（算幾不等式）

   即 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{1}$，亦即 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

   且等號成立 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$

2. 有關調和平均數的日常生活實例，有下面例題可作補充：有一位職業籃球員在某場球賽之中，上半場投籃 $a$ 次進了 $b$ 次，下半場投籃 $c$ 次進了 $d$ 次（$a$、$b$、$c$、$d$ 都是大於 0 的整數），

請問這一位球員這場球賽的上半場、下半場及全場命中率各是多少？它們三者之間有何關係？

**解：**

(1) 上半場的命中率為 $\frac{b}{a}$，下半場則為 $\frac{d}{c}$，而全場的命中率為 $\frac{b+d}{a+c}$

(2) 不妨假設 $\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$，

則可得 $\frac{b}{a} \geq \frac{b+d}{a+c} \geq \frac{d}{c}$，

① 當 $a=c$ 時，全場命中比例 $\frac{b+d}{a+c}=\frac{b+d}{2a}=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{d}{a})=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{d}{c})$ 為上、下半場命中率的算術平均數。

② 當 $b=d$ 時，全場命中比例

$$\frac{b+d}{a+c}=\frac{2b}{a+c}=\frac{2(\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c})}{(a+c)\cdot\frac{b}{a\cdot c}}=\frac{2(\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c})}{(\frac{b}{a}+\frac{b}{c})}$$

故為上、下半場命中率的調和平均數。

**備註：**上述 $\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$ 中的 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是原始數值，保持原值，不可約分。

3. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 之幾何詮釋：

如圖 2，半圓 $O$ 中(圓心為 $O$)，直徑 $\overline{AB}=a+b$ (半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OR}=\frac{a+b}{2}$)

其中 $\overline{AP}=a$，$\overline{PB}=b$，$a \neq b$，$\overline{RP} \perp \overline{AB}$ 於 P，R 在半圓上，$\overline{PS} \perp \overline{OR}$ 於 S（我們稱 S 為垂足），

(1) 利用直角 $\Delta ARP$ ～直角 $\Delta RBP$ ～直角 $\Delta ABR$ 之母子相似性質，可得

$$\overline{RP}=\sqrt{\overline{AP}\times\overline{PB}}=\sqrt{ab}$$ 。

(2) 另外，利用直角 $\Delta RPS$ ～直角 $\Delta POS$ ～直角 $\Delta ROP$ 之母子相似性質，可得 $\overline{RS}=\frac{\overline{PR}^2}{\overline{OR}}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$ 。

(3) $\overline{AO}=\overline{OR}>\overline{PR}>\overline{RS}$ 。

由上述(1)～(3)可知：

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$$

即：$a$、$b$ 二數的算術平均數＞ $a$、$b$ 的幾何平均數＞ $a$、$b$ 的調和平均數之幾何詮釋；

另外，當 $a=b$ 時，$P$ 點重合 O 點，此時垂足 S 亦重合 O 點，

因此 $\overline{AO}=\overline{OR}=\overline{PR}=\overline{RS}$，此時：

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}=\frac{2ab}{a+b}$$ 。

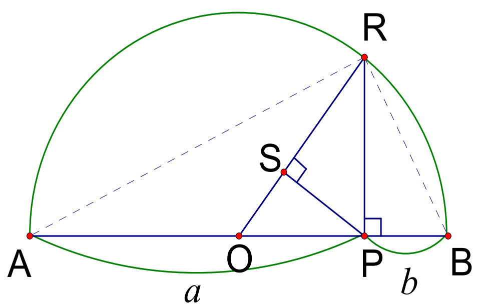


圖 2

4. 如圖 3，梯形 ABCD 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{AB}=a$，$\overline{CD}=b$，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 $O$ 點，$\overleftrightarrow{EF}$為過 $O$ 且與底邊$\overline{CD}$平行的直線，交兩腰於 E 與 F，令$\overline{EF}=h$；G、H 為兩腰的中點，令$\overline{GH}=d$，則：

(1) $\overline{GH}=d=\dfrac{a+b}{2}$ 為上底長$\overline{AB}=a$、下底長$\overline{CD}=b$ 的算術平均數。

(2) 利用 $\Delta OCD \sim \Delta OAB$ 相似性質，可得 $\overline{DO}:\overline{OB}=\overline{CD}:\overline{AB}=b:a$

因此

$\overline{DO}:\overline{DB}=b:(a+b)$；利用 $\Delta DEO \sim \Delta DAB$ 相似性質，

可得 $\overline{EO}:\overline{AB}=\overline{DO}:\overline{DB}=b:(a+b)$，

因此 $\overline{EO}=\dfrac{ab}{a+b}$；同理，$\overline{OF}=\dfrac{ab}{a+b}$：

$$h=\overline{EF}=\overline{EO}+\overline{OF}=\frac{ab}{a+b}+\frac{ab}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}$$

為上底長$\overline{AB}=a$、下底長$\overline{CD}=b$的調和平均數。(因為 $a \neq b$，故 $d \neq h$，所以$\overline{GH}$必然不通過兩對角線的交點。)

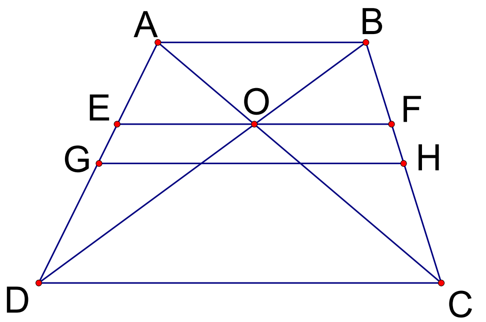


圖 3

5. 如圖 4，$\Delta ABC$ 中，$\angle C$ 的內角平分線$\overline{CD}$ 交$\overline{AB}$於 D，$\angle C$ 的外角平分線$\overline{CE}$交$\overline{AB}$的延長線於 E，則：

(1) 因 $\Delta ACD$ 與 $\Delta BCD$ 是分別以$\overline{AD}$與$\overline{BD}$ 為底邊，過 C 點的高相同，故 $\dfrac{\Delta ACD}{\Delta BCD}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$。

(2) 另外，$\Delta ACD$ 與 $\Delta BCD$ 是分別以$\overline{AC}$與$\overline{BC}$為底邊，過 D 作$\overline{AC}$、$\overline{BC}$邊上的高，則由 D 為平分線$\overline{CD}$上的一點，故此二高相等，於是又得 $\dfrac{\Delta ACD}{\Delta BCD}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$。

由上述(1)～(2)可得：$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$。

同理可得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$。

合併得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$！

(3) 令 $r=\overline{AD}$、$s=\overline{AB}$、$t=\overline{AE}$，則可得：$\dfrac{r}{s-r}=\dfrac{t}{t-s}$

取倒數：$\dfrac{s-r}{r}=\dfrac{t-s}{t}$，$\Rightarrow \dfrac{s}{r}-1=1-\dfrac{s}{t}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}$，$\Rightarrow \dfrac{2}{s}=\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{r+t}{rt}$

即 $s=\dfrac{2rt}{r+t}$，$s$ 為 $r$ 與 $t$ 的調和平均數。

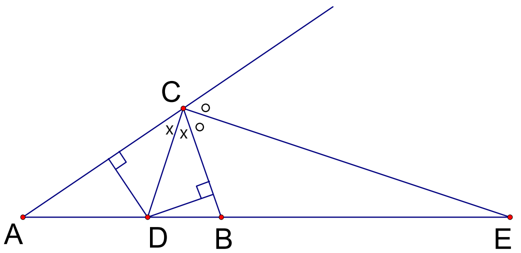


圖 4

6.(1)三個正數 $a$、$b$ 及 $c$ 之算術平均 A，幾何平均數 G，與調和平均 H 可以如法泡製地去定義，此時：

$$A=\frac{a+b+c}{3}，G=\sqrt[3]{abc}，$$

$$H=\frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

仍可用暴力計算得出 $A\ge G$，再利用 $A\ge G$ 經過適當的代換推得 $G\ge H$，但 $G^2$ 與 $A\times H$ 則未必相等！

例如：1、1、8 三數的

$$A=\frac{1+1+8}{3}=\frac{10}{3}，$$

$$G=\sqrt[3]{1\cdot1\cdot8}=2，$$

$$H=\frac{3(1\cdot1\cdot8)}{1\cdot1+1\cdot8+8\cdot1}=\frac{24}{17}，$$

則：$A>G>H$，

但 $G^2=4\ne A\times H=\frac{10}{3}\times\frac{24}{17}$。

(2) 由算幾不等式 $A\ge G$，易得 $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 3$ 對任意三個正數 $a$、$b$、$c$ 恆成立：

$$\frac{(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=\sqrt[3]{1}=1，$$

因此推得 $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 3$！

## 肆、教學活動參考解答

活動一：

**隨堂練習 1：**

(1) A＝44.5 或 $\frac{89}{2}$(分)，G＝40(分)，H＝$\frac{3200}{89}$ 或約 35.96(分)。

(2) A＝65(分)，G＝63(分)，H＝$\frac{7938}{130}$ 或 $61\frac{4}{65}$ 或約 61.06(分)。

(3) ①兩者都可以(用小數表示時可得 $A>G>H$；用分數表示時可得 $G^2=A\times H$)。

(4) A＝G＝H＝90(分)。

**隨堂練習 2：**

(1) A＝50，G＝40，H＝32。

(2) A＝5，G＝4，H＝3.2。

(3) A＝95，G＝95，H＝95。

(4) A＝$\frac{5}{16}$，G＝$\frac{1}{4}$，H＝$\frac{1}{5}$。

(5) A＝$\frac{5}{160}$，G＝$\frac{1}{40}$，H＝$\frac{1}{50}$。

活動三：

**隨堂練習 3：**

(1) $\frac{2\times8\times18}{8+18}=\frac{288}{26}=\frac{144}{13}=11\frac{1}{13}\doteqdot 11.08$(公里/小時)。

(2) (略)。

## 伍、建議的課後作業

1. 求下列各組數的算術平均數 A，幾何平均數 G 及調和平均數 H：

(1) （100，100）

(2) （9，49）

(3) （125，5）

(4) （3，1）

2 (1) 1 之各小題中，符合 $A \geq G \geq H$ 之關係嗎？

(2) 同（1），符合 $G^2 = A \times H$ 嗎？

(3) 若 $a \geq b \geq 0$，並令 $a$ 為第 1 題數對中數值大者，$b$ 為第 1 題數對中數值小者。檢驗第 1 題各小題之 A、G 及 H 是否符合 $a \geq A \geq G \geq H \geq b$。

3. 有一位農人將其存款的一部分，分給兄妹兩人，原始分法為：兄分得 80 萬元，妹分得 20 萬元。後來妹妹覺得很不公平，建議父親重新分配。若將 80 萬元與 20 萬元採用本文中之三種方式 A、G 及 H 重新分配給兄妹兩人，使兄妹兩人公平分得同樣款項，假如有多出的剩餘款項就歸還給爸爸，一旦發生不足的部分則由爸爸來補足。請分別回答下列問題：

(1) 若爸爸採用算術平均 A 的方式，爸爸可以拿回或需補多少錢？

(2) 若爸爸採用幾何平均 G 的方式，爸爸又可拿回或需補多少錢？

(3) 若爸爸採用調和平均 H 的方式，爸爸拿回或需補多少錢？

(4) 經由以上三種方式之哪一種方式，對妹妹最有利？

4. 有一對父子慢速晨跑同樣圈數的操場跑道，已知父親的平均速率為 3.6 公里/小時，兒子的平均速率為 6.4 公里/小時，請問這對父子這一次的晨跑平均速率為每小時多少公里？

**建議的課後作業參考解答：**

1 (1) (100，100)，A＝G＝H＝100。

(2) (9，49)，A＝29，G＝21，H＝ $\frac{441}{29}$ 。

(3) (125，5)，A＝65，G＝25，H＝ $\frac{125}{13}$ 。

(4) (3，1)，A＝2，G＝ $\sqrt{3}$ ，H＝ $\frac{3}{2}$ 。

2. (1) 1 之(1)～(4)各題之 A、G、H 都有符合 $A \geq G \geq H$ 的關係。

(2) 1 之(1)～(4)各題之 A、G、H 也都有符合 $G^2 = A \times H$ 之等式。

(3) 皆符合 $a \geq A \geq G \geq H \geq b$ 。

3. (1) A＝50(萬元)，爸爸可拿回 0 元。

(2) G＝40（萬元），爸爸可拿回 20 萬元。

(3) H＝32（萬元），爸爸可拿回 36 萬元。

(4) 採算術平均 A 的方式，對妹妹最有利。

4. $\frac{2 \times 3.6 \times 6.4}{3.6 + 6.4} = 4.608$ (公里/小時)。

## 陸、結語

透過上述課程內容介紹，筆者認為，教師可在國民中學階段適時針對部分學生介紹三種平均數的意義、性質、內涵及延伸的相關實例。如此，應能達成以下幾個

學習目標：

(一) 瞭解二正數 $a$ 、 $b$ 的算術平均數為 $A=\frac{a+b}{2}$ ，幾何平均數為 $G=\sqrt{ab}$ ，而調和平均數為 $H=\frac{2ab}{a+b}$ 。

(二) 瞭解三個平均數 A、G 及 H，通通介於 $a$ 、 $b$ 之間，在數線上標示出二正數 $a$、$b$，表示 A 的點恰好在 $a$ 與 $b$ 的正中間，表示 G 的點在 A 的左方，而表示 H 的點又在 G 的左方，它們都落在代表 $a$ 、 $b$ 之點為端點的線段上。

(三) 知道二正數 $a$ 、 $b$ 的平均數 A、G 及 H， $A\geq G\geq H$ 及 $G^2=A\times H$ 。G 是 A 與 H 的幾何平均數，而 $A\geq G$ 則為很重要而被簡稱為算幾不等式，是初等數學最重要的不等式之一。

筆者相信，如果能夠把算術平均數、幾何平均數以及調和平均數重新引進中學數學教材內，將會對學生在日常生活中的實例理解有所幫助，也能幫助學生更加充分理解這三種平均數的意涵，看見三種平均數在生活中的美。

## 參考文獻

丁斌悅、陳彥廷、陳昭地（2012）。巧排真分數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 A 冊(pp. 273-288)。新北市：國家教育研究院。

波利亞（1957）。怎樣解題，閻育蘇譯，第 1～30 頁。臺北市：九章出版社。

陳昭地（2012）。三角形數與平方數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 A 冊，第 307～320 頁。新北市：國家教育研究院。

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 73: Averaging rates - the harmonic mean. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 337-339). Columbus, OH：Merrill.

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 98: Comparing means. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 384-386). Columbus, OH：Merrill.