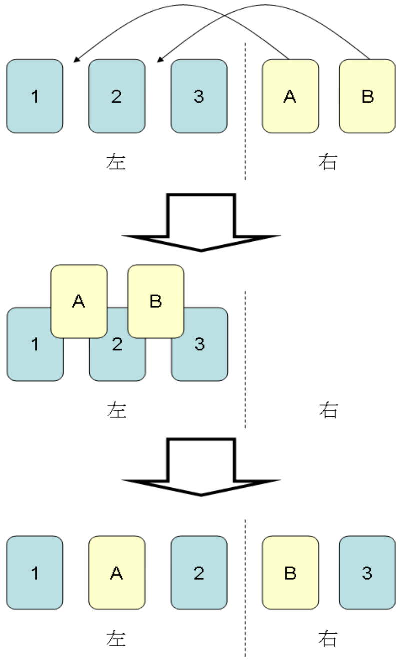
一個關於洗牌次數之基測題目的延伸探討

林建維　陳奕均　吳彥澄　蘇柏奇*　游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

壹、前言

102 學年度基本學力測驗數學科試題的第 28 題，提到了一個有關日常生活的撲克牌問題，其大意為：「先在左邊放 3 張紙牌，右邊放 2 張紙牌，然後將右邊紙牌依序插入左邊紙牌的空隙中，並將排列最後的 2 張牌順移到右邊，重複這個洗牌動作，直到牌組恢復原來的排列，需要重複此動作幾次？」



我們實際操作，將洗牌過程用表格呈現如下，得到洗牌 4 次就能恢復原來的排列。

過程＼位置	左 1	左 2	左 3	右 1	右 2
原始	1	2	3	A	B
1	1	A	2	B	3
2	1	B	A	3	2
3	1	3	B	2	A
4	1	2	3	A	B

我們改變兩邊紙牌數量，討論左邊 x 張、右邊 y 張的一般狀況，展開一連串的探討。為了方便起見，將左邊的排依序編號為 1、2、3、4、5、…；右邊的牌依序編號為 A、B、C、D、E、…。左邊的位置依序記為左 1、左 2、左 3、…左 x；右邊的位置依序記為右 1、右 2、…右 y。

以下將依序探討 $y = 1, 2, 3....$的情形。

貳、左邊 x 張牌、右邊 1 張牌

操作後發現，第一次移動時，A 從右 1 移至左 2，之後，每次洗牌時，A 便會右移 1 格，直至退回右 1。以左邊有 5 張牌，右邊 1 張牌為例，將洗牌過程用表格呈現。觀察 A 的移動過程：右 1⇨左 2⇨左 3⇨左 4⇨左 5⇨右 1，共經 5 次洗牌回到原

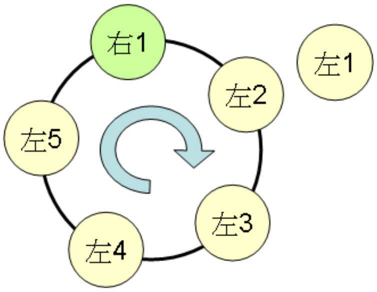
*為本文通訊作者

來的排序。

位置＼過程	左 1	左 2	左 3	左 4	左 5	右 1
原始	1	2	3	4	5	A
1	1	A	2	3	4	5
2	1	5	A	2	3	4
3	1	4	5	A	2	3
4	1	3	4	5	A	2
5	1	2	3	4	5	A

進一步發現，除了位在左 1（編號 1）的牌從未換位之外，當 A 移至左 2 的同時，左 2 的牌移至左 3、左 3 的牌移至左 4、左 4 的牌移至左 5、左 5 的牌移至右 1，形成一個循環。因此，若將這五張牌排成一個圓圈，則每次移動時，每張牌皆按照順時針方向移動一個位置。所以，當 A 由右 1 移動 5 次回到右 1 時，所有的牌也同步經歷類似過程而回到原位。

不難得知，當左邊有 x 張牌，右邊 1 張牌，洗牌 x 次回到原來的排序。



參、左邊 x 張牌、右邊 2 張牌

當右邊有 2 張牌時，我們現需將 x 區分成偶數和奇數來討論。分別討論如下：

一、左邊有奇數張牌

延續上節的想法，列表觀察 A 的移動過程。經過很多嘗試後，我們發現：

A 必定會先從右 1 移至右 2，而後再從右 2 移動至右 1。

並且

當 A 回到原位時，所有的牌全都回到原位。

以左手分別有 5、7 張牌為例，洗牌過程用表格呈現如下。其中，A 分別經過 4、5 次洗牌後由右 1 移至右 2；其後，A 分別經過 2、3 次洗牌後由右 2 移至右 1。

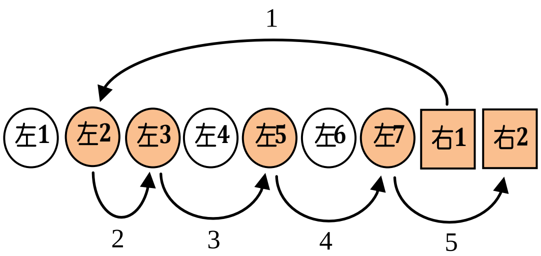
位置＼過程	左 1	左 2	左 3	左 4	左 5	右 1	右 2
原始	1	2	3	4	5	A	B
1	1	A	2	B	3	4	5
2	1	4	A	5	2	B	3
3	1	B	4	3	A	5	2
4	1	5	B	2	4	3	A
5	1	3	5	A	B	2	4
6	1	2	3	4	5	A	B

位置＼過程	左 1	左 2	左 3	左 4	左 5	左 6	左 7	右 1	右 2
原始	1	2	3	4	5	6	7	A	B
1	1	A	2	B	3	4	5	6	7
2	1	6	A	7	2	B	3	4	5
3	1	4	6	5	A	7	2	B	3
4	1	B	4	3	6	5	A	7	2
5	1	7	B	2	4	3	6	5	A
6	1	5	7	A	B	2	4	3	6
7	1	3	5	6	7	A	B	2	4
8	1	2	3	4	5	6	7	A	B

我們將 A 的移動分成「右 1 移至右 2」、「右 2 移至右 1」兩階段來探討：

階段 1：A 必定先從「右 1 移至右 2」

以左邊有 7 張牌為例，A 從右 1 移至右 2 的移動過程以下圖表示。



從上圖可說明，當左邊有奇數張牌時，洗牌過程中，A 移動規律如下：

1. A 必定先由右 1⇨左 2；
2. 因為左 1、左 2 間有 1 個間隔，故第 2 次的移動：左 2⇨左 3。
3. 因為左 1、左 2、左 3 間有 2 個間隔，所以接下來每次右移 2 格，又因為 x 為奇數，故可得接下來的移動方式如下：

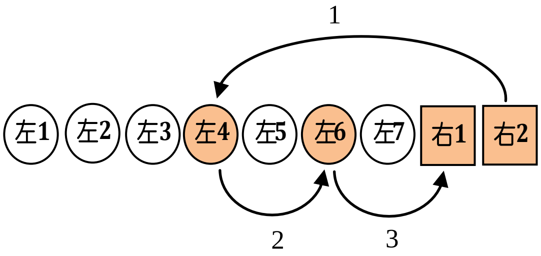
   左 3⇨5 *左* 7⇨*左* 9⇨......

   ⇨*左* x⇨*右* 2。

因此，我們可確定當左邊有奇數張牌時，A 必定先從右 1 移至右 2。

階段 2：A 必定先從「右 2 移至右 1」

以左邊有 7 張牌為例，A 從右 2 移動至右 1 的移動過程以下圖表示。



當左邊有奇數張牌時，洗牌過程中，A 移動規律如下：

1. A 必定先由右 2⇨左 4；
2. 因為左 4 前每次皆會插入兩張牌，所以接下來每次右移 2 格，又因為 x 為奇數，即 $x-1$ 為偶數，故可得接下來的移動方式如下：

   左 4⇨*左* 6⇨*左* 8⇨*左* 10⇨......

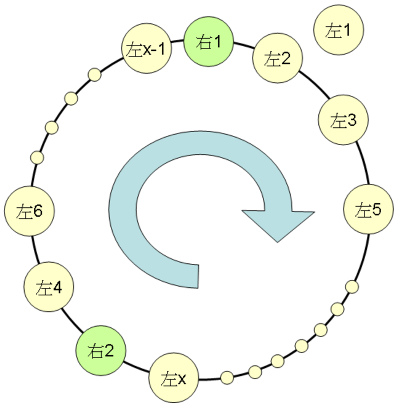
   ⇨*左* $x-1$⇨*右* 1。

因此，我們可確定當左邊有奇數張牌時，A 必定從右 2 移至右 1。

將兩個階段合併，得 A 的位置變換：右 1⇨左 2⇨左 3⇨......⇨左 x⇨右 2⇨左 4 ⇨左 6⇨......⇨左 $x-1$⇨右 1，從右 1 出發，歷經除左 1 外的所有位置後，回到右 1 的原位。

我們發現其它牌之換位方式跟 A 類似，例如：原先在左 1 的 2 號牌位置變換：左 2⇨左 3⇨左 5⇨......⇨左 x⇨右 2⇨左 4 ⇨左 6⇨.........⇨左 $x-1$⇨右 1⇨左 2；在左 3 的 3 號牌之位置變換：左⇨左 5⇨......⇨ 左 x⇨右 2⇨左 4⇨左 6⇨......⇨左 $x-1$⇨右 1⇨左 2⇨左 3。

事實上，若將所有的牌依照 A 的換位順序重新排列成一個圓圈（如下圖），可發現所有的牌皆按照順時針方向，每次順移一個位置，因此，當 A 回到原位時，所有的牌全都回到原位。



不難得知，當左邊有 x 張牌，右邊 2 張牌，洗牌 $x+1$ 次回到原來的排序。

二、左邊有偶數張牌

當左邊有偶數張牌、右手有 2 張牌時，我們把觀察重點放在 A、B 的移動過程。發現分兩群的現象：

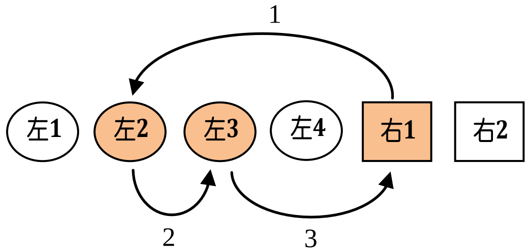
A 在部分位置反覆移動，而 B 在其餘的位置反覆移動

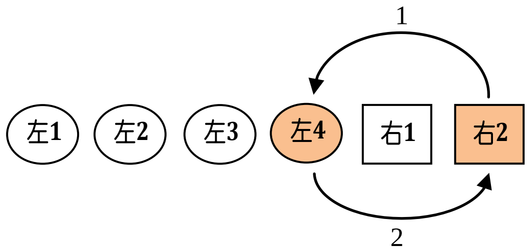
並且

A、B 移動的位置完全不重複，而且 A、B 移遍了除左 1 外的所有位置。

以左手有 4 張牌為例，洗牌過程用表格、圖形呈現如下。其中，A 依序在右 1、左 2、左 3 間反覆移動，B 依序在右 2、左 4 間反覆移動。

過程＼位置	左 1	左 2	左 3	左 4	右 1	右 2
原始	1	2	3	4	A	B
1	1	A	2	B	3	4
2	1	3	A	4	2	B
3	1	2	3	B	A	4
4	1	A	2	4	3	B
5	1	3	A	B	2	4
6	1	2	3	4	A	B





由這樣的規律，我們不難猜測出一般情形。當左邊有 x 張牌時，第一次移動時，A、B 分別自右 1、右 2 移動至左 2、左 4，然後便開始兩段不會重複的旅程如下：

第一群為

右 1⇨左 2⇨左 3⇨左 5⇨左 7⇨……

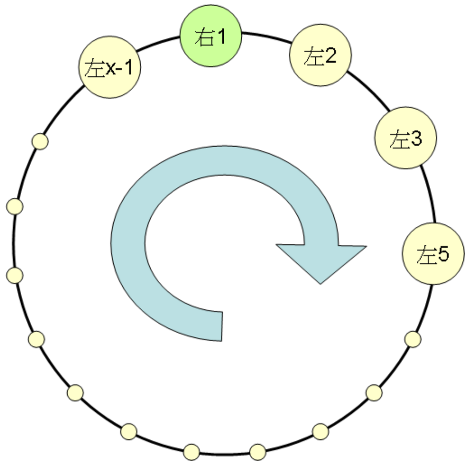
⇨左 $x-1$⇨回到右 1，共 $\frac{x}{2}+1$ 個位置

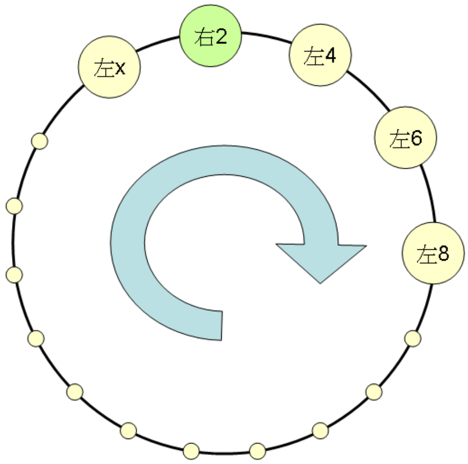
第二群為：

右 2⇨左 4⇨左 6⇨左 8⇨左 10⇨……

⇨左 x⇨回到右 2，共 $\frac{x}{2}$ 個位置。

我們比照之前的方式，將兩群的牌重排成兩個圓圈。因此，A 所在的第一群中，經過 $\frac{x}{2}+1$ 次移動後，每張牌都會回到原來的位置；同理，B 所在的第二群也有相同的狀況，經過 $\frac{x}{2}$ 次移動時，第二群中所有數字也回到原位。因此，得到經過 $[\frac{x}{2},\frac{x}{2}+1]$ 兩群組的牌都回復到原來的排列。





三、探討

當 x 為奇數時，由 A 的移動過程得知所有的牌形成一個群組：

「左 2⇨左 3⇨……⇨左 x ⇨右 2⇨左 4⇨…… ⇨左 x-1⇨右 1」

這個群組可視為兩個群組：

「左 4⇨左 6⇨……⇨左 x-1⇨右 1」

「左 2⇨左 3⇨……⇨左 x⇨右 2」

根據洗牌規則（右 1⇨左 2、右 2⇨左 4）合而為一的結果

肆、右邊 3 張牌

根據前段發現的分群現象，當右邊有 3 張牌時，綜合以下四項洗牌規則：

「右 1⇨左 2、右 2⇨左 4、右 3⇨左 6」

「因為左 1、左 2 間有 1 個空隙，故左 2⇨左 3」

「因為左 1、左 2、左 3 間有 2 個空隙，故左 3⇨左 5」

「當 T≧4 時，左 T 前有 3 個以上的空隙，故左 T⇨左 T+3」

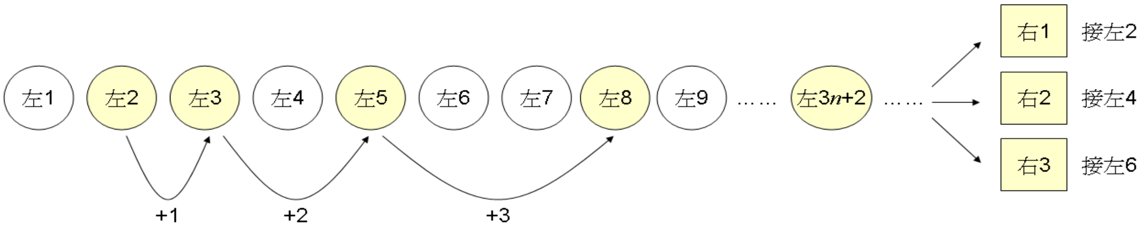
我們將所有的牌以左 2、左 4、左 6 開始，分成三個群組。而此三個群組從左 4、左 5、左 6 起，成等差數列成長，可以寫成一般形式如下：

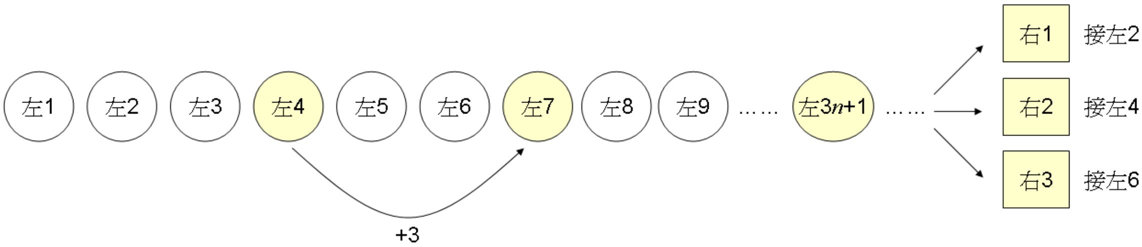
左 2、左 3、左 5、左 8、左 11、……、左 3n+2（n≧1）

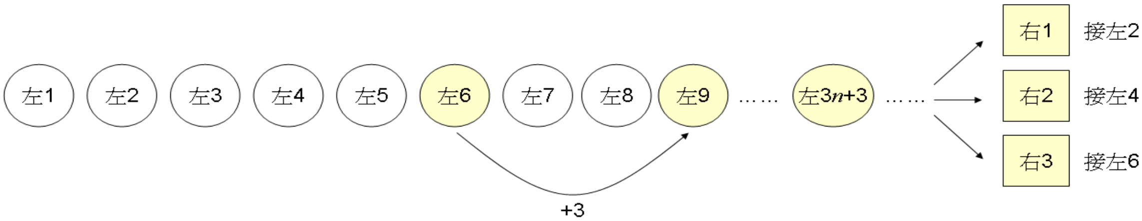
左 4、左 7、左 10、……、左 3n+1（n≧1）

左 6、左 9、左 12、……、左 3n+3（n≧1）

此三個群組最終會跳至右 1、右 2 或右 3 當中的一個位置，圖形如下。







以下將就 $x=3k, 3k+1, 3k+2$ 等三種情況來討論。

一、左邊有 $3k$ 張牌

當左邊有 $3k$ 張牌時，右 1、右 2、右 3 分別相當於左 $3k+1$、左 $3k+2$、左 $3k+3$，故上述三個群組分別為：

(1)	左 2、左 3、 左 5、左 8、…… 、左 $3k$-1、	右 2 (左 $3k+2$)	共 $k+2$ 個
(2)	左 4、左 7、…… 、左 $3k$-2、	右 1 (左 $3k+1$)	共 k 個
(3)	左 6、左 9、…… 、左 $3k$ 、	右 3 (左 $3k+3$)	共 k 個

然而，我們可知移動過程中，右 2⇨左 4，因此上述(1)、(2)群會連在一起，因此，我們得到當左邊有 $3k$ 張牌時，牌組會區分成兩個群組如下：

「左 2、左 3、左 5、……、右 2」、

「左 4、左 7、……、右 1」

「左 6、左 9、左 12、……、右 3」

合併後兩群各有 $2k+2$ 個、k 個，故得到：左邊有 $3k$ 張牌時，洗牌$[2k+2,k]$次便可回到原來的排列。

二、左邊有 3k+1 張牌

當左邊有 3k+1 張牌時，右 1、右 2、右 3 分別相當於左 3k+2、左 3k+3、左 3k+4，故上述三個群組分別為：

(1)	左 2、左 3、 左 5、……、左 3k-1、 右 1 (左 3k+2)	共 k+2 個
(2)	左 4、……、左 3k-2、 左 3k+1、 右 3 (左 3k+4)	共 k+1 個
(3)	左 6、……、左 3k、 右 2 (左 3k+3)	共 k 個

然而，我們可知移動過程中，右 3⇨左 6，因此上述(2)、(3)群組會連在一起，因此，我們得到當左手有 3k+1 張牌時，牌組會區分成兩個群組如下：

「*左 2、左 3、左 5、左 8、……、右 1*」

「*左 4、左 7、……、右 3*」

「*左 6、左 9、……、右 2*」

合併後兩群各有 k+2 個、2k+1 個，故得：左手有 3k+1 張牌時，洗牌[k+2, 2k+1]次便可回到原來的排列。

三、左邊有 3k+2 張牌

當左邊有 3k+2 張牌時，右 1、右 2、右 3 分別相當於左 3k+3、左 3k+4、左 3k+5，故上述三個群組分別為：

(1)	左 2、左 3、 左 5、……、左 3k-1、 左 3k+2、 右 3 (左 3k+2)	共 k+3 個
(2)	左 4、……、左 3k-2、 左 3k+1、 右 2 (左 3k+4)	共 k+1 個
(3)	左 6、……、左 3k、 右 1 (左 3k+3)	共 k 個

然而，我們可知移動過程中，右 3⇨左 6，因此上述(1)、(3)群組會連在一起，因此，我們得到當左手有 3k+2 張牌時，牌組會區分成兩個群組如下：

「*左 2、左 3、……、右 3*」

「*左 6、左 9、……、右 1*」

「*左 4、左 7、……、右 2*」

合併後兩群各有 2k+3 個、k+1 個，故得：左手有 3k+2 張牌時，洗牌[2k+3, k+1]次便可回到原來的排列。

伍、右邊 y 張牌

藉由一連串的探討，我們得知應依照左邊的牌來分段，以下討論右邊有更多牌的情況。

一、觀察各群的規律

本節先列出 y=5, 6, 7 的分段狀況，觀察、歸納分段的規律。

當右邊有 5 張時，分段如下：

左 2、左 3、左 5、左 9、左 14、……、左 5n+4（n≧1）

左 4、左 7、左 12、……、左 5n+2（n≧1）

左 6、左 11、……、左 5n+1（n≧1）

左 8、左 13、……、左 5n+3（n≧1）

左 10、左 15、……、左 5n+5（n≧1）

當右邊有 6 張時，分段如下：

左 2、左 3、左 5、左 9、左 15、……、左 6n+3（n≧1）

左 4、左 7、左 13、……、左 6n+1（n≧1）

左 6、左 11、左 17、……、左 6n+5（n≧1）

左 8、左 14、……、左 6n+2（n≧1）

左 10、左 16、……、左 6n+4（n≧1）

左 12、左 18、……、左 6n+6（n≧1）

當右邊有 7 張時，分段如下：

左 2、左 3、左 5、左 9、左 16、……、左 7n+2（n≧1）

左 4、左 7、左 13、左 20、……、左 7n+6（n≧1）

左 6、左 11、左 18、……、左 7n+4（n≧1）

左 8、左 15、……、左 7n+1（n≧1）

左 10、左 17、……、左 7n+3（n≧1）

左 12、左 19、……、左 7n+5（n≧1）

左 14、左 21、……、左 7n+7（n≧1）

從中，我們發現：當右邊 y 張牌時，各段有以下規律：

觀察 1：可分成 y 段，每段的第一個數皆為偶數，分別為左 $2a$ (a=1,2,…,y).

觀察 2：每段之中，等差數列的首項，分別為左 a (a= y +1, y +2, y +3,…,2y).

例如：當右邊有 5 張時，五個首項分別為左 6、左 7、左 8、左 9 及左 10。

觀察 3：從每一段等差數列的首項即可判斷此段的最後一項之一般式。

例如：當右邊有 5 張時，由左 6 即可得此段的最後一項為左 5n+1。

觀察 4：當 $a \leqq y$ 時，左 a 左⇨$2a$-1。

例如：當右邊有 7 張時：左 2⇨左 3⇨左 5⇨左 9、左 4⇨左 7⇨左 13、左 6⇨左 11。

二、求左邊 x 張牌、右邊 y 張牌之洗牌次數的方法（$x \geqq 2y$）

根據上面的探討，我們算出 $y \leqq 8$ 的洗牌次數，詳如附錄。另外，我們歸納發展了一個計算洗牌次數的方法，以左邊有 100 張牌，右邊有 11 張牌為例，說明如下：

1. 依左邊牌的位置分段，每段的第一個數分別為左 $2a$ (a=1,2,...,11).
2. 列出各段的位置至等差數列之首項止，並改以依首項大小排列。

   甲、若 b≦11, 則左 b 的下一個位置為左 2b-1。

   乙、若 11 <b≦22, 則左 b 的為此段等差數列的首項。

左 2、左 3、左 5 左 9、左 17
左 4、左 7、左 13
左 6、左 11、左 21
左 8、左 15
左 10、左 19
左 12
左 14
左 16
左 18
左 20
左 22

註：以左 $2a$ 分段排序

左 12
左 4、左 7、左 13
左 14
左 8、左 15
左 16
左 2、左 3、左 5、左 9、左 17
左 18
左 10、左 19
左 20
左 6、左 11、左 21
左 22

註：以成等差的首項排序

3. 列出右 1～右 11。

編號					個數
(1)	左 12	....	左 100	右 11	10 個
(2)	左 4、左 7、左 13	....	右 1		11 個
(3)	左 14	....	右 2		9 個
(4)	左 8、左 15	....	右 3		10 個
(5)	左 16	....	右 4		9 個
(6)	左 2、左 3、左 5、左 9、左 17	....	右 5		13 個
(7)	左 18	....	右 6		9 個
(8)	左 10、左 19	....	右 7		10 個
(9)	左 20	....	右 8		9 個
(10)	左 6、左 11、左 21	....	右 9		11 個
(11)	左 22	....	右 10		9 個

4. 根據右 T⇨左 2T 的規律來合併。得到：
   甲、(1)+(11) +(9) +(5) +(4) +(10) +(7)，7 段合併，共 67 個。
   乙、(2) +(6) +(8) +(3)，4 段合併，共 43 個。
5. 由合併後的各群個數得到洗牌次數。得到：經過[67,43]=2881 次洗牌可回到原排列。

三、求左邊 x 張牌、右邊 y 張牌之洗牌次數的方法（$y < x < 2y$）

上一段的探討中，因為 $x \geqq 2y$，故可由左 1～左 $2y$ 為首分成 y 段。但若當 $x < 2y$ 時，需將右 1~右 y 當作是左 x+1~左 $x+y$，再將牌以左 1～左 $2y$ 為首分成 y 段，此時，某幾段的第一個數為右邊的牌。以左邊有 13 張牌，右邊有 8 張牌為例，說明如下：

1. 將位置分段，每段的第一個數分別為：左 2、左 4、左 6、左 8、左 10、左 12、右 1（視為左 14）、右 3（視為左 16）。

編號	
(1)	左 2、左 3、左 5、左 9、右 4
(2)	左 4、左 7、左 13、右 8
(3)	左 6、左 11、右 6
(4)	左 8、右 2
(5)	左 10、右 5
(6)	左 12、右 7
(7)	右 1
(8)	右 3

2. 根據右 T⇨左 2T 的規律來合併。得到：
   甲、(1)+(4)+(2)+(8)+(3)+(6)+(7)，7 段合併，共 18 個。即：「左 2、左 3、左 5、左 9、右 4」、「左 8、右 2」、「左 4、左 7、左 13、右 8」、「右 3」、「左 6、左 11、右 6」、「左 12、右 7」、「右 1」。
   乙、(5)自成一段，共 2 個。即：「左 10、右 5」。
3. 由合併後的各群個數得到洗牌次數。得：經過[18,2]=18 次洗牌可回到原排列。

四、求左邊 x 張牌、右邊 y 張牌之洗牌次數的方法（x = y）

當 x = y 時，我們發現可將右 1~右 y 當作是為左 x+1~左 2x，仍是將牌以左 1～左 2x 為首分成 y 段，然而，右 y 的位置從未變動，因此，可將此牌排除，故牌分成 y-1 段。此時，某幾段的第一個數為右邊的牌，以左邊、右邊各有 7 張牌為例，說明如下：

1. 將位置分段，每段的第一個數分別為：左 2、左 4、左 6、右 1、右 3、右 5。

編號	
(1)	左 2、左 3、左 5、右 2
(2)	左 4、左 7、右 6
(3)	左 6、右 4
(4)	右 1
(5)	右 3
(6)	右 5

2. 根據右 T⇨左 2T 的規律來合併。得到：(1)+(2)+(6)+(5)+(3)+(4)，6 段合併，共 12 個。即：「左 2、左 3、左 5、右 2」、「左 4、左 7、右 6」、「右 5」、「右 3」、「左 6、右 4」、「右 1」。
3. 由合併後的各群個數得到洗牌次數。得到：經過 12 次洗牌可回到原排列。

再以左邊、右邊各有 9 張牌為例，說明如下：

1. 將位置分段，每段的第一個數分別為：左 2、左 4、左 6、左 8、右 1、右 3、右 5、右 7。

編號	
(1)	左 2、左 3、左 5、左 9、右 8
(2)	左 4、左 7、右 4
(3)	左 6、右 2
(4)	左 8、右 6
(5)	右 1
(6)	右 3
(7)	右 5
(8)	右 7

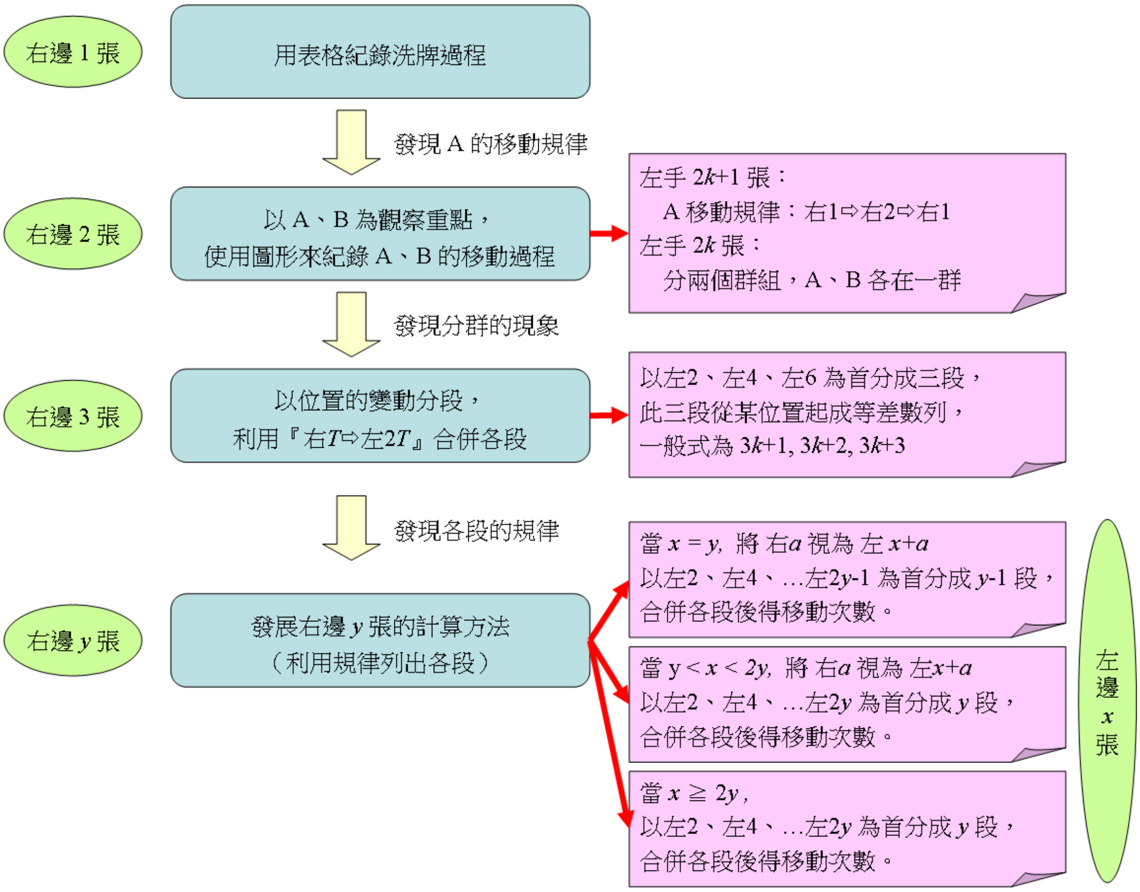
2. 根據右 T⇨左 2T 的規律來合併。得到：
   甲、(1)+(8)+(7)+(5)，4 段合併，共 8 個。即：「左 2、左 3、左 5、左 9、右 8」、「右 7」、「右 5」、「右 1」。
   乙、(2)+(4)+(6)+(3)，4 段合併，共 8 個。即：「左 4、左 7、右 4」、「左 8、右 6」、「右 3」、「左 6、右 2」。
3. 由合併後的各群個數得到洗牌次數。得到：經過[8, 8]=8 次洗牌可回到原排列。

根據這個方法，我們得到左邊、右邊各有 3~26 張牌的洗牌次數如下表。順此一提，我們曾看過魔術師拿起一副撲克牌，洗牌 8 次後竟然回復原來的排序。他是如何做到的？是撲克牌動了手腳嗎？事實上，魔術師洗牌時，他能夠巧妙精準的將撲克牌分成數量相等的左、右兩份，並且將右邊的每張牌依序插入左邊牌的空隙中，即為本文 $x=y=26$ 的情況。其中，我們初步觀察到「若 $x=y$ 且 $x+y=2n$，則需洗牌 n 次」,其證明及其它進一步的性質就留待讀者探討了。

牌數	分群數	算式	洗牌次數
3	1	[4]	4
4	2	[3,3]	3
5	2	[6,2]	6
6	1	[10]	10
7	1	[12]	12
8	4	[4,4,2,4]	4
9	2	[8,8]	8
10	1	[18]	18
11	5	[6,3,6,2,3]	6
12	2	[11,11]	11
13	2	[20,4]	20
14	3	[18,6,2]	18
15	1	[28]	28
16	6	[5,5,5,5,5,5]	5
17	4	[10,10,10,2]	10
18	5	[12,12,3,4,3]	12
19	1	[36]	36
20	4	[12,12,12,2]	12
21	2	[20,20]	20
22	3	[14,14,14]	14
23	7	[12,4,6,12,4,2,4]	12
24	2	[23,23]	23
25	4	[21,21,3,3]	21
26	7	[8,8,8,8,8,2,8]	8

陸、結語

本文探討依照規則，需要洗牌多少次才能回到原來的排序，我們逐步由右邊有 1 張、2 張、3 張的情況來探討。我們在探討過程中，不斷轉變觀察的方式，首先，是用表格來記錄洗牌過程，在表格中我們注意到了右邊的牌 A、B 的移動特徵，並從中發現分群的現象，然後，再改由位置的分段與合併，從而歸納發展了一個快速計算洗牌次數的方法。轉變的過程如下圖所示。



參考資料：

102 年國民中學學生基本學力測驗 數學科題本（引自 http://www.bctest. ntnu.edu.tw/）

備註：本文的前三個作者為本校（興華高中）國二的學生，後兩位則為老師。

附錄：左邊 x 張牌、右邊 y 張牌之洗牌次數（$x \geqq 2y,\ y=1\sim8$）

x	y	洗牌次數	群數	x	y	洗牌次數	群數
x	1	x	1	$6k+3$	6	$6k+8$	1
$2k$	2	$[k,k+1]$	2	$6k+4$		$[5k+8,k+1]$	2
$2k+1$		$2k+2$	1	$6k+5$		$[k+2,4k+7,k+1]$	3
$3k$	3	$[2k+2,k]$	2	$7k$	7	$[6k+6,k]$	2
$3k+1$		$[k+2,2k+1]$	2	$7k+1$		$[k+3,2k+2,k+1,3k+1]$	4
$3k+2$		$[2k+3,k+1]$	2	$7k+2$		$[3k+4,4k+4]$	2
$4k$	4	$[k+2,2k+1,k]$	3	$7k+3$		$[4k+7,3k+2]$	2
$4k+1$		$[3k+3,k+1]$	2	$7k+4$		$[3k+5,k+2,2k+2,k+1]$	4
$4k+2$		$4k+5$	1	$7k+5$		$[6k+10,k+1]$	2
$4k+3$		$[3k+5,k+1]$	2	$7k+6$		$[6k+11,k+1]$	2
$5k$	5	$[3k+3,k+1,k]$	3	$8k$	8	$[k+3,\ 2k+2,k+1,3k+1,k]$	5
$5k+1$		$5k+5$	1	$8k+1$		$4k+4$	1
$5k+2$		$5k+6$	1	$8k+2$		$8k+9$	1
$5k+3$		$[3k+3,k+1,k+3]$	3	$8k+3$		$[2k+4,k+2,4k+3,k+1]$	4
$5k+4$		$[2k+4,2k+3,k+1]$	3	$8k+4$		$8k+11$	1
$6k$	6	$5k+5,k$	2	$8k+5$		$[7k+11,k+1]$	2
$6k+1$		$6k+6$	1	$8k+6$		$[4k+8,3k+4,k+1]$	3
$6k+2$		$[k+3,2k+2,k+1,2k+1]$	4	$8k+7$		$[7k+13,k+1]$	2