一個有關外離兩圓的有趣發現

蘇柏奇* 游淑媛
苗栗縣立興華高級中學

國中階段的幾何教材論及點、線、圓、角的位置關係，大多數國三學生都知道外離兩圓有四條公切線（如圖 1），也會計算外、內公切線的長度。本文將利用所學的相似形、對稱圖形及圓內接四邊形等幾何性質，針對外離兩圓，探索其中所蘊藏之同心圓、等差數列等有趣的結果。

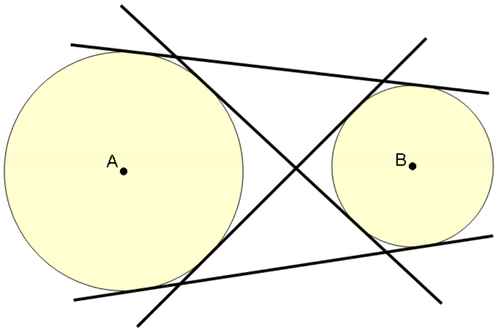

圖 1

壹、相關知識

一、切線

直線與圓可能相交兩點、相交一點或沒有相交，當直線與圓相交一點時，交點稱為切點，直線稱為切線；而一直線同時是圓 A、圓 B 的切線時，則稱為公切線，公切線可分成外公切線(如圖 2)與內公切線(如圖 3)。本文將討論外公切線的 4 個切點、內公切線的 4 個切點及內、外公切線之 4 個交點的共圓現象。

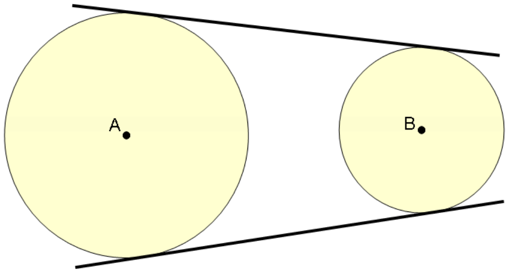

圖 2

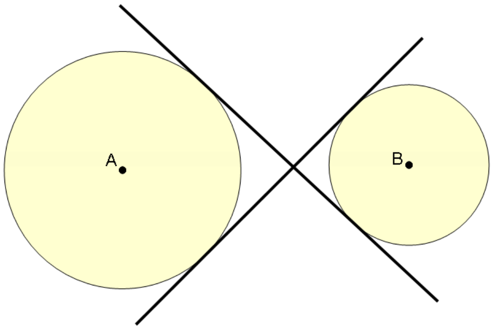

圖 3

二、圓內接四邊形

四個頂點都在同一圓周上的四邊形稱為該圓的內接四邊形，而此圓稱為這個四邊形的外接圓（如圖 4）。圓內接四邊形的四個角皆為圓周角，其角度為所對弧的一半，觀察∠A 所對的弧與∠C 所對的弧，兩弧恰組合成圓周，故相加為 360°，

*為本文通訊作者

即得∠A＋∠C＝180°；同理∠B＋∠D＝180°。此即：「圓內接四邊形的對角互補」。

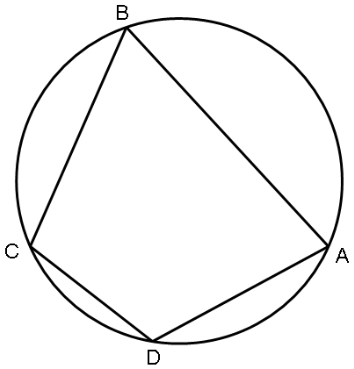

圖 4

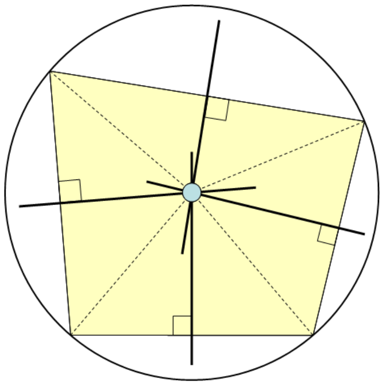

圖 5

在本文中，我們須判斷四個點是否在同一個圓周上，亦即以此四點為頂點的四邊形是否有外接圓。前段所提及的對角互補性質，為判斷此四邊形是否有外接圓的條件：「若四邊形的一組對角互補，則此四邊形有外接圓」。不難得知特殊四邊形中，長方形、正方形及等腰梯形的對角互補，皆有外接圓。那麼，圓心在哪裡？就如同三角形的外接圓圓心為三邊之中垂線的交點，圓內接四邊形的外接圓圓心為四邊之中垂線的交點(如圖 5)。因此，我們也可以利用四邊中垂線是否相交同一點來判斷此四邊形是否有外接圓。當四邊中垂線相交於一點時，此四邊形即有外接圓，此交點即為外接圓圓心。順此一提，任意三角形皆有外接圓，但並非任意四邊形皆有外接圓。

三、平行線截比例線段性質

△ABC 中（如圖 6），如果 $\overline{DE}//\overline{BC}$，則∠B＝∠D 且∠C＝∠E，利用 AA 相似性質，可知△ABC 和△ADE 相似，故兩個三角形的三組對應邊邊長成比例，即 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$，經過運算可得 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。在後面的討論中，我們常由 $\overline{DE}//\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}:\overline{BC}=1:1$（即 B 為 $\overline{AB}$ 的中點），得到 $\overline{AE}:\overline{CE}=1:1$（即 E 為 $\overline{AC}$ 的中點）。另外，若三條平行線被兩線所截(如圖 7)，則 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$。在後面的討論中，我們常由 $\overline{AD}//\overline{BE}//\overline{CF}$ 且 B 為 $\overline{AC}$ 的中點，得 E 為 $\overline{DF}$ 的中點。

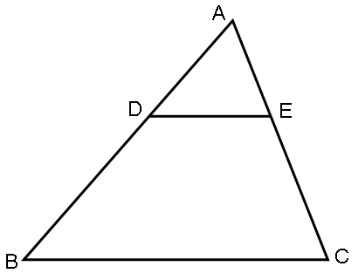

圖 6

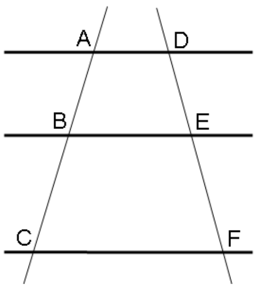

圖 7

貳、面積成等差數列的同心圓

一、同心圓

將公切線上的 12 個點分成三類：外公切線的切點、內公切線的切點、內公切線與外公切線的交點。因圖形為以連心線為對稱軸的對稱圖形，可知恰為三個等腰梯形的頂點，分布在三個圓上（如圖 8～10）。

若將三個圓畫在同一個圖上（如圖 11)，觀察這三個圓，你有什麼發現？

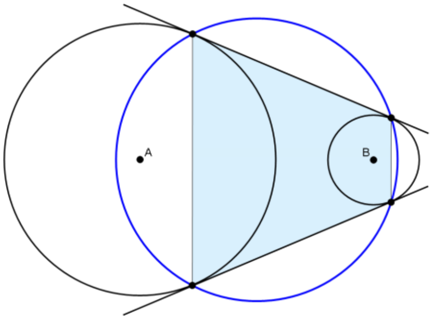

圖 8

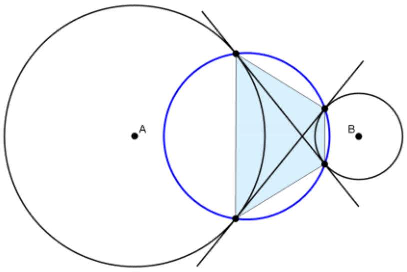

圖 9

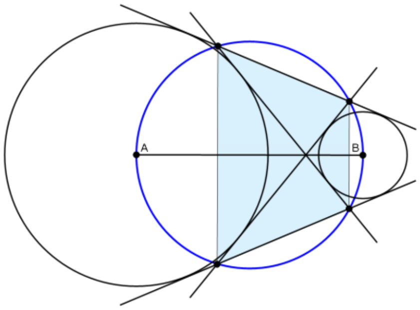

圖 10

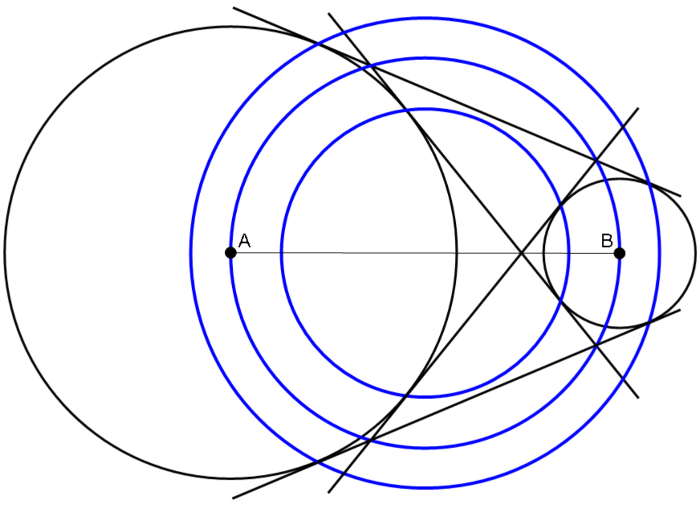

圖 11

從圖中看來，其中一個圓似乎通過圓 A、B 的圓心，而因為 $\overline{AB}$ 是對稱軸，故若 A、B 在其中一個圓上，那麼 $\overline{AB}$ 即為此圓的直徑，$\overline{AB}$ 的中點為此圓的圓心。再者，這三個圓看來似乎是同心圓，故大膽猜測：「這三個圓是同心圓，$\overline{AB}$ 的中點為此三圓的圓心」。

為了驗證這個觀察，我們將此三個圓由大而小分別稱為大圓、中圓及小圓，以下將逐一驗證 $\overline{AB}$ 的中點為此三圓的圓心。

(一) 大圓的圓心：

如圖 12，大圓的圓心為 $\overline{DE}$ 之中垂線與 $\overline{AB}$ 之交點，設此點為 P。在梯形 ABED 中，

$\because \overline{AD} // \overline{PF} // \overline{BE}$

$(\angle ADF = \angle PFE = \angle BEF = 90°)$

且 $\overline{DF} : \overline{EF} = 1:1$($\overline{PF}$ 為 $\overline{DE}$ 之中垂線)

$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 1:1$

故 P 為 $\overline{AB}$ 的中點

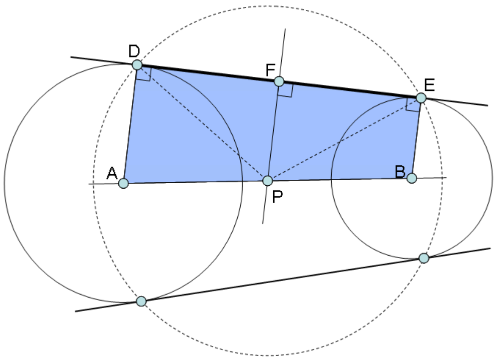

圖 12

(二) 小圓的圓心：

如圖 13，過 B 點做一條與 $\overline{DE}$ 平行的直線，此直線與 $\overline{AD}$ 的延長線相交於 F 點；再做 $\overline{DE}$ 之中垂線，此中垂線與 $\overline{AB}$、$\overline{BF}$ 相交於 Q、G，則 Q 為小圓的圓心。

在△ABF 中，

$\because \overline{GQ} // \overline{AF}$（$\angle AFB = \angle QGB = 90°$）

且 $\overline{BG} : \overline{GF} = \overline{EH} : \overline{HD} = 1:1$

（QG 為 $\overline{DE}$ 之中垂線）

$\therefore \overline{AQ} : \overline{BQ} = 1:1$，故 Q 為 $\overline{AB}$ 的中點。

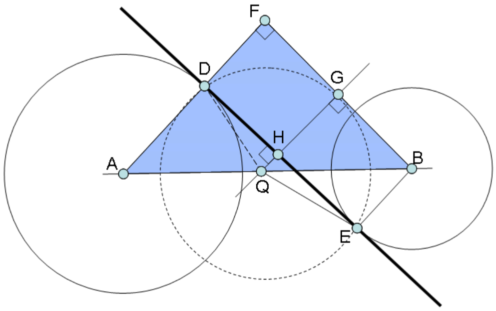

圖 13

(三) 中圓的圓心：

如圖 14, 若 A、B、D、E 共圓，則因為 $\overline{AB}$ 是對稱軸，可得 D、E 的對稱點 L、M 亦在此圓上，即可得 A、B、D、E、L、M 六點共圓。而由 $\overline{AB}$ 是此圓的對稱軸，即得 $\overline{AB}$ 的中點為中圓的圓心。

以下將藉由 $\angle DAB + \angle BED = 180°$ 來說明 A、B、D、E 共圓。

如圖 15, 假設 $\angle FAD = \angle GAD =$ 、$\angle HBE = \angle IBE = b°$、$\angle GAB = c°$

在△AGK 和△BJK 中，

$\because \angle 1=\angle 2$， $\angle 3=\angle 4=90°$，

$\therefore \angle JBK=\angle GAK=c°$

因圖形對稱，故 $\angle HBK=\angle JBK=c°$

（如圖 16）

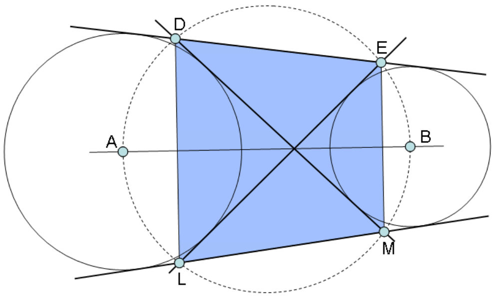

圖 14

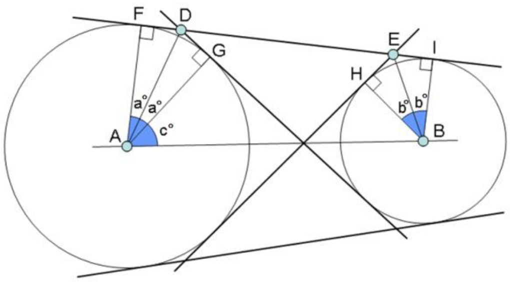

圖 15

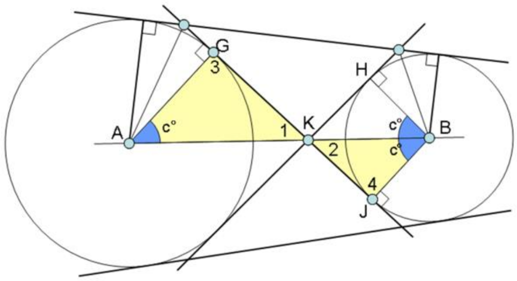

圖 16

如圖 17，$\because \overline{AF} // \overline{BI}$ ，

$\therefore \angle FAB+\angle IBA=180°$ ，

即 $(2a+c)+(2b+c)=180$ ，

化簡得 $a+b+c=90$

在四邊形 ABED 中，

$\angle DAB+\angle BED=(a°+c°)+(b°+90°)$

$=a°+b°+c°+90°=180°$

故得知 A、B、D、E 同在一個圓上。

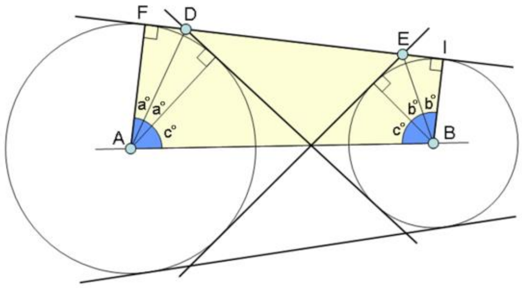

圖 17

由上述討論知此三圓的圓心皆為 $\overline{AB}$ 的中點，故此三圓為同心圓。

二、面積成等差數列

設圓 A、圓 B 的半徑分別為 R、r（R>r），$\overline{AB}=a$ ，取 $\overline{AB}$ 的中點 C，將三個同心圓之半徑由大而小設為 r_3 、 r_2 、 r_1 （$r_3>r_2>r_1$），以下將求三圓的面積。

1. 如圖 18，在 ΔCDF 中，

$\overline{DF}=\dfrac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{2}$（外公切線長的一半），$\overline{CF}=\dfrac{R+r}{2}$ （梯形中線），則

$r_3{}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2 = \dfrac{a^2}{4} + Rr$，再得面積為 $(\dfrac{a^2}{4} + Rr)\pi$.

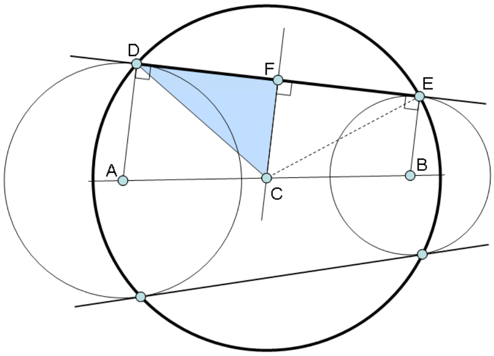

圖 18

2. $\overline{AB}$ 為第二個圓的直徑，得 $r_2 = \dfrac{a}{2}$，再得面積為 $\dfrac{a^2}{4}\pi$.

3. 如圖 19，在△CDH 中，$\overline{DH} = \dfrac{\sqrt{a^2 - (R+r)^2}}{2}$（內公切線長的一半），$\overline{CH} = \overline{CG} - \overline{GH} = \dfrac{1}{2}\overline{AF} - \overline{GH}$ $= \dfrac{R+r}{2} - r = \dfrac{R-r}{2}$，則 $r_3{}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{CG}^2$ $= \dfrac{a^2}{4} - Rr$，再得面積為 $(\dfrac{a^2}{4} - \mathrm{R}r)\pi$.

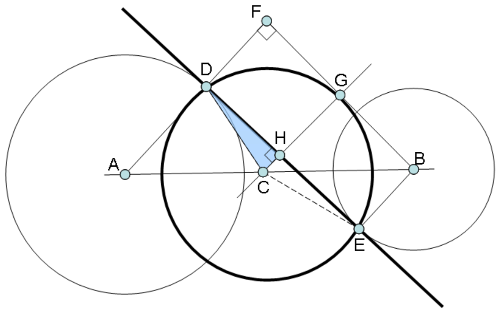

圖 19

此三圓面積分別為 $(\dfrac{a^2}{4} - \mathrm{R}r)\pi$ 、$\dfrac{a^2}{4}\pi$ 、$(\dfrac{a^2}{4} + Rr)\pi$ ，即得三個圓的面積成等差數列，公差為 $Rr\pi$ 。

參、結論

本文同心圓、面積成等差數列之性質源自於以 GSP 動態軟體作圖時之發現，一開始，筆者藉由三角函數，利用各點座標之計算來驗證，然而，其繁雜的運算令人望而生畏且缺乏趣味。本文藉由國中所學的對稱等幾何性質來推理，提供活用性質解題的有趣實例，供讀者參考。