# 三角形的西瓦線長與斯特瓦特定理

傅淑婷 [1*] 蘇志宏 [1] 陳昭地 [2]
[1]臺北市立敦化國民中學
[2]國立臺灣師範大學 數學系

## 壹、前言

主筆者在敦化國中數理資優班任教十餘年中，發現資優學生的優點就是對於不同單元甚至不同領域的課程很能觸類旁通互相聯想。雖然國民中學數學課程的編排，原則上是先代數後幾何，但是思考靈活的學生還是可以提早接觸幾何。 最近的一年(2013)由台灣師大數學系陳昭地教授指導，編寫國家教育研究院國民中學數學教材原型的過程中，將重點放在幾何領域的題材，同時設定許多八年級下學期學生可以提前瞭解並學習的幾何單元，期待國中數學教師可以在適當的時機引用，或是推薦學生作為補充或提前自學教材。

國民中學數學教材原型的 C 冊（下），在第 3-3 主題：「處處多數是等腰三角形」與第 3-5 主題：「三角形的三心」，循序漸進地介紹了三角形的三邊上的高、中線、中垂線與角平分線。在第 3-7 主題：「直角三角形母子相似定理與海龍公式」，這個單元對從直角三角形到任意三角形中，高與面積間的定量關係有很清楚的詮釋。但是中線與角平分線長呢？

翻看整個國中數學教材，大概只處理一些特殊三角形，如等腰三角形或直角三角形的中線與角平分線長，一直要到高中學完三角函數，才可以比較簡易的解決這個問題。本文想以國中生就可以瞭解的畢氏定理，引入說明斯特瓦特定理( Stewart’s Theorem )，並且利用斯特瓦特定理，輕鬆地解決以任意三角形的三邊長來表示三角形的西瓦(Cevian)線段，例如中線與角平分線長的問題。

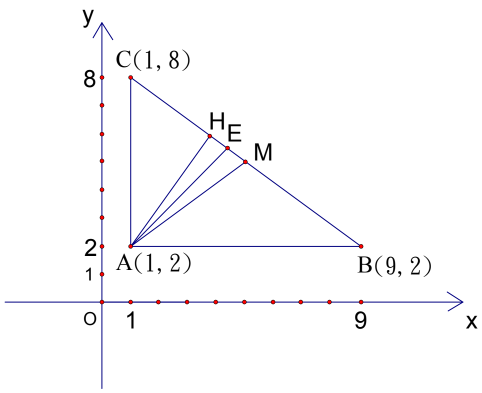
## 貳、本文

以我們的經驗教七年級下學期直角坐標單元時，這是第一個適合加入一些幾何圖形探討的時機，只不過是以坐標幾何的觀點。在國家教育研究院國民中學數學教材原型的 B 冊，第 3-1 主題：「比例教學篇斜率」，主筆者以在資優班補充的斜率教材為基礎，利用比例的觀點編寫適合一般國中生可以理解的斜率概念，這份教材在試教後獲得很好的迴響，充分說明國中生就可以引進學習斜率。同時在該單元教學參考資料(180 頁)探討了垂直的二直線，其斜率間的關係式為斜率相乘等於 −1。這樣就解決了坐標平面上三角形高所在的直線方程式，請見以下例題說明。

*為本文通訊作者

## 例題 1

在坐標平面上有△ABC，已知 A(1, 2)、B(9, 2)、C(1, 8)。若 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AH}=h_a$，中線 $\overline{AM}=m_a$，角平分線 $\overline{AE}=t_a$。試分別求高 $\overleftrightarrow{AH}$，中線 $\overleftrightarrow{AM}$，角平分線 $\overleftrightarrow{AE}$ 的直線方程式，進一步算算看高 $h_a$、中線 $m_a$、角平分線 $t_a$ 的長度。




先從最單純的 $\overline{BC}$ 中點坐標為 M(5, 5)看起 $\Rightarrow$ 中線 $\overline{AM}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=5$，中線 $\overleftrightarrow{AM}$ 的直線方程式為 $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$。次求角平分線 $\overline{AE}$，可利用內角平分線內分比 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{8}{6}$，再利用 $\overline{BC}$ 中 4：3 的分點公式，計算出 E 坐標為 $\frac{3}{7}(9,2)+\frac{4}{7}(1,8)=(\frac{31}{7},\frac{38}{7})$

$$\Rightarrow \text{角平分線}\overline{AE}=\sqrt{\left(\frac{31}{7}-1\right)^2+\left(\frac{38}{7}-2\right)^2}=\frac{24\sqrt{2}}{7}$$

通過 A(1, 2)和 E$(\frac{31}{7},\frac{38}{7})$，所以角平分線 $\overleftrightarrow{AE}$ 的直線方程式為 $y=x+1$。最後求高 $\overleftrightarrow{AH}$ 的直線方程式。我觀察學生喜歡用斜率，可見斜率的概念很容易上手。先求 $\overline{BC}$ 的斜率 $\frac{2-8}{9-1}=-\frac{3}{4}$，與 $\overline{BC}$ 垂直的 $\overline{AH}$ 其斜率為 $\frac{4}{3}$，通過 A(1, 2)且斜率為 $\frac{4}{3}$，即可求出高 $\overleftrightarrow{AH}$ 的直線方程式為 $y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$，此時求得 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線方程式為 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{35}{4}$。聯立解上述兩方程式得到垂足 H 坐標為 $(\frac{97}{25},\frac{146}{25})\Rightarrow \text{高}\overline{AH}=\sqrt{\left(\frac{97}{25}-1\right)^2+\left(\frac{146}{25}-2\right)^2}=\frac{24}{5}$

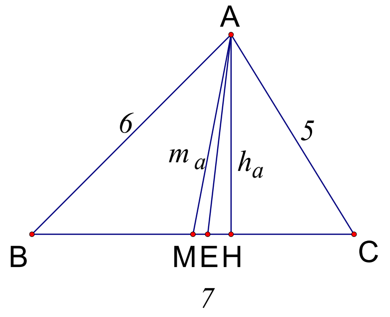
這個求高與其直線方程式，其實是適用於任何三角形。聰明的讀者可能早就發現直角三角形斜邊上的高，只要利用面積概念，其實可以更快地就計算出

$$\Rightarrow \text{高}\overline{AH}=\frac{6\times 8}{10}=\frac{24}{5}$$

上述例題就是典型的利用坐標幾何來處理問題，如果給定的不是直角三角形，處理模式還是一樣，算是解決三角形高、中線、角平分線的問題。但是如果三邊長數值取的不好甚至是無理數，計算過程可能變得非常繁複，這就是坐標幾何最常碰到的缺失。至於跳脫直角坐標系，求任意三角形的高、中線、角平分線的長度又如何？請見以下例題說明。

## 例題 2

如圖△ABC，∠A 的對邊 $a=7$，∠B 的對邊 $b=5$，∠C 的對邊 $c=6$。已知 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AH}=h_a$，中線 $\overline{AM}=m_a$，角平分線 $\overline{AE}=t_a$。試求 $h_a,m_a,t_a$ 的長。




本題先求高 $\overline{AH}$，為此可令 $\overline{BH}=x$，$\overline{CH}=7-x$，利用畢氏定理可得 $6^2-x^2=5^2-(7-x)^2$ 求得 $\overline{BH}=x=\frac{30}{7}$，再用畢氏定理求得高 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-\left(\frac{30}{7}\right)^2}=\frac{12}{7}\sqrt{6}$

若要再求中線 $\overline{AM}$，這時可利用直角△AMH 畢氏定理。先求出 $\overline{BM}=\frac{7}{2}$，所以

$$\overline{MH}=\overline{BH}-\overline{BM}=\frac{30}{7}-\frac{7}{2}=\frac{11}{14}$$

$$\Rightarrow \text{中線}\overline{AM}=\sqrt{\left(\frac{11}{14}\right)^2+\left(\frac{12}{7}\sqrt{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{2}$$

同理求角平分線 $\overline{AE}$，也可以利用直角△AEH。先利用內角平分線內分比 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6}{5}$，求出 $\overline{BE}=7\times\frac{6}{6+5}=\frac{42}{11}$

所以 $\overline{EH}=\overline{BH}-\overline{BE}=\frac{30}{7}-\frac{42}{11}=\frac{36}{77}$

$$\Rightarrow \text{角平分線}\overline{AE}=\sqrt{\left(\frac{36}{77}\right)^2+\left(\frac{12}{7}\sqrt{6}\right)^2}=\frac{12\sqrt{15}}{11}$$

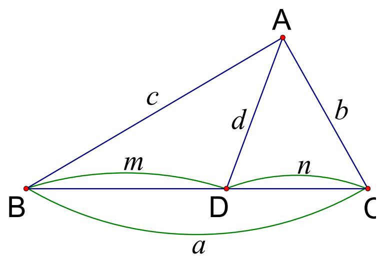
如果讀者實際動手作作看，就可以知道上述求中線與角平分線長的計算非常繁複，難怪國中老師們很少用這樣的考題來考驗學生，因為到了高中我們有更好的工具來解決這個問題，或是接下來要介紹的就是國中學生可以瞭解的斯特瓦特定理。這個定理是蘇格蘭數學家 Matthew Stewart 在西元 1975 年發表，用來求解三角形中西瓦線段的長度。

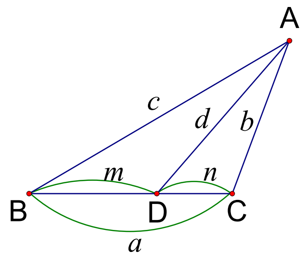
## 斯特瓦特定理：

△ABC 中，∠A 的對邊 $\overline{BC}=a$，∠B 的對邊 $\overline{AC}=b$，∠C 的對邊 $\overline{AB}=c$，D 是 $\overline{BC}$ 上的任意點，ΔABC 的西瓦線段就是指 $\overline{AD}$，$\overline{AD}$ 的長度與ΔABC 的三邊長有很簡易的關係式：

$$c^2n+b^2m=a(d^2+mn)$$

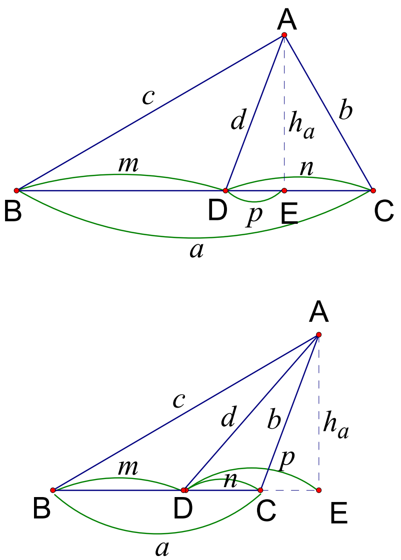
(其中 D 點將 $\overline{BC}$ 分成兩線段，假設 $\overline{BD}=m\,,\overline{DC}=n\,,\overline{AD}=d$ 。)




想要證明斯特瓦特定理，只需畫出 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AE}=h_a$，並假設 $\overline{DE}=p$，如下圖(1)。然後利用中學生就知道的直角三角形畢氏定理，就可以推論出結果。考慮△ABC 可能是銳角、直角、鈍角三角形，

在證明過程中只是圖形位置不同，並不影響證明結果，讀者可以自行參考兩種圖形。




圖(1)

看直角△ABE：

$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$，即 $c^2=h_a{}^2+(m+p)^2$......(1)

看直角△ADE：$h_a{}^2=d^2-p^2$ 代入(1)式，

可得

$$c^2=h_a{}^2+(m+p)^2=d^2-p^2+m^2+2mp+p^2$$
$$=d^2+m^2+2mp \text{ ..............................(2)}$$

同理看直角△ACE：

$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$，即 $b^2=h_a{}^2+(n-p)^2$....(3)

將 $h_a{}^2=d^2-p^2$ 代入(3)式，可得

$$b^2=h_a{}^2+(n-p)^2=d^2-p^2+n^2-2np+p^2$$
$$=d^2+n^2-2np \text{ ...............................(4)}$$

$(2)\times n+(4)\times m$ ：

$$c^2n+b^2m$$
$$=(d^2n+m^2n+2mnp)+(d^2m+mn^2-2mnp)$$
$$=d^2(n+m)+mn(m+n)$$
$$=d^2a+mna=a(d^2+mn)$$

即得斯特瓦特定理：$c^2n+b^2m=a(d^2+mn)$

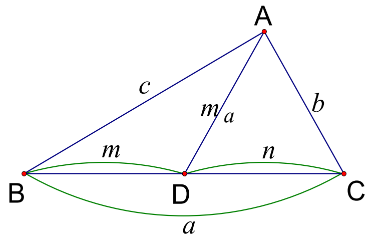
原來只要利用國中學生瞭解的畢氏定理，就可以證明斯特瓦特定理，如果是高中生也可以嘗試用餘弦定理證明看看。既然斯特瓦特定理是探討 $\overline{AD}$ 的長，所以就可以輕鬆地利用斯特瓦特定理，算出三角形的中線長與內角平分線長。

(一)計算△ABC 的中線長 $\overline{AD}$ 時，只需假設 $n=m=\dfrac{a}{2}$，代入斯特瓦特定理

$c^2n+b^2m=a(d^2+mn)$，則

$$(c^2+b^2)\times\frac{a}{2}=a(m_a{}^2+\frac{a^2}{4})$$

得到中線長公式：$m_a{}^2=\dfrac{(c^2+b^2)}{2}-\dfrac{a^2}{4}$

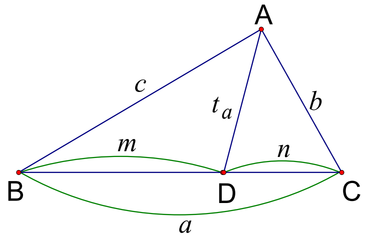



(二)計算△ABC 的內角平分線長 $\overline{AD}$ 時，

因為內角平分線的內分比性質 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{c}{b}$

所以可以算出 $m=\dfrac{ac}{c+b}, n=\dfrac{ab}{c+b}$ 代入

斯特瓦特定理 $c^2n+b^2m=a(d^2+mn)$




則 $c^2\times\dfrac{ab}{c+b}+b^2\times\dfrac{ac}{c+b}=a(t_a{}^2+\dfrac{a^2bc}{(c+b)^2})$

$$\Rightarrow\frac{bc^2}{c+b}+\frac{b^2c}{c+b}=t_a{}^2+\frac{a^2bc}{(c+b)^2}$$

得到內角平分線長公式

$t_a{}^2=(\dfrac{bc^2+b^2c}{c+b})-\dfrac{a^2bc}{(c+b)^2}=bc-mn$ 或

$$t_a{}^2=(\frac{bc^2+b^2c}{c+b})-\frac{a^2bc}{(c+b)^2}=bc\left[1-\left(\frac{a^2}{(c+b)^2}\right)\right]$$

(三) 嘗試用上述兩個公式驗證例題 2 的結果：

$$m_a{}^2=\frac{(c^2+b^2)}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{(6^2+5^2)}{2}-\frac{7^2}{4}=\frac{73}{4}$$

$\Rightarrow$ 中線 $m_a=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$ 求內角平分線時，先

求出 $m=7\times\dfrac{6}{6+5}=\dfrac{42}{11}$，$n=7\times\dfrac{5}{6+5}=\dfrac{35}{11}$

$$t_a{}^2=bc-mn=5\times6-\frac{42}{11}\times\frac{35}{11}$$

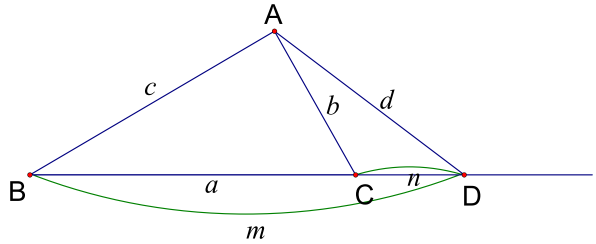
$=\dfrac{5\times6\times11^2-6\times7\times5\times7}{11^2}=\dfrac{5\times6\times72}{11^2}$ 或

$$t_a{}^2=bc\left[1-\left(\frac{a^2}{(c+b)^2}\right)\right]$$

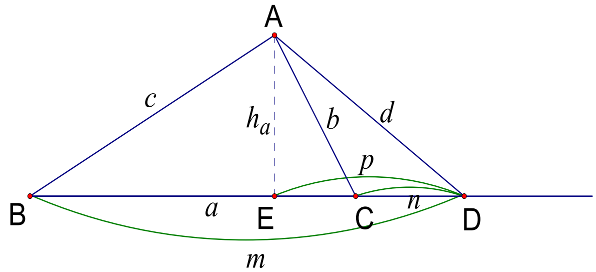
$$=5\times6\left[1-\frac{7^2}{(5+6)^2}\right]=\frac{5\times6\times72}{11^2}$$

$\Rightarrow t_a=\sqrt{\dfrac{5\times6\times72}{11^2}}=\dfrac{12\sqrt{15}}{11}$ 驗算正確無誤。

底下我們再討論 D 是 $\overline{BC}$ 之外分點的斯特瓦特定理：$c^2n-b^2m=a(-d^2+mn)$




(其中 D 點在 $\overline{BC}$ 之外，還是假設 $\overline{BD}=m$, $\overline{DC}=n$, $\overline{AD}=d$。)證明如下圖(2)，畫出 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AE}=h_a$，並假設 $\overline{DE}=p$。




圖(2)

看直角△ABE：$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$，

即 $c^2=h_a{}^2+(m-p)^2\ldots(1)$

$h_a{}^2=d^2-p^2$ 代入(1)式，可得

$c^2=d^2+m^2-2mp\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

同理看直角△ACE：$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$

即 $b^2=h_a{}^2+(p-n)^2\ldots.(3)$

$h_a{}^2=d^2-p^2$ 代入(3)式，可得

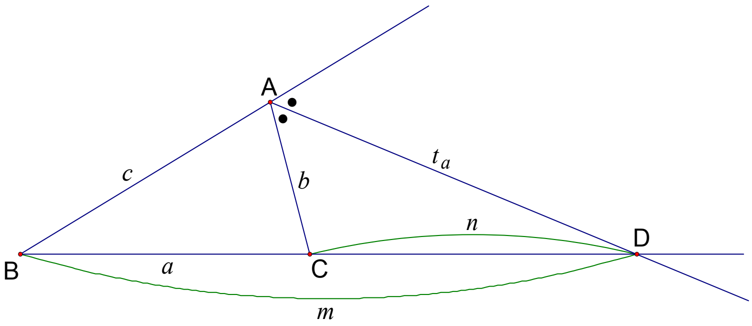
$b^2=d^2+n^2-2np\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

$(2)\times n-(4)\times m$ ：

$c^2n-b^2m=(d^2n+m^2n-2mnp)-(d^2m+mn^2-2mnp)$
$=d^2(n-m)+mn(m-n)=(m-n)(-d^2+mn)=a(-d^2+mn)$

即得 D 點如果在 $\overline{BC}$ 之外的斯特瓦特定理： $c^2n-b^2m=a(-d^2+mn)$ 。

(四)計算△ABC 的外角平分線長 $\overline{AD}$ 時，因為外角平分線的外分比性質 $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$



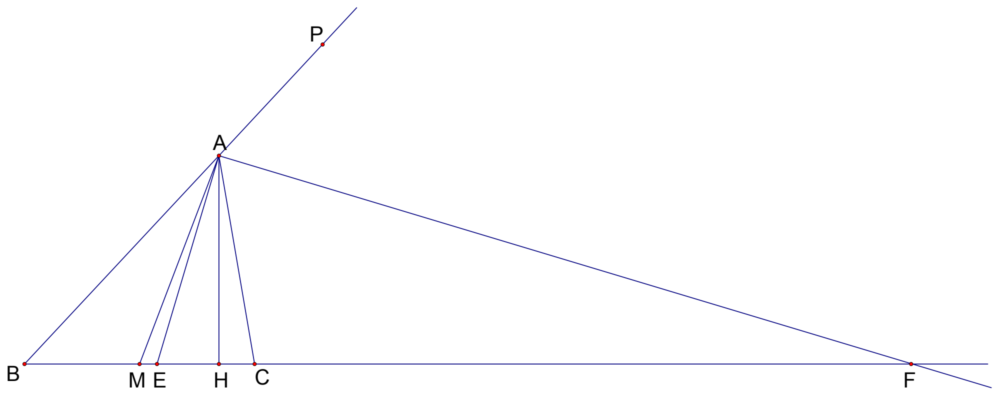

所以可以算出 $m=\frac{ac}{c-b}$ , $n=\frac{ab}{c-b}$ 代入 $c^2n-b^2m=a(-d^2+mn)$

則 $c^2\times\frac{ab}{c-b}-b^2\times\frac{ac}{c-b}=a(-t_a{}^2+\frac{a^2bc}{(c-b)^2})$

$\Rightarrow\frac{bc^2}{c-b}-\frac{b^2c}{c-b}=-t_a{}^2+\frac{a^2bc}{(c-b)^2}$ 得到外角平分線長公式 $t_a{}^2=\frac{a^2bc}{(c-b)^2}-(\frac{bc^2-b^2c}{c-b})=mn-bc$

或 $t_a{}^2=\frac{a^2bc}{(c-b)^2}-bc=bc\left[\left(\frac{a^2}{(c-b)^2}\right)-1\right]$

(五)接下來我們提出一個問題，請用本文的方法練習算算看：



如圖△ABC 中，$\overline{AB}$=15，$\overline{BC}$=14，$\overline{AC}$=13，

(1) 試分別求過 A 的高 $\overline{AH}$ 與中線 $\overline{AM}$ 的長。

(2) 若∠A 的內角平分線 $\overline{AE}$，外角平分線 $\overline{AF}$，試求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{AF}$ 的長。

(解答請見全文最後)

## 參、結語

本文利用國中學生所熟悉的畢氏定理，介紹證明斯特瓦特定理。這個定理探討△ABC 中，若 D 是直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的任意點，只要知道△ABC 的三邊長與 D 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 的位置，就可以算出西瓦線段 $\overline{AD}$ 的長。

至於國中數學課程中大家很熟悉的中線長、內角平分線長與外角平分線長，如果以國中的基本概念計算起來非常繁複。新定理的引用就是要更簡潔、方便，斯特瓦特定理正好具備這樣的條件，相信可以給國中數學課帶來小小的驚喜。希望在老師的帶領或學生補充自學下，大家可以感受到斯特瓦特定理強大的功用。

## 肆、參考文獻

傅淑婷、陳昭地(2013)。比例教學篇斜率，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊 (pp.163-182)。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-3)。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地(2013)。三角形的三心，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-5)。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地(2013)。直角三角形母子相似定理與海龍公式，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-7)。新北市：國家教育研究院。

李政豐、陳昭地(2013)。銳角三角形的九點圓，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 5-5)。新北市：國家教育研究院。

A.S.Posamentier & J. Stepelman(1986). Unit 47：Finding The Length Of A Cevian Of A Triangle (pp.291-293) In Posamentier S.A. & Stepelman J. (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics(2nd Ed.)，Columbus，OH：Merrill.

## 備註：

(五)解答：

(1) 高 $\overline{AH}=12$，中線 $\overline{AM}=2\sqrt{37}$。

(2) 內角平分線 $\overline{AE}=\dfrac{3\sqrt{65}}{2}$，外角平分線 $\overline{AF}=12\sqrt{65}$。