

# 圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣(下)

李輝濱

嘉義縣私立同濟高級中學

(三) 第三類型  $n=4k+2$  請參閱圖(6)

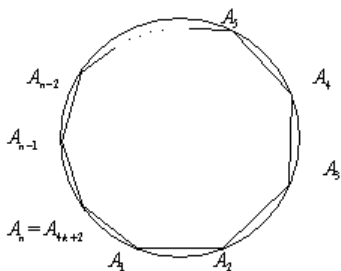


圖 6

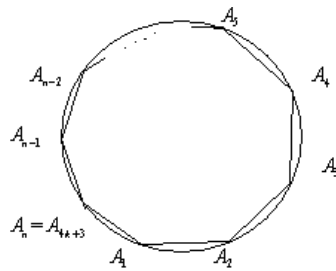


圖 7

(B-3-s-1). 倣效第一類型  $n=4k$  的推導過程；自 引理 1. 的方程式(2)開始，一直到方程式(4)的運算結果皆完全相等，故省略此部份流程的步驟，直接得到方程式(4)如下：

$$\begin{aligned}
 & V_2 \sin \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \pi - \phi - \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \right] \\
 & + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \sin \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \pi + \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] A_{2i+1} - \phi - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1}^{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & + \sum_{m=\frac{1}{4} [2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^{m+1} V_m \sin \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \pi + \phi - \left( \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1}^{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1}^{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right) \right] \\
 & - V_n \sin \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \pi + \phi - \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1}^{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} A_{2i+1} \right] = 0 \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

(B-3-s-2). 再由  $[(n/2) - 1]\pi = 2k\pi$ ，可得  $\sin\{(n/2) - 1\}\pi = 0$  及  $\cos\{(n/2) - 1\}\pi = 1$  則將此方程式(4)展開並化簡，即得下列方程式(B-3-5)

$$\begin{aligned}
 & V_2 \sin \left[ \phi + \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i} \right] \\
 & - \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \sin \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & + \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \sin \left[ \phi - \left( \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right) \right] \\
 & + V_n \sin \left[ \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]} A_{2i+1} \right] = 0 \dots \dots \dots (\text{B-3-5})
 \end{aligned}$$

(B-3-s-3). 將方程式 (B-3-5) 展開並重新組合各項, 提出  $\sin \phi$  與  $\cos \phi$ , 整理成下式 (B-3-6) ;

$$P_3 \cdot \sin \phi + R_3 \cdot \cos \phi = 0 \dots \dots \dots (\text{B-3-6})$$

$$\begin{aligned}
 P_3 = & V_2 \cos \left[ \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i} \right] + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \cos \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & + \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \cos \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] + V_n \cos \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]} A_{2i+1} \right] \\
 R_3 = & V_2 \sin \left[ \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i} \right] - \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \sin \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & - \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \sin \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)+1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] - V_n \sin \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]} A_{2i+1} \right]
 \end{aligned}$$

(B-3-c). 同理倣效前述 (B-1-c). 與 (B-2-c). 之餘弦關係式的推導過程(省略), 可得下列方程式 (B-3-7) ;

$$V_1 = P_3 \cdot \cos \phi - R_3 \cdot \sin \phi \dots \dots \dots (\text{B-3-7})$$

(B-3-d). 求出  $n = 4k+2$  多邊形的正弦公式、餘弦公式

聯立解出方程式 (B-3-6) 與方程式 (B-3-7), 得

$$P_3 = V_1 \cos \phi \dots\dots\dots(17) \text{ 與 } R_3 = -V_1 \sin \phi \dots\dots\dots(18)$$

再利用(3-a)式, 求出  $\sin \phi = -\sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right]$  及  $\cos \phi = \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right]$

將此兩式代入方程式(17)與方程式(18), 再移項, 整理成正弦公式、餘弦公式, 如下;

$$\begin{aligned} & V_1 \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right] - V_2 \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right] \\ & + \sum_{m=3} \frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n] (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\ & + \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\ & + V_n \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] = 0 \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_1 \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right] - V_2 \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right] \\ & - \sum_{m=3} \frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n] (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\ & - \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] V_n \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] \\ & = 0 \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

以上所得證之方程式(19)為  $n = 4k+2$  平面凸多邊形的正弦公式, 而另一個方程式 (20) 則為此  $n = 4k+2$  平面凸多邊形的餘弦公式。此結果恰與  $n=4k$  方程式(11)、方程式(12)完全相同。

(四)第四類型  $n=4k+3$  請參閱圖(7)

(B-4-a). 同理,再做效第二類型  $n=4k+1$  的推導過程; 此次省略所有流程步驟, 直接敘述出結果如下:

$$\begin{aligned}
 & V_1 \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right] - V_2 \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right] \\
 & + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & + \sum_{m=\frac{1}{4} [2n+7+(-1)^n]}^{n-2} (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & + V_{n-1} \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-7-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] - V_n \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] = 0 \quad \dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V_1 \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i} \right] - V_2 \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right] - \\
 & \frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n] \sum_{m=3} (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] - \\
 & \sum_{m=\frac{1}{4} [2n+7+(-1)^n]}^{n-2} (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & V_{n-1} \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-7-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] + V_n \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] = 0 \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

以上方程式(21)為  $n=4k+3$  平面凸多邊形的正弦公式, 而另一個方程式(22)則為此  $n=4k+3$  平面凸多邊形的餘弦公式。

(五)平面凸多邊形的正弦公式、餘弦公式

現在, 將以上平面凸多邊形四種類型的正弦、餘弦公式推證結果作一個詳細的觀察

對照，發現  $n=4k$  與  $n=4k+2$  兩者的公式完全相同。而另一組  $n=4k+1$  與  $n=4k+3$  者亦完全相同。比較之後，奇數邊多邊形都比前一個偶數邊者多出最後一項。將這樣的結果歸納出下述**定理 1**：

**定理 1**：平面凸多邊形有偶數邊多邊形及奇數邊多邊形兩類型：

- (1) 偶數邊多邊形類型者，其正弦、餘弦公式分別為方程式(11)、方程式(12)
- (2) 奇數邊多邊形類型者，其正弦、餘弦公式分別為方程式(21)、方程式(22)

三、圓內接多邊形的正弦公式、餘弦公式

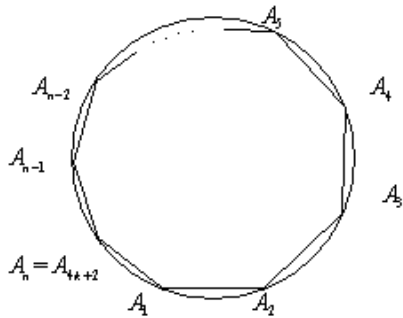


圖 8

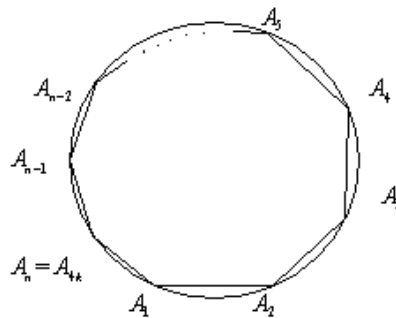


圖 9

**定理 2**：圓內接偶數邊多邊形的正弦公式、餘弦公式 請參閱圖(8)、(9)

任給一個圓內接偶數邊多邊形，則其各邊長與各內角恰可形成下述的正弦、餘弦公式：

$$\begin{aligned}
 & V_2 \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right] - \frac{1}{4} [2n+3+(-1)^n] \sum_{m=3} (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & - \sum_{m=\frac{1}{4} [2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \sin \left[ \frac{1}{4} [2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4} [2(n-m)+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & - V_n \sin \left[ \frac{1}{4} [2n-3-(-1)^n] \sum_{i=1} A_{2i+1} \right] = 0 \dots \dots \dots (23) \\
 & (-1)^{\frac{n}{2}-1} V_1 - V_2 \cos \left[ \frac{1}{4} [2n-1+(-1)^n] \sum_{i=2} A_{2i} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \sum_{m=3}^{2n+3+(-1)^n} (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2m-3-(-1)^m} A_{2i+1} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2(n-m)+1-(-1)^m} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & - \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-1} (-1)^m V_m \cos \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2m-3-(-1)^m} A_{2i+1} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2(n-m)+1-(-1)^m} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \right] \\
 & - V_n \cos \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n-3-(-1)^n} A_{2i+1} \right] = 0 \dots \dots \dots (24)
 \end{aligned}$$

證明：因  $n=4k$  或  $4k+2$ ，由 引理 3. 知其所有偶(奇)數標內角總和皆恰為  $(2k-1)\pi$  或  $2k\pi$ ，

故方程式(11)的第一項為零，而方程式(12)的第一項為  $(-1)^{\frac{n}{2}-1}$ ，代入(11)式、(12)式，即得證出 方程式(23) 為圓內接偶數邊多邊形的正弦公式，而 方程式(24) 則為圓內接偶數邊多邊形的餘弦公式。而對於另一類型的圓內接奇數邊多邊形，其各邊長與各內角必滿足方程式(21)、方程式(22)的正弦、餘弦公式。

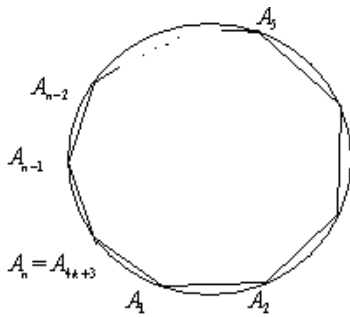


圖 10

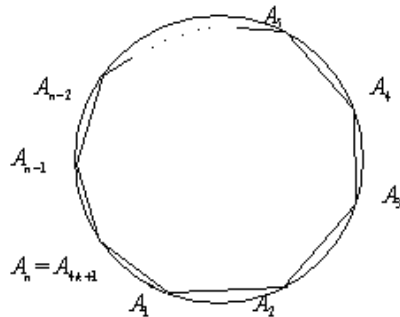


圖 11

#### 四、圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣

定理 3.：圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣公式請參閱圖(10)、(11)考慮一個圓內接奇數邊多邊形，其邊數為  $n$ ， $R$  為此圓的半徑，則對任何奇數自然數  $n > 2$ ，由此  $n$  邊形的各邊長與各內角所組成下述的正比例型正弦公式(25) 必成立；

$$\frac{V_t}{\sin \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2(n-t)-1-(-1)^t} A_{t+2i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2t-1+(-1)^t} A_{2i-\frac{1+(-1)^t}{2}} \right)} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2R \dots (25)$$

此處， $1 \leq t \leq n$ ， $t$  與  $i$  均為自然數， $V_t$  為此多邊形的第  $t$  邊邊長，且規定

$$\sum_{i=1}^0 A_{t+2i} = 0, \quad \sum_{i=1}^0 A_{2i} = 0, \quad \sum_{i=1}^0 A_{2i-1} = 0$$

上述的方程式 (25) 即稱為圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣公式。

**證明：key idea：** 見圖(10)，因  $n = 4k+1$  邊的奇數邊多邊形實為  $n = 4k$  的偶數邊多邊形與一個三角形的組合，以此作為奇數邊形與偶數邊形的連結，並依據此連結證明如下；

(1). 先考慮  $n = 4k+1$  的情形，見圖(10)，

(1-A). 將  $n = 4k+1$  代入方程式(15)、(16)中，即得下列兩式；

$$\begin{aligned} & V_1 \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) - V_2 \sin\left(\sum_{i=2}^{2k} A_{2i}\right) \\ & + \sum_{m=3}^{2k+1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\ & + \sum_{m=2k+2}^{4k-1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\ & + V_{4k} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) - V_{4k+1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i+1}\right) = 0 \dots \dots \dots (15-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_1 \cos\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) - V_2 \cos\left(\sum_{i=2}^{2k} A_{2i}\right) \\ & - \sum_{m=3}^{2k+1} (-1)^m V_m \cos\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\ & + \sum_{m=2k+2}^{4k-1} (-1)^m V_m \cos\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\ & - V_{4k} \cos\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) + V_{4k+1} \cos\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i+1}\right) = 0 \dots \dots \dots (15-2) \end{aligned}$$

此(15-1)、(15-2)兩式即為圓內接  $n = 4k+1$  邊數多邊形的正弦、餘弦公式。

(1-B). 觀察圖(10)，可知頂點  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{4k}$  等恰也構成一個圓內接偶數

邊多邊形，現在指定這  $4k$  邊多邊形，由圖(10)的部份放大圖圖(12)中可見；頂點  $A_{4k}$  位置的頂角應為  $A_{4k} - \theta$ ，

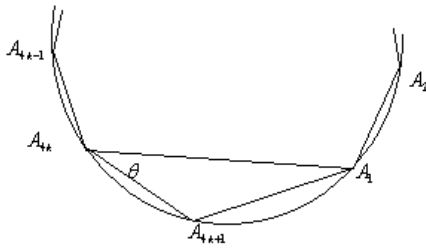


圖 12

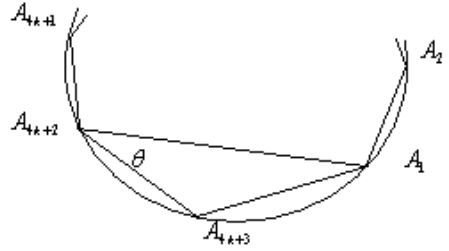


圖 13

而第  $4k$  邊的邊長應為  $\overline{A_{4k}A_1}$ ；所以，對此圓內接  $4k$  邊多邊形言，方程式(23)應修正為下式，

$$\begin{aligned}
 & V_2 \sin\left(\sum_{i=2}^{2k} A_{2i} - \theta\right) \\
 & - \sum_{m=3}^{2k+1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i} - \frac{1-(-1)^m}{2} + \theta\right] \\
 & - \sum_{m=2k+2}^{4k-1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i} - \frac{1-(-1)^m}{2} + \theta\right] \\
 & - \overline{A_{4k}A_1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) = 0 \dots\dots\dots(15-3)
 \end{aligned}$$

(1-C) 將(15-3)式展開，化簡，再分別提出  $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ ，並整理成下式，

$$P_5 \cos\theta + R_5 \sin\theta - \overline{A_{4k}A_1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) = 0 \dots\dots\dots(15-4)$$

$$\begin{aligned}
 P_5 & = V_2 \sin\left(\sum_{i=2}^{2k} A_{2i}\right) \\
 & - \sum_{m=3}^{2k+1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i} - \frac{1-(-1)^m}{2}\right] \\
 & - \sum_{m=2k+2}^{4k-1} (-1)^m V_m \sin\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i} - \frac{1-(-1)^m}{2}\right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 R_5 = & -V_2 \cos\left(\sum_{i=2}^{2k} A_{2i}\right) \\
 & - \sum_{m=3}^{2k+1} (-1)^m V_m \cos\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\
 & - \sum_{m=2k+2}^{4k-1} (-1)^m V_m \cos\left[\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{2i+1} - \frac{1}{4}[8k-2m+1-(-1)^m] \sum_{i=1} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]
 \end{aligned}$$

分別比較  $P_5$  與(15-1)式 及  $R_5$  與(15-2)式，得下列等式；

$$P_5 = V_1 \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) + V_{4k} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) - V_{4k+1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i+1}\right) \dots\dots(15-5)$$

$$R_5 = -V_1 \cos\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) + V_{4k} \cos\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) - V_{4k+1} \cos\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i+1}\right) \dots(15-6)$$

接著，將(15-4)式等式兩側同乘以第 4k 邊的邊長，得下列等式(15-7)：

$$P_5 \times \overline{A_{4k}A_1} \cos\theta + R_5 \times \overline{A_{4k}A_1} \sin\theta - \overline{A_{4k}A_1}^2 \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i+1}\right) = 0 \dots\dots(15-7)$$

(1-D) 再看附圖(12)，由  $\theta$  角及第 4k 邊的邊長關係，可求得下列三式：

$$\begin{aligned}
 \overline{A_{4k}A_1} \cos\theta &= V_{4k} - V_{4k+1} \cos A_{4k+1} \dots(15-8) \\
 \overline{A_{4k}A_1} \sin\theta &= V_{4k+1} \sin A_{4k+1} \dots\dots\dots(15-9)
 \end{aligned}$$

$$\overline{A_{4k}A_1}^2 = V_{4k}^2 + V_{4k+1}^2 - 2V_{4k}V_{4k+1} \cos A_{4k+1} \dots\dots\dots(15-10)$$

現在將以上 (15-5)、(15-6)、(15-8)、(15-9)、(15-10)等五式一起代入等式(15-7)內；經過一連串的展開，化簡運算後，(此段落省略大部份計算流程)，終得下列精緻簡易結果；

$$V_{4k} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) = V_{4k+1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i} + A_{4k+1}\right) \dots\dots\dots(15-11)$$

(15-11)式中等號兩側的角度數目不相等，將右側角度和轉換成

$$(4k-1)\pi - \left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1}\right)$$

，並代入，再化簡，得

$$V_{4k} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right) = V_{4k+1} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1}\right) \dots\dots\dots(15-12)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{4k}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1}\right)} = \frac{V_{4k+1}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right)} \dots\dots\dots(15-13)$$

(1-E) 再看附圖(14)，由  $\theta$  角及各頂角的關係，並仿照引理 3 可求得下列二式：

$$\sum_{i=1}^{2k} A_{2i} = (2k-1)\pi + \theta_{4k+1} \dots\dots\dots(15-14)$$

$$\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1} = (2k-1)\pi + \theta_{4k} \dots\dots\dots(15-15)$$

將 (15-14)式、(15-15)式同時代入(15-13)式，化簡，並利用弦與圓周角性質，得下式：

$$\begin{aligned} \frac{V_{4k}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1}\right)} &= -\frac{V_{4k}}{\sin \theta_{4k}} = -2R \\ &= \frac{V_{4k+1}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right)} = -\frac{V_{4k+1}}{\sin \theta_{4k+1}} \dots\dots\dots(15-16) \end{aligned}$$

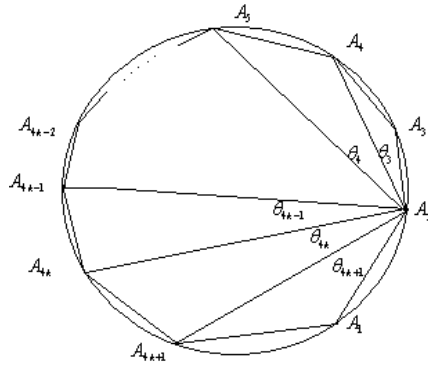


圖 14

現在詳細觀察(15-16)式，並參考附圖(10)，則可依序得出各邊長的正弦比例式如下：

$$\frac{V_{4k-1}}{\sin\left(A_{4k+1} + \sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i}\right)} = \frac{V_{4k}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i-1}\right)} = \frac{V_{4k+1}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{2i}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{V_1}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k} A_{1+2i}\right)} = \frac{V_2}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{2+2i} + A_1\right)} = \frac{V_3}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} A_{3+2i} + A_2\right)} \\
 &= \frac{V_4}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k-2} A_{4+2i} + \sum_{i=1}^2 A_{2i-1}\right)} = \frac{V_5}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k-2} A_{5+2i} + \sum_{i=1}^2 A_{2i}\right)} \\
 &= \frac{V_{4k-4}}{\sin\left(\sum_{i=1}^2 A_{4k-4+2i} + \sum_{i=1}^{2k-2} A_{2i-1}\right)} = \frac{V_{4k-3}}{\sin\left(\sum_{i=1}^2 A_{4k-3+2i} + \sum_{i=1}^{2k-2} A_{2i}\right)} \\
 &= \frac{V_{4k-2}}{\sin\left(A_{4k} + \sum_{i=1}^{2k-1} A_{2i-1}\right)} = -2R \dots\dots\dots(15-17)
 \end{aligned}$$

再詳細觀察此 (15-17) 式的各項邊長與各角度所組合成之數學結構，並將其歸納成下列的第 t 邊長一般式，而不論 t 是偶數或奇數都成立：

$$\frac{V_t}{\sin\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-t)-1-(-1)^t]} A_{t+2i} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2t-1+(-1)^t]} A_{2i-\frac{1+(-1)^t}{2}}\right)} = -2R \dots\dots\dots(15-18)$$

(2). 其次，考慮  $n=4k+3$  的情形，見圖(11)及圖(13)、圖(14)。因為此處所有的推導流程皆與上述  $n=4k+1$  的情況完全相同，省略這些敘述，直接列出演算推導的結果如下：

$$\frac{V_{4k+2}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i-1}\right)} = \frac{V_{4k+3}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i}\right)} \dots\dots\dots(21-1)$$

且  $\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i} = 2k\pi + \theta_{4k+3}$  及  $\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i-1} = 2k\pi + \theta_{4k+2}$

代入 (21-1) 式，化簡，並利用弦與圓周角性質，得下式：

$$\frac{V_{4k+2}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i-1}\right)} = \frac{V_{4k+3}}{\sin\left(\sum_{i=1}^{2k+1} A_{2i}\right)} = \frac{V_{4k+2}}{\sin\theta_{4k+2}} = \frac{V_{4k+3}}{\sin\theta_{4k+3}} = 2R \dots\dots(21-2)$$

再詳細觀察此(21-2)式，並比對圖(11)的各項邊長與角度數學結構，再仿照前述 (1-E) 的推演運算過程，將其各邊長的正弦比例式歸納成下列的第 t 邊長

$$\text{一般式：} \frac{V_t}{\sin \left( \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-t)-1-(-1)^t]} A_{t+2i} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2t-1+(-1)^t]} A_{2i-\frac{1+(-1)^t}{2}} \right)} = 2R \dots\dots\dots(21-3)$$

以上所得之方程式(21-3)式即為圓內接  $n=4k+3$  邊數多邊形的正弦定律公式。

(3). 現在比對方程式 ( 15-18 )式 與 方程式 ( 21-3 )式，發現等號右側相差一個負號，而等號左側完全相等；把這兩方程式再歸納統一起來即得下式，

$$\frac{V_t}{\sin \left( \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-t)-1-(-1)^t]} A_{t+2i} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2t-1+(-1)^t]} A_{2i-\frac{1+(-1)^t}{2}} \right)} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2R \dots\dots\dots(25)$$

此處，  $1 \leq t \leq n$  ，  $t$  與  $i$  均為自然數，  $V_t$  為此多邊形的第  $t$  邊邊長，  $n$

為奇數自然數  $n > 2$ ，且規定  $\sum_{i=1}^0 A_{t+2i} = 0$ ，  $\sum_{i=1}^0 A_{2i} = 0$ ，  $\sum_{i=1}^0 A_{2i-1} = 0$

上述的方程式(25)即稱為圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣公式。定理 3. 證明完成。

再仔細觀察，定理 3.的逆命題敘述也是成立的；只要利用反證法即歸繆法，配合圖(14)就能證明，在此省略。

方程式(25)的美妙之處是：

(a) 它涵納了三角形正弦定理；當  $n = 3$  代入方程式(25)中，即得出三角形正

$$\text{弦定理如下：} \quad \frac{V_1}{\sin A_3} = \frac{V_2}{\sin A_1} = \frac{V_3}{\sin A_2} = 2R$$

(b) 當  $n = 5$  代入方程式(25)中，即得圓內接五邊形的正比例型正弦公式如下；

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\sin(A_3 + A_5)} &= \frac{V_2}{\sin(A_4 + A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5 + A_2)} \\ &= \frac{V_4}{\sin(A_1 + A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_2 + A_4)} = -2R \end{aligned}$$

(c) 當  $n$  為任意奇數邊數的圓內接多邊形，其正比例型正弦公式表示式都可完整地敘述出來。而且對任意圓內接奇數邊數的多邊形言，其面積的表示式亦都與此正比例型正弦公式相關。

以上為本文全部推理演繹過程，因凸多邊形共有四種類型，必須逐一運算檢驗，才

能完整歸納得出所有正確結果，過程雖複雜但細心努力就可成功！

## 參、結 論

作者實際計算，發覺將多邊形的所有內角分配成兩部份的組合，並不侷限於全部偶數標內角及奇數標內角兩情況；可以任意選取所需的組合，像分別由偶數標內角及奇數標內角混合成的兩不同組合，因此得到的相關方程式如(11)、(12)、(21)、(22)、(23)、(24)等亦不相同，這種某些特定選取組合方式對於多邊形分割後的思考、運算很有助益。

平面凸多邊形的四種類型在推導演算過程中皆有其各自的相異點，必須逐一審慎確認，才能完美無瑕地尋獲所有正確結果。

平面凸  $n$  邊形的所有內角總和為  $(n-2)\pi$ ，將此所有內角適度地選取內角數目，組合成兩部份集合；當  $n$  為偶數，每一集合的內角總數目取相等。當  $n$  為奇數，每一集合的內角總數目則取相差一個內角。而此時，每一集合的內角總和皆可設定為此  $n$  邊形的所有內角總和的一半，再加減一個角度修正參數  $\phi$ ，而此  $\phi$  恰扮演了聯繫本文所有分析、運算流程的關鍵角色！也因為它的存在，才得以推導出一般型平面凸多邊形的正弦、餘弦公式。

圓內接奇數邊數的多邊形恰有兩類；第一類為  $n = 4k+1$  型，有五邊形、九邊形、十三邊形、...，其正比例型正弦公式即為方程式(15-18)式。第二類為  $n = 4k+3$  型，有三邊形、七邊形、十一邊形、...，其正比例型正弦公式即為方程式(21-3)式。兩種類型恰可統整成方程式 (25)。

在平面凸多邊形相關的數學領域中，能夠被探索、分析、研究的新性質應還有很多；希望讀者研讀本文後能朝此方向共同努力，再次發掘出新主題，並開拓出創新的研發領域。

## 參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形及凸六邊形面積的研究數學傳播第 141 期，101 年 3 月。

李輝濱，圓內接奇數邊多邊形的正弦定律，數學傳播季刊第 148 期，2013 年 12 月。

蔡聰明，數學拾貝--星空燦爛的數學，三民書局。

林聰源，數學史--古典篇，1995，凡異出版社。

世部貞市郎，幾何學辭典，1988，九章出版。

項武義，基礎幾何學，五南圖書出版公司。