# 探討學生對 HCK 取向與解題取向教學的知覺

林勇吉 [1*] 金鈴 [2]

[1] 國立嘉義大學 數理教育研究所

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

**摘 要**

本研究旨在整合眼界數學知識(Horizon Content Knowledge, [HCK])之模型，進而探討學生對於具有 HCK 取向與解題取向教學的知覺(perceptions)。針對 HCK 模型中的基礎數學知識(Fundamental mathematical knowledge )，我們設計「HCK 取向」與「解題取向」的教學方式，對 68 位高一學生分別進行這兩種不同取向的教學，請學生比較何種取向最能幫助他們學習。研究結果發現(1)學生普遍認為 HCK 取向的教學較能幫助他們瞭解整個問題的思考脈絡(73.5%)，對低成就學生更是如此(85.7%)；(2)不同數學成就學生存在不同偏好教學取向($\chi^2(2)=8.37$, $p<.05$)；(3)「數學成就」與「偏好 HCK 取向教學」呈現中度負相關($r=-.292$, $p<.05$)。整體而言，研究結果顯示 HCK 取向的教學較能幫助學生學習，尤其是中、低程度的學生，而高成就學生似乎較偏好「解題取向」的教學。

**關鍵詞：眼界數學知識(Horizon Content Knowledge, [HCK])、教數學所需的知識(MKT)、數學成就**

## 壹、前言

教師眼界數學知識(Horizon Content Knowledge, [HCK])意味教師具有更廣闊的視野於當前的數學內容(Ball, Thames& Phelps, 2008; Ball & Bass, 2009)，某些學者便直接將 HCK 定義為應用大學數學(如代數、微積分)於當前的教學內容(Zazkis & Mamolo, 2011)。透過 HCK，教師能夠判斷甚麼是教學中不可忽略數學內容；聽見學生想法背後的重要數學概念；知道當前的數學內容如何向前與向後發展，承先啟後(Jakobsen, Thames, Ribeiro& Delaney, 2012)。因此，具有 HCK 教師似乎能夠有更好的教學決策(流暢的教學)，並且更能夠幫助學生的學習(Zazkis & Mamolo, 2011)，然而這些對於 HCK 正向評價，並沒有實徵性研究來證實，也沒有具備 HCK 教師能夠幫助學生學習的確切證據，亦不瞭解從學生角度如何看待具有 HCK 與沒有 HCK 教學。

*為本文通訊作者

瞭解學生對於 HCK 取向教學(教學者具有 HCK)與解題取向教學(教學者沒有 HCK)的感受，具有研究上的重要價值。首先，這可以幫助我們瞭解 HCK 取向教學的是否真的能幫助學生學習，Ampadu (2012)認為從學生觀點來看待教師教學比直接分析教師的教學更具意義，因為學生是教學的直接感受者，由學生來看教學遠比只評量教師可獲得更豐富的資訊，先前一些研究贊成學生觀點的教學評量(e.g., Arthur, Tubre, Paul &Edens, 2003)。另外一方面，HCK 是一個相對新的名詞，學者對於其定義仍有爭議(e.g., Figueiras et al., 2011)，而 HCK 如何關連到教學尤其值得研究(Jakboson, Thames & Ribeiro, 2013)，本研究將實際探討 HCK 取向的「教學」(非只有討論教師 HCK 的定義)，藉由學生的回饋，我們將有機會健全對 HCK 的定義。基於此，本研究的目的如下：**瞭解高中學生對「HCK 取向」教學與「解題取向」教學的知覺(perceptions)。**

上述「解題取向」意謂，以解題為導向的教學方式，較注重如何解題成功，較忽略學生概念性的理解，即學校中較普遍的教學方式，以幫助學生獲得數學成績為主；特別說明這裡的「解題取向」，並非等同於 Polya(1945)的「數學解題」，這裡的解題取向是指教學偏向於補習班的教法，以能解決問題為主，不在意數學概念的連貫性。而「HCK 取向」意謂教學者具有 HCK，能夠帶領學生以更宏觀的角度看待當前的問題，特別重視解題中最基礎與最根本的核心概念。

## 貳、HCK 的定義

HCK 最早由 Ball(1990)提出，並在 Ball 和 Bass(2009)有更多的闡述，他們定義 HCK 是一種數學教學所需的周圍眼界(peripheral vision)，是一種可以看到更廣闊數學景色(larger mathematical landscape)的觀點。HCK 也是一種深層的瞭解，它將各個數學概念串聯(connected)起來，並且察覺數學概念對於未來學習的助益：

> 我們看到教學需要一種感覺(sense)，這個感覺是現在的所教的數學如何關連到更大的數學觀念、結構和原則。有些可能學生在更高的年級會學習到；有些是當前數學的核心(at the heart)(Ball & Bass, 2009, p.6)。

Ball 和 Bass 給了一個具體的例子：國小三年級數學課室，學生正在學習奇數與偶數，一位名叫 Sean 的學生舉手主張 6 可以是奇數也可以是偶數，因為 6 可分成 3 堆(2+2+2)與 2 堆(3+3)，老師察覺 Sean 的思考與如何定義奇數與偶數、以及與未來的學習有關，沒有立刻糾正他，反而讓全班來討論。在討論過程中，Mei 一般化 Sean 給的例子，發現只要是奇數乘以 2 都可以滿足 Sean 的數字。事實上，Sean 的數字滿足 2 (mod 4)的規則($2\times(2n+1)=4n+2$)，這類的數字遠在古希臘時代就被研究，當時數學家發現兩個自然數的平方相減不可能出現這類的數字(可以是 0, 1, -1, 3 (mode 4)，但不會是 2 (mode 4)，較詳細的說明見 Ball & Bass, 2009, p.9)。所以

Sean 的想法有著他自己可能也意想不到的數學意義，但是教師也許可以注意到。

Ball 和 Bass 的定義偏向從基礎數學的角度看待高階數學，但 Zazkis 和 Mamolo (2011)的定義較偏向應用高階數學於基礎數學中:「教師將超越學校課程的知識帶至教學中」(teachers' knowledge "beyond school curriculum" can bring to teaching, p.9)。他們曾提供一個例子：一過教師在教授國小五年級因數與倍數的單元時，與學生討論找出所有 180 的因數的方法。在與學生討論前，該教師利用質因數的分解：180=22×32×5, (2+1)×(2+1)×(1+1)=18，得知 180 的因數共有 18 個，該教師不企圖將公式教給學生，但是他利用較高階的知識來幫助教學。

Foster(2011)接著提出周邊數學知識(peripheral mathematical knowledge)的概念。他認為 HCK 的架構中，存在一種周邊數學知識，用來緩衝與支持學生的學習軌道向上提升(learner's mathematical trajectory upwards)。更具體地來說，周邊數學知識是教師內化經常使用的數學知識，並且運用這些知識來引導學生學習，例如不需要計算，就知道：$2^{10}=1024$，$\tan 35° ≒ 0.7$，$x^2+17x+30$ 和 $2x^2+17x+30$ 皆可以被因式分解(並且知道如何產生其他也符合此規則的代數式)，因此當學生一說出答案，教師就能夠不加思索的判斷對錯，進一步決定要如何引導學生。

綜合上述，我們用下圖 1 來展現 HCK。其中箭頭向上意謂教師應用高階數學知識(Advanced mathematical knowledge)於當前的學校數學中；箭頭向下意謂注重當前學校數學中的核心部分(基礎數學知識 Fundamental mathematics knowledge)，而注重這個核心可幫助學生發展高階的數學；最後兩側的周邊數學知識是教師的在教學中慣用數學事實(mathematical fact)，具備這些事實可以幫助教師使用高階數學知識或基礎數學知識。

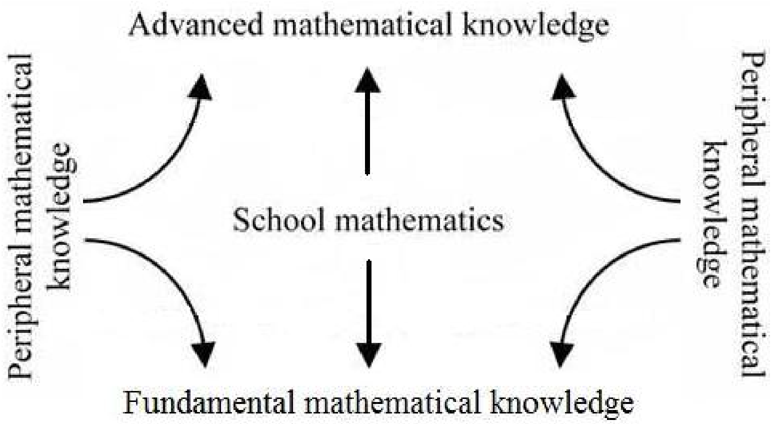



圖 1 HCK 的模型(改編自 Foster, 2011, p.24)

在本研究中，我們將聚焦於 HCK 模型中的「基礎數學知識」，強調在教學中注重一些基礎且核心的重要概念，可以幫助學生更加理解問題，同時有助於融會貫通於其他較高難度的問題。我們以「最短距離問題」為例(詳見研究方法)，強調其核心概念是「最短距離是直線」，期待透過這樣的教學，幫助學生更加理解整個解題過程，有助於概念性的學習，並且較能解決其他類似但難度較高的問題(未來的學習)。

## 參、研究方法

### 一、研究對象

本研究對象為高一學生，有效樣本 68 位(A 班 32 位、B 班 36 位)。該學校屬中部地區中後段學校，入學 PR 值約為 73。一個年級約有六班。這兩個班級在一年級上學期數學平均並無太差距。此外，為了比較不同數學成就在教學偏好上的差異，我們依據學生在高一的歷次數學段考平均(共 5 次，研究進行時間是高一下學期期末段考前)，以前 27%、中 46%、後 27%區分為高成就、中成就與低成就組。

### 二、研究程序

每一個學生都先後接受兩種教學方式(「HCK 取向」與「解題取向」)，並填寫問卷調查學生對於這兩種教學方式的感受。(1)首先教師在黑板上佈題，向學生解釋題意，並回答學生對於瞭解問題的疑惑(僅幫助瞭解題意，無任何解題暗示)，確定所有學生都瞭解問題後，接著(2)讓學生填寫問卷中的第 1 與 2 題，瞭解教學前學生是否就能解此題。填答完成後將問卷回收，(3)接著分別進行兩種不同取向的教學。其中以隨機方式選擇 A 班以先接受「HCK 取向」教學，再接受「解題取向」教學。而 B 班則是相反，先接受「解題取向」教學。(4)先後接受完兩種不同教學方式後，再發回問卷，請學生學生填答第 3 與第 4 題。

整個程序歷時 50 分鐘，其中佈題約占 3-5 分鐘(程序(1))，兩種不同取向教學總共約占 10-15 分鐘(程序(3))。

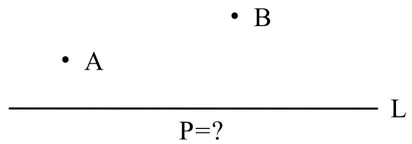
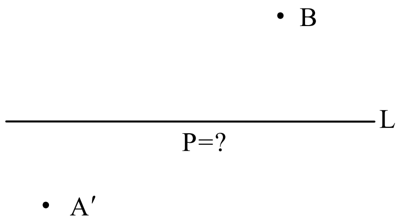
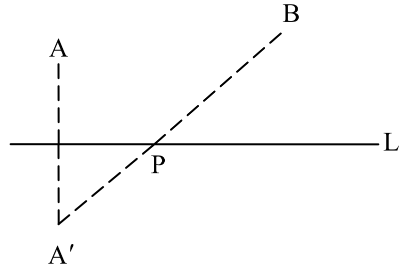
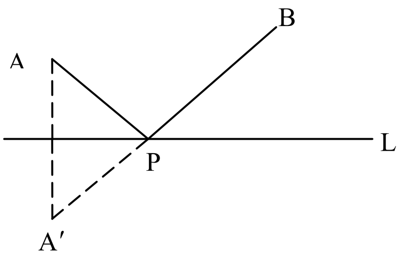
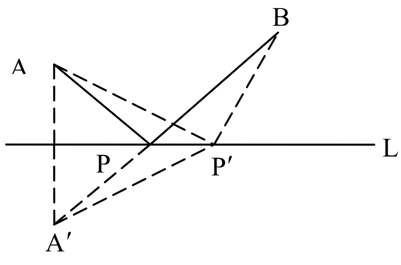
### 三、研究工具

#### (一)「HCK 取向」與「解題取向」的教學設計

本研究以「最短距離」問題，探討「HCK 取向」與「解題取向」教學的差異。表 1 呈現兩種教學的差異。「HCK 取向」以「最短距離是直線」為核心，先引導學生思考當 A、B 兩點在異側時如何解題；接著引入最短距離是直線的概念，連接異側的兩點即可找到答案；之後再回到兩點在同側的問題，透過「對稱」可以保留 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PA'}$ 的距離。「解題取向」著重於「作法」，先直接告訴學生找對稱點，接著再以三角不等式來解釋為何要找對稱點。兩種不同取向的其中一個關鍵在於教師如何解釋找「對稱點」，「HCK 取向」透過較直觀的兩點最短距離是直線，而「解題取向」著重在事後用三角不等式解釋。此外，為了豐富整個教學流程，兩種不同教學法中，我

們都公平地提供師生對話的機會。在「HCK 取向」中我們讓學生思考在異側的況下，如何求最短距離(步驟 1)；在「解題取向」中，我們讓學生思考為何要找對稱點(步驟 2)，因為這兩個步驟皆為各解題取向中的關鍵。

表 1　HCK 取向與解題取向在最短距離問題的教學

<table>
<tr><td colspan="2">最短距離問題：設 A、B 為直線 L 之同側上相異二點。如何在 L 上找一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小。<br></td></tr>
<tr><td>HCK 取向</td><td>解題取向</td></tr>
<tr><td>1 在黑板上繪製 A, B 兩點在異側的圖形，讓學生思考在這種狀況如何求最短距離？<br></td><td>1 直接告訴學生我們可以找 A 過 L 的對稱點 A′，連接 A′, B，$\overline{A'B}$與 L 的交點就是所求<br></td></tr>
<tr><td>2 依據學生的回答(若學生無相關回答，則由教師直接說明)，引入最短距離是直線的概念，連接 A, B，$\overline{AB}$與 L 的交點即為所求</td><td>2 詢問學生是否知道為何要找對稱點？</td></tr>
<tr><td>2 回到原題目(A, B 在同側)，運用類比，告訴學生透過找 A 的對稱點，我們可以讓 A, B 變成在異側，並且保留$\overline{PA}$的長度(意即 $\overline{PA}=\overline{PA'}$), A′ 為 A 過 L 的對撐點)。<br></td><td>2 依據學生的回答(若學生無相關回答，則由教師直接說明)，繪圖引入三角不等式，說明找完對稱點後的直線的確是最短距離無誤。<br></td></tr>
</table>

在此進一步說明兩種不同教學方式的差異。如同前述，HCK 取向的教學中，主要強調一種融會貫通的觀點，藉由注重「最短距離是直線」，幫助學生理解一系列由深至淺的數學問題。例如學生如果持「最短距離是直線」，可以用同樣的方式理解下面這個三度空間的進階問題(圖 2)，透過空間中的旋轉，保留 B 到 L 的距離，並旋轉至與 A 同一平面的兩側，再重複利用最短距是直線的概念，找出 P 點(圖 3)。事實上，在原本平面的題目中(表 1)，從空間的角度，「對稱」也是一種旋轉，它是 180 度的旋轉。

空間中有一直線 L 和兩個相異點 A, B，$\overline{AB}$ 與 L 並不相交，且 A, B, L 並不同時存在同一平面上。如何在 L 上找一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小?

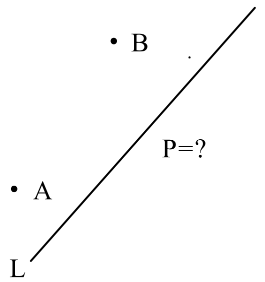



圖 2 最短距離的進階問題

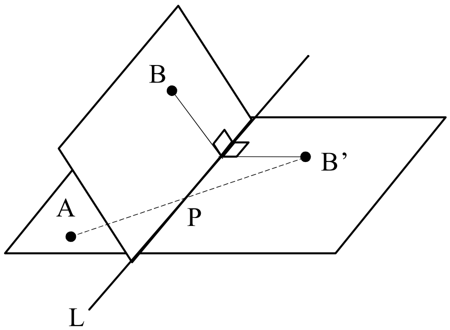



圖 3 進階問題的解法

相對應的，以「解題取向」來學習的學生，並沒有辦法利用同樣的概念來解決進階問題(圖 3)，因為「對稱」在此並不可行，空間中我們無法確定其對稱點究竟為何，學生必須將這個問題當作另一個全新的問題，學習用不同的方法來解題，由此可呼應我們在前述的論點：「HCK 取向」採取一種較一致的觀點來解題，學生持有較基礎且直觀的觀點，並可融會貫通這個觀點解決相關進階問題；就「HCK 取向」來說，這兩個不同層級的題目都是同構的(isomorphic)，只要找出 A, B 兩點所形成的直線就可求解；而「解題取向」只是在當下為了解決某一個特定的問題產生的特定策略，如果題目進階或改變結構，學生可能就無法再利用相同的方式來解題，必須學習新的方式。

### (二)學生知覺問卷

本問卷包含四個問題，其中問題 1 和問題 2 與學生的先備知識有關；問題 3 在瞭解學生對教學取向的偏好與原因；問題 4 主要想瞭解偏好某一類教學取向的學生，是否較能解決相關的進階問題。

1. 請問你之前有無學過此問題？(請回答 有、無或不確定)
2. 承第 1 題，若回答「有」，請嘗試寫出你記得的解題方法，若回答「沒有或不確定」，也請試著用自己的方法解題。

3. 在剛才兩種不同教學方式中，(1)你比較喜歡哪一種？(2)為什麼？
4. 現在將剛剛的最短距離推廣到三度空間，請嘗試解決下面問題：空間中有一直線 L 和兩個相異點 A, B，$\overline{AB}$與 L 並不相交，且 A, B, L 並不同時存在同一平面上。
   注意：不一定要真的要計算出答案，也無須在意對錯，你可以說明你對這個題目的任何解法或想法

## 四、資料蒐集與分析

本研究的分析過程是兩位研究者先閱覽所有的問卷，分別產生初步編碼，再經由兩位研究者討論產生最後編碼，最後依據編碼結果，由兩位研究者與一位數學教育專家進行分析與推論。產生編碼的過程，是由兩位研究者先分別閱覽所有問卷，以不同顏色的螢光筆，將學生一些相似的填答歸類(主要針對問題 3.，問題 1, 2, 4 較易歸類)，並從這些類別產生初步的編碼類別，接著兩位研究者針對初步的編碼類別進行反覆的磋商與討論，形成本研究的最後的分析編碼。以研究者分析學生在問題 3 填答為例:「從舊有的定義去推出答案，可以很順的想完全部的因果，較能理解」，先將「舊有」、「定義」、「因果」、「理解」分別用不同顏色螢光筆標示，產生四個初步的編碼「連結舊經驗」、「理解原理」、「因果關係」、「數學定義」，待分析完所有問卷後，對這些龐大的初步編碼進行適度的整併與刪減。再與另外一個研究者討論彼此的編碼，最後形成共識，決定最後編碼(表 2、3)。

本研究由兩位研究者共同進行編碼，其評分者一致性係數介於.89-1.00 間，兩位研究者並針對這些有歧見的編碼結果進行磋商討論，形成最後共識。

表 2 研究編碼與定義

| 問題 | 編碼 | 定義** |
|---|---|---|
| 1 | 有 | 學生表示曾經學過此問題 |
| | 無 | 學生表示沒有學過此問題 |
| | 不確定 | 學生表示不確定有無學過此問題 |
| 2 | 正確 | 學生成功解答此題(找 A 過 L 的對稱點 A′, 連接 A′, B，$\overline{A'B}$與 L 的交點就是所求) |
| | 錯誤 | 學生解題失敗 |
| 3-1* | HCK 取向 | 學生表示偏好「HCK 取向」的教學 |
| | 解題取向 | 學生表示偏好「解題取向」的教學 |

| | | |
|---|---|---|
| 3-2 | 理解 | 學生表示該教學較能理解解題背後的原理與邏輯 |
| | 易懂 | 學生表示該教學簡單易懂 |
| | 詳細 | 學生表示該教學提供較多細節，一步一步交代清楚 |
| | 連結 | 學生表示該教學能與過去經驗連結，或能融會貫通其他相似的問題 |
| | 快速 | 學生表示該教學強調直接解題，不需過多的解釋與說明 |
| | 對稱 | 學生提及作對稱點 |
| | 直線 | 學生提及兩點最短距離是直線 |
| | 三角 | 學生提及三角不等式 |
| 4 | 正確 | 學生成功解答此題 |
| | 錯誤 | 學生解題失敗 |

* 問題 3 有兩個問題，包括偏好的教學方式與原因
** 學生使用的語句不一定要與定義完全相同，只要意義相符即可。

表 3　問題 3-2 的編碼與範例

| 編碼 | 範例 |
|---|---|
| 理解<br>詳細 | [HCK 取向]先說明原理、證明，再引導出公式或作法等等，比較能一步一步跟進，才不會直接跳結果(指解題取向)，再回來理解，這樣比較亂 |
| 連結 | 因為這樣才不會只會這類型的題目，遇到變化也比較有機會對 |
| 理解<br>快速 | 我個人是比較喜歡[HCK 取向]，因為它可以讓我理解解法的由來，好讓我更加的瞭解。但[解題取向]就是補習班教法，只教你解法，不告訴你為什麼，雖然[解題取向]教起來比較快，但我不喜歡，因為我想知道為什麼會有答案 |
| 理解<br>直線<br>對稱 | 因為異側的方式很好理解/接受(直線最短距離)，而第二種我剛開始會覺得為什麼要做對稱點，講完才懂 |
| 易懂<br>三角 | 因為感覺比較淺顯易懂，[解題取向]雖然不是不懂，但因為還有牽連到其他的，比如: 三角不等式，感覺比較複雜 |

## 肆、研究結果

### 一、教學前調查學生關於「最短距離問題」的經驗

表 4 中可以發現多數學生皆表示曾學習過此問題(76.4%)，但卻只有四位學生真正能在教學前解題成功(5.9%)(表 5)。在這四位成功解題的學生中，其中二位高成就學生偏好「解題取向」的教學，認為這個教學方式與自己的解法較接近：「[解題取向]的教法跟我寫的一樣阿!」。其中一位中成就學生是以物理鏡面的光線折射方式解題成功(圖 4)，他偏好「HCK 取向」的教學；

表 4　學生使否曾學習過最短距離問題

| | 高成就 (n=17) | 中成就(n=30) | 低成就 (n=21) | 總計 (n=68) |
|---|---|---|---|---|
| 有 | 10 (58.8%) | 22 (73.3%) | 20 (95.2%) | 52 (76.4%) |
| 無 | 4 (23.5%) | 5 (16.7%) | 1 (4.8%) | 10 (14.7%) |
| 不確定 | 3 (17.6%) | 3 (10%) | 0 (0%) | 6 (8.8%) |

表 5　學生在最短距離問題的答對率

| | 高成就 (n=17) | 中成就(n=30) | 低成就 (n=21) | 總計 (n=68) |
|---|---|---|---|---|
| 正確 | 2 (11.8%) | 2 (6.7%) | 0 (0%) | 4 (5.9%) |
| 錯誤 | 15(88.2%) | 28 (93.3%) | 21 (100%) | 64 (94.1%) |

而另外一位成功解題的中成就學生亦偏好「HCK 取向」的教學，因為：「想法的感覺比較直接，而[解題取向教學]要想到其他觀念：三角不等式來說服『做法』，要想蠻多的感覺頗麻煩的」。從他們選擇的教學取向偏好來看，二位高成就學生注重解題成功與否，而另外二位中成就學生重視用較「直觀」或「具體」(物理的鏡面光線折射)的方式來思考問題。

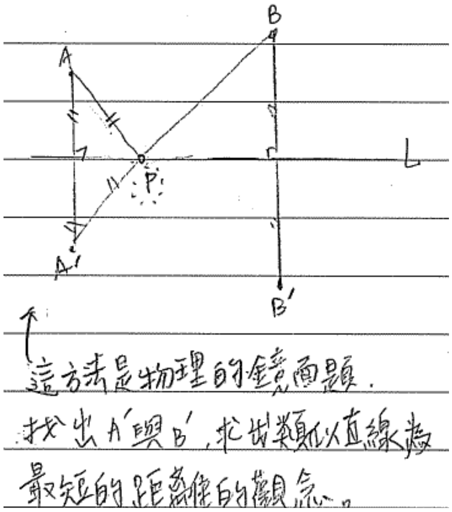



圖 4 學生以物理鏡面中光線的折射的方法解題

我們進一步檢驗學生在最短距離問題的錯誤答案，發現約有 1/3 宣稱曾經學習過的學生，嘗試作 A, B 兩點的中垂線進行解題(圖 5)，另外 2/3 則表示忘記了或不會做，顯示這些回答「有」的學生，可能並非真的學過此題或是與其他問題的記憶混淆。因此我們宣稱多數參與本研究的個案，在教學前並沒有學習過此問題。表四呈現有趣的現象，數學成就越低的學生回答「有」的比例越高(數學成就低至高依序為：95.2%, 73.3%, 58.8%)，但低成就學生卻無人可以解題成功(或是往正確的方向思考，例如：作對稱點)，這也許可呼應研究者上述分析，回答「有」的學生並不能真正確定自己是否曾學習過此題。

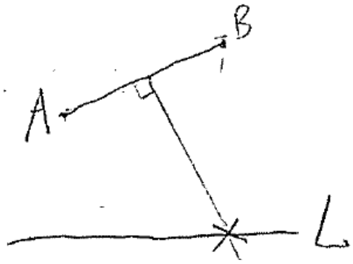



圖 5 學生作 $\overline{AB}$ 中垂線找 P 點

另外，關於最短距離的延伸問題(問題 4)，沒有學生真的解題成功，約有半數的學生(54.4%)嘗試解題，嘗試解題的學生絕大部分皆想用與原始最短距離問題同樣的方法解題(作對稱點、找 $\overline{AB'}$ 與 L 的交點)，但他們忽略 $\overline{AB'}$ 與 L 並沒有交點，或是他們找不到讓 $\overline{AB'}$ 交於 L 的方法(圖 3，本題正確解法是讓 B 沿著 L 旋轉，使得 B′ 與 A 在同一平面上，基本上延續最短距離是直線的思維)。研究者原本預期偏好「HCK 取向」的學生，能在本題有較高的答對率，然而學生對於空間概念的缺乏，似乎阻礙了他們的思考，建議未來研究能夠選擇學完高中空間單元的學生，並且只教授「HCK 取向」或「解題取向」單一種解題方式，比較這兩種教學取向對學生融會貫通其他問題的差異。

## 二、教學後學生對不同教學取向的偏好

從整體結果來看(表 6)，約 3/4 的學生偏好「HCK 取向」的教學(73.5%)，約 1/4 的學生偏好「解題取向」的教學(26.5%)。我們使用卡方百分比同質性考驗(Chi-square test)，檢驗不同數學成就學生，在教學取向偏好上是否一致。結果達顯著差異($\chi^2(2)=8.37$, $p<.05$)，意味不同成就的學生，存在不同偏好的教學方式。進一步由表 6 可知，高成就學生偏好「HCK 取向」與「解題取向」約各佔半數(47.1%, 52.9%)，而中、低成就學生，則明顯偏好「HCK 取向」教學(80%, 85.7%)，其中，尤以低成就學生特別明顯(85.7%)。

為了進一步了解不同「教學取向偏好」與「數學成就」是否存在相關，我們進行點二系列相關考驗。結果顯示，不同「教學取向偏好」與「數學成就」呈現中度負相關($r=-.292$, $p<.05$)，這意味數學成績越高的學生，越偏好「解題取向」的教學，反之，則偏好「HCK 取向」的教學。

## 三、學生偏好某一種教學取向的原因

為了釐清學生選擇這些不同教學取向的原因，我們進一步分析學生在問卷上的填答。整體來看(表 7)，我們發現學生偏好某一個教學取向的原因，主要取決他們認為這個教學是否很淺顯易懂，「易懂」這個類別，不論在「偏好 HCK 取向」與「偏好解題取向」皆佔最高比例(50%, 44.4%)。關於「易懂」的具體回應如：「比較容易想的通，看到題目就比較好判斷」(HCK-中[註1])、「理解力不佳的我，[解題取向]比較容易懂」(解題-低)。

表 6　不同數學成就學生與偏好的教學方式

| | 高成就 (n=17) | 中成就(n=30) | 低成就 (n=21) | 總計 (n=68) |
|---|---|---|---|---|
| HCK 取向 | 8(47.1%) | 24(80%) | 18 (85.7%) | 50 (73.5%) |
| 解題取向 | 9(52.9%) | 6(20%) | 3 (14.3%) | 18(26.5%) |

表 7 學生選擇不同教學取向的原因分類

| | 高成就(n=17) | 中成就(n=30) | 低成就(n=21) | 總計(n=68) |
|---|---|---|---|---|
| 偏好 HCK 取向 | (n=8) | (n=24) | (n=18) | (n=50) |
| 理解 | 4 (50%) | 10 (41.7%) | 5 (27.8%) | 19 (38%) |
| 易懂 | 2 (25%) | 11 (45.8%) | 12 (66.7%) | 25 (50%) |
| 詳細 | 2 (25%) | 4 (16.7%) | 3 (16.7%) | 9 (18%) |
| 連結 | | 2 (8.3%) | 1 (5.6%) | 3 (6%) |
| 快速* | 1(5.9%) | | | 1 (2%) |
| 對稱 | | 4 (16.7%) | 1 (5.6%) | 5 (10%) |
| 直線 | 1 (12.5%) | 7 (29.2%) | 2 (11.1%) | 10 (20%) |
| 三角* | 2 (25%) | 1 (4.2%) | 1 (5.6%) | 4 (8%) |
| 偏好解題取向 | (n=9) | (n=6) | (n=3) | (n=18) |
| 理解 | 3 (33.3%) | 2 (33.3%) | 1 (33.3%) | 6(33.3%) |
| 易懂 | 4 (44.4%) | 2 (33.3%) | 2 (66.7%) | 8 (44.4%) |
| 詳細 | 3 (33.3%) | 1 (16.7%) | | 4 (22.2%) |
| 連結 | 1 (11.1%) | 1 (16.7%) | | 2 (11.1%) |
| 快速 | 2 (22.2%) | 1 (16.7%) | | 3 (16.7%) |
| 對稱 | 1 (11.1%) | | 1 (33.3%) | 2 (11.1%) |
| 直線 | | | | 0 (0%) |
| 三角 | | 1 (16.7%) | | 1 (5.6%) |

* 在此為學生的負向觀感。例如認為三角不等式很麻煩(因學生偏好「直線」的解題策略)；只講作法，不講原理。
「理解」: 較能理解解題背後的原理與邏輯。
「易懂」: 簡單易懂。
「詳細」: 提供較多清楚的細節。
「連結」: 與過去經驗連結或融會貫通其他相似的問題。
「快速」: 強調直接解題，不需迂迴的解釋與說明
「對稱」: 提及作對稱點。
「直線」: 提及兩點最短距離是直線。
「三角」: 提及三角不等式。

僅次於「易懂」的，是「理解」這個類別。理解意謂學生在某個教學中，感受到解題背後所蘊含的原理或思考脈絡，提出合理且充分的解釋。例如：「感覺比較有記觀念而不是記題型，也能很明確看出為什麼這樣算會是最小值」(HCK-中)、「將此題的解法講得很細，讓我瞭解其中的原理」(解題-高)。表 7 中我們看到「理解」在「偏

好 HCK 取向」中佔了 38%、在「偏好解題取向」中佔了 33.3%。「偏好 HCK 取向」的學生似乎比「偏好解題取向」學生略為在意「理解」這個類別(38%>33.3%)。

第三個要討論的是「詳細」這個類別，這意味學生知覺教師清楚呈現解題過程，一步一步帶領同學了解問題，沒有太多跳耀。例如「[HCK 取向]先說明原理、證明，再引導出公式或作法等等，比較能一步一步跟進，才不會直接跳結果(指解題取向)，再回來理解，這樣比較亂」(HCK-中)。「詳細」在「偏好 HCK 取向」與「偏好解題取向」中大約占了 1/5 的比例(18%, 22.2%)。

接下來我們要討論「對稱」、「直線」與「三角」這三個類別的比例。「對稱」是指學生在回應中，提及找「對稱點」這個概念，例如：「[HCK 取向的教學]說出為什麼要作對稱。」(HCK-高)；「直線」意謂學生提及「最短距離是直線」的概念，例如：「直接從直線連線最短的去做不用再證明這麼多，因為其實我[解題取向的教法]也不太懂」(HCK-中)；「三角」意味學生提及「三角不等式」，例如：「能應用到三角形三邊性質，感覺能應用的範圍較廣」(解題-中)。在分析前，我們預期「偏好 HCK 取向」在「直線」會出現較高的比例，「三角」在「偏好解題取向」會出現較高的比例。這是因為「直線」是「偏好 HCK 取向」用來解釋為何找對稱點的關鍵，而「三角」是「偏好解題取向」用來驗證找對稱點是正確的關鍵。

表 7 中，「直線」在「偏好 HCK 取向」所占的比例似乎符合我們的期待，其所佔的比例明顯高於「偏好解題取向」(20%>0%)，並且這些多數來自中成就學生，約佔了中成就學生的 1/3(29.2%)，這似乎意味使用「最短距離是直線」的概念讓「偏好 HCK 取向」中成就學生印象深刻。但「三角」這個類別並沒有在「偏好解題取向」出現相對高的比例(表 7 僅 1 位中成就學生提及)，進一步分析其原因，發現「偏好解題取向」的學生認為先教「作法」比較容易理解：「先講作法比較容易懂，再講原因比較不會混淆」(解題-中)。所以「偏好解題取向」的學生可能比較在意「作法」(解題的程序)，而非三角不等式，所以較少提及此數學概念。

雖然「偏好 HCK 取向」的學生提及「三角」的比例高過於「偏好解題取向」的學生，但這都是負向的感受，認為「直線」的解釋優於「三角」，例如：「[解題取向]雖然不是不懂，但因為還有牽連到其他的，比如: 三角不等式，感覺比較複雜」(HCK-低)。「對稱」這個類別在「偏好 HCK 取向」與「偏好解題取向」差異不大(10%, 11.1%)，這可能是因為兩種不同教學取向都牽涉對稱概念，差別在於解釋的方式不同。例如：「…[解題取向]我剛開始會覺得為什麼要做對稱點，講完(指三角不等式)才懂」(HCK-中)、「直接解題，不用再假設一點再做對稱點…」(解題-高)。

本研究將「直線」視為解最短距離問題的核心知識，因為它用一個非常基礎且簡單的觀念，來看待最短距離的相關問

題，我們期待學生能感受這個基礎觀念可以幫助他們解決許多複雜的問題，因此預期「偏好 HCK 取向」的學生能對「連結」更有感觸，但研究結果並非如此，「連結」在「偏好 HCK 取向」僅占了 6%，甚至還少於「偏好解題取向」的學生。進一步分析「偏好解題取向」學生的填答，發現學生認為可以推廣是因為三角不等式比較有數學概念：「能應用到三角形三邊性質，感覺能應用的範圍較廣」(解題-中)，有別於「偏好 HCK 取向」的學生強調的是原理的瞭解：「[瞭解]原理，以後遇到類似的題目可以融會貫通」(HCK-中)。但事實上，這個「原理」應該是暗指「直線」的想法，與我們的期待一致。

如果以不同數學成就來看，我們發現「偏好 HCK 取向」的高成就學生似乎較注重「理解」這個類別(50%)，而中成就的學生似乎同時在意「易懂」與「理解」(45.8%, 41.7%)，低成就學生則是明顯聚焦在「易懂」上(66.7%)。這個結果似乎符合我們的期待，高成就學生重視教師講課時的原則、原理；低成就學生重視自己聽不聽得懂；中成就學生則兩者兼具。一些例子如：「比較追根究柢，細節較清楚，也就是觀念啦!」(HCK-高)、「我個人是比較喜歡[HCK 取向]，因為她可以讓我理解解法的由來，好讓我更加的瞭解…」(HCK-中)、「喜歡第一種(HCK 取向)，原因我也不知道，但就純覺得比較好懂」(HCK-低)。

然而這個模式然而並不能完全套用在「偏好解題取向」的學生身上，差異出現在高成就學生身上。「偏好解題取向」的高成就學生似乎也同時並重「易懂」與「理解」這兩個類別(44.4%, 33.3%)，可能的原因是這幾個高成就學生較在意能否快速解題：「感覺比較快、比較容易懂，異側(指 HCK 取向)感覺比較複雜」(解題-高)。從高成就學生在兩種不同教學取向偏好的回應，似乎隱含著重視「易懂」的高成就學生，較傾向於「解題取向」的教學；反之，重視「理解」的高成就學生，則傾向於「HCK 取向」的教學，然而過小的樣本數，以及欠缺統計考驗的分析，這有待未來研究證實。

## 伍、結論

本研究依據過去文獻，提出一個整合的 HCK 模型，並就此模型中的「基礎數學知識」設計「HCK 取向」與「解題取向」的教學，透過學生的回饋：「HCK 取向」教學較能幫助學生學習「最短距離問題」，這似乎驗證注重「基礎數學知識」確實有別於一般教學(驗證「基礎數學知識」存在於 HCK 模型中)。然而，受限於樣本數，本研究只進行部份的統計檢定，多數研究結果的推論都是立基於描述性統計，因此對於本研究結果的一般化必須非常小心。

一般而言，偏好「HCK 取向」教學的學生認為這個教學取向，清楚提供為何作對稱點的理由，並且「兩點之間最短距離是直線」很直觀，很容易理解。而偏好「解題取向」的學生則是認為這樣的教學較為快速，並且講解三角不等式，可以提供在

未來解題時更多的應用(有較多的數學)。學生在區辨不同教學方式時，最在意是不是「簡單易懂」，但甚麼是簡單易懂則各有解讀，其中有較多的學生認同 HCK 取向簡單易懂，尤以低成就學生特別認同「HCK 取向」的教學，但對高成就學生，他們似乎較傾向「解題取向」的教學，因為他們較在意能否直接解題(解題的作法)。我們也發現教學前能夠解決「最短距離」問題的四位學生，並無特別偏好哪一種教學方式，有兩位高成就學生偏好「解題取向」教學，另外兩位中成學生偏好「HCK 取向」教學。這個選擇可能與不同數學成就較有關係。

從教學上的蘊含(implication)來看，注重教學中的基本原則、原理(核心概念)能夠幫助多數學生學習如何解題，尤其是低成就的學生。教學前，我們應該思索每一個數學問題中最核心的概念為何，該如何凸顯這個核心概念，幫助學生融會貫通整個問題，並連結至未來的學習，這亦是我們研究 HCK 的重要意義。

## 備註

註 1：第一碼代表教學取向偏好，第二碼代表數學成就。例如：HCK-中，代表偏好 HCK 取向的教學，中成就組。

## 參考文獻


Ampadu, E. (2012). Students' perceptions of their teachers' teaching of mathematics: The case of Ghana. *International Online Journal of Educational Sciences, 4*(2), 351-358.

Arthur, W., Tubre, T., Paul, D. S., and Edens, P. S. (2003) Teaching effectiveness: The relationship between reactions and learning evaluation criteria. *Educational Psychology, 23*, 275-285.

Ball, D.L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D. L. & Bass, H. (2009) *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Figueiras, F., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: A response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 26-28.

Foster, C. (2011). Peripheral mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 24-25.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M. (2013, February). *Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching*. Paper presented at Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). Antalya , Turkey.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education*, (pp. 4635–4644). Seoul, South Korea.

Zazkis, R. & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics 31*(2), 8-13.


投稿日期：102 年 11 月 06 日

接受日期：103 年 03 月 03 日

# High School Students' Perceptions on the HCK and Problem-Solving Teaching Approaches

**Yung-Chi Lin [1*]　Chien Chin [2]**

[1] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University

[2] Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

## Abstract

The purpose of this study is to investigate the high school students' perceptions on the HCK and non-HCK (problem-solving) teaching approaches. According to the fundamental mathematical knowledge in the HCK model, we design the HCK and non-HCK teaching approaches in the shortest distance problem. The study included 68 high school students with high, medium and low mathematics achievement. These students were exposed in the HCK and non-HCK teaching, respectively. The results showed that: (1) HCK teaching approach could help students better understand how to solve the problem conceptually (73.5%). (2) The relation between mathematics achievement and teaching preference was significant ($\chi^2(2)=8.37$, $p<.05$). (3) There was a significant negative correlation of -.292 ($p<.05$) between mathematical achievement and HCK teaching approach. In the summary, the HCK teaching approach seems to better help the medium and low mathematics achievers to learn the problem; the high mathematics achievers seem to more prefer non-HCK teaching approach.

**Key words: Horizon Content Knowledge (HCK), Mathematics Knowledge for Teaching (MKT), mathematics achievement**

* corresponding author