長方體被平面截出三角錐各面面積間的平方關係

李政憲 [1*] 蘇進發 [2] 陳昭地 [3]

[1]新北市立林口國民中學
[2]臺北市立石牌國民中學
[3]國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

筆者參與國家教育研究院國民中學數學教材原型的編撰，目前 C 冊（下）已編寫完畢，而在 C 冊（上）第一章中第 3 單元的參考資料中，提出讓教師參考的一個問題:「若長方體被一個平面截出一個三角錐（如圖 1)，則所截出的三角錐，其底面三角形的面積平方，為此三角錐另外三個直角三角形所形成的面的面積平方和。」的數學概念，以及立體綜合幾何的證明方式,並經台灣師大數學系陳昭地教授指導,藉由高中所學海龍公式、立體坐標與三角函數等概念，搭配相關的立體圖形呈現，亦可得到同樣的結果；在此十二年國教強調多元評量的大環境下，深深覺得可以給國高中教師與有興趣研究的同學參考，強化立體空間感與解題概念，並比較不同解法的差異性，故以此文與讀者共享。

此概念主要是由平面上的畢氏定理，推廣到熟知長 a 寬 b 高 c 的長方體之相對兩最遠頂點所得對角線長 l 之平方等於長、寬、高之平方和為出發點，即 $l^2=a^2+b^2+c^2$；接著介紹較少知道的長方體被一平面所截，所截出的三角錐各面面積之間的平方關係，亦可將此關係視為平面上的畢氏定理在三度空間的另一罕見觀點。

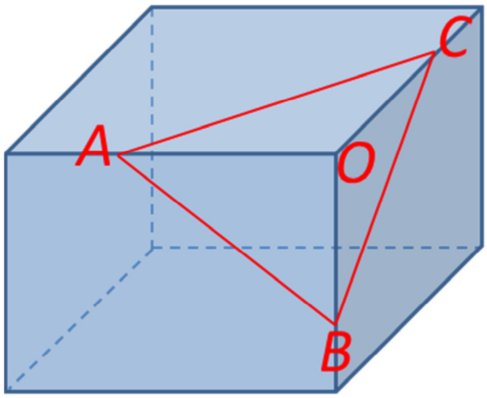


圖 1

而其基本證明(或解說)方法至少有五種：

(1) 立體綜合幾何法
(2) 綜合幾何＋代數法
(3) 三角形海龍公式計算面積法
(4) 立體坐標幾何法
(5) 三角函數法

*為本文通訊作者

希望藉此文章拋磚引玉，引起中學生探討幾何學不同解法的興趣。

貳、本文

一、探討長 a 寬 b 高 c 的長方體之相對兩最遠頂點距離(即一般常見的蜜蜂問題與螞蟻問題)

例 1、（蜜蜂問題）如圖 2，在邊長 5,6,7 空心可穿透的長方體，有一蜜蜂在頂點 A 的位置，若要飛至對面最遠的 B 頂點處，請問 $\overline{AB}$ 的最短距離為何？

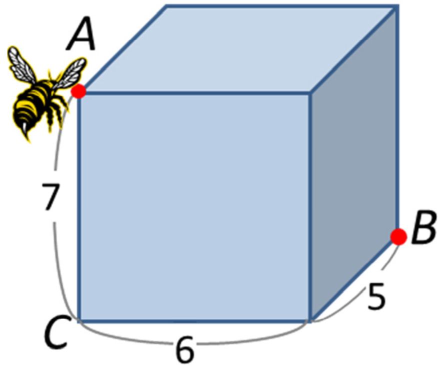


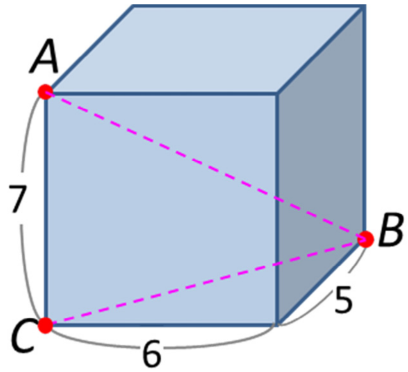
圖 2

步驟 1： 如圖 3，此問題可透過連接、兩線段得到其結果。然而在繪製兩線段時，不妨可請讀者先思考底下三個問題：

(1) 為何距離 A 點最遠的頂點為 B 點？

(2)三角形 ABC 是哪一種三角形? $\overline{AB}$ 是這個三角形的什麼邊?

(3) 連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的目的為何？



圖三

若以上三個問題讀者可自行推出其結果，則此題即可迎刃而解，首先看底邊 B、C 兩點所形成的 $\overline{BC}$ (如圖 4)：

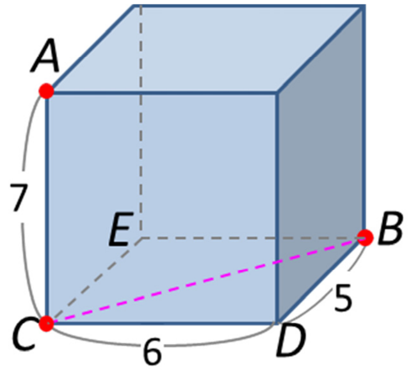


圖 4

此時 $\overline{BC}$ 為底部矩形 $BDCE$ 的對角線，因 $\angle BDC$ 為直角，故

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \cdots\cdots ①$$

若學生無法從圖 4 得知 $\overline{BC}$ 為矩形 $BDCE$ 對角線的結果，建議教師可搭配實體教具或 *Cabri 3D* 的立體幾何軟體操作（以下步驟亦同），相信會使學生印象更為深刻。

步驟 2： 接著我們再連接 $\overline{AB}$ ，因為 $\overline{AC}$ 與矩形 $BDCE$ 垂直，所以 $\angle ACB$ 為直角（如圖五），故三角形 ABC

為直角三角形，即

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \cdots\cdots$ ②

再由①、②合併即可得到 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ 的結果。

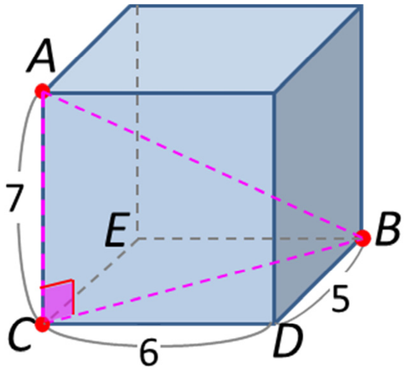


圖 5

故此題 $\overline{AB}^2 = 7^2 + 5^2 + 6^2$ 可得 $\overline{AB} = \sqrt{110}$。而另外再提到的是在 C 冊(上)第一章中的第3單元中，筆者曾以兩個三明治合併(如圖6)說明此問題以助於學生理解，而實際於課程中進行後，將兩個三明治發給表現較好的學生或小老師也饒有趣味；甚至於本校數理資優班計算此題目，學生曾反駁蜜蜂不會直線飛行，應為8字型飛行而引發熱烈討論，在此一併提供給各位讀者參考。

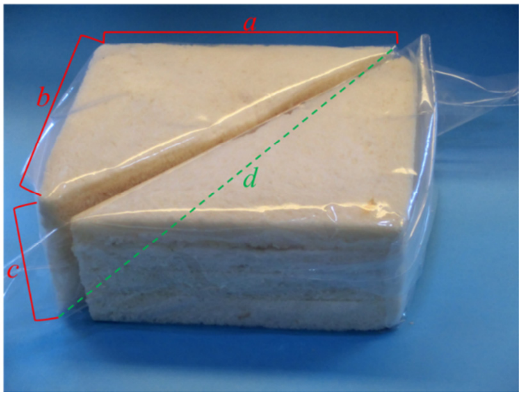


圖 6

例 2、(螞蟻問題) 如圖 7，在邊長 5,6,7 的空心長方體，有一螞蟻在頂點 A 處，若要爬行到對面最遠的 B 頂點處，請問其爬行的最短距離為何？

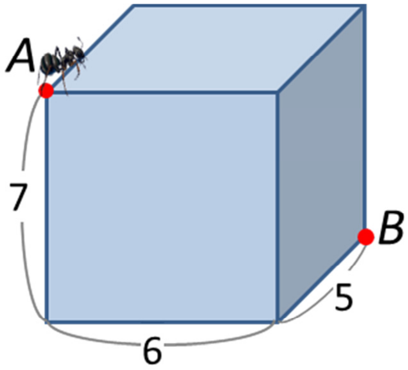


圖 7

步驟 1：此題目可透過連接三條折線的繪製(如圖 8)作討論。

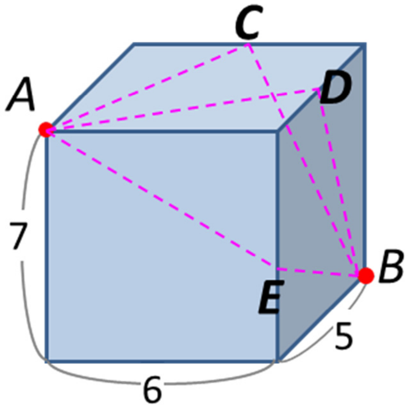


圖 8

在教學時，一開始我們會請學生先猜測要如何走才會最短？但就教學經驗得知許多學生會猜測經過邊上的中點再走到 B 點，等到透過紙盒剪拼翻摺的觀察與計算，再驗證其結果是否正確。

步驟 2： 將紙盒翻摺後共可得到三種不同的結果，我們先討論第一種將右方矩形向上翻摺的結果（如圖 9），則原來的 B 點將翻至 B′ 點：

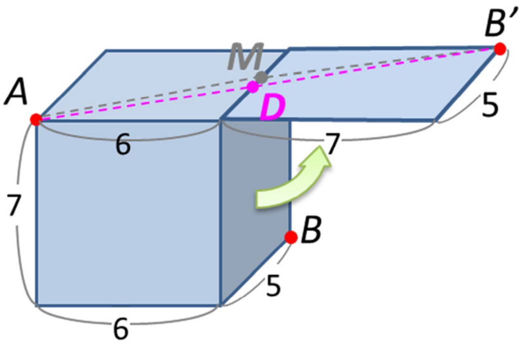


圖 9

若 M 為長方體紙盒邊上的中點，由紙盒翻摺的結果得知，$\overline{AM}$ 與 $\overline{MB'}$ 將無法形成一直線，並透過三角形的兩邊和大於第三邊，確認 $\overline{AM}+\overline{MB'}>\overline{AD}+\overline{DB'}$，其中 D 點為連接 $\overline{AB'}$ 邊上所產生的交點，再計算 $\overline{AB'}=\sqrt{(6+7)^2+5^2}=\sqrt{194}$ 。

步驟 3： 此時可請學生先觀察 $\overline{AB'}=\sqrt{(6+7)^2+5^2}$ 的算式，與題目的已知條件(長方體的長、寬、高)有何關聯？並猜測是否有其他結果？一般而言，大多數學生皆能發現其 $\sqrt{(\text{長}+\text{高})^2+\text{寬}^2}$ 的規律，並能猜出尚有 $\sqrt{(\text{長}+\text{寬})^2+\text{高}^2}$ 與 $\sqrt{(\text{寬}+\text{高})^2+\text{長}^2}$ 的結果。等到學生發現或教師引導出另外兩種結果後，再請學生討論要如何翻摺長方體的面以得到另外兩種結果，便比較容易得到底下圖 10、圖 11 的翻摺結果：

分別計算其值，可得 $\sqrt{(5+6)^2+7^2}=\sqrt{170}$ 與 $\sqrt{(5+7)^2+6^2}=\sqrt{180}$ 的兩種結果，得知在此題中 $\sqrt{170}$ 為其最小值的結果。

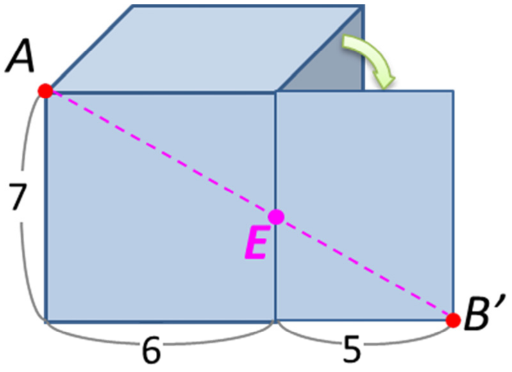


圖 10

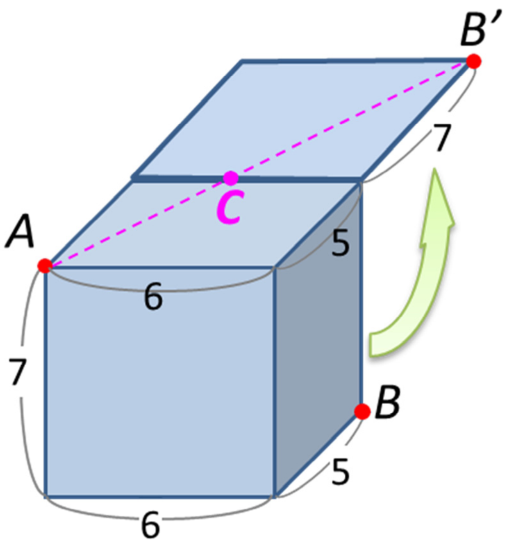


圖 11

步驟 4： 進一步地，若時間允許，可再與學生討論螞蟻路徑是否會恆大於蜜蜂路徑的問題，以及如何得到螞蟻的最短路徑的結論，即最短路徑= $\sqrt{\text{較短兩邊和的平方+最長邊平方}}$ 的速算結果，這裏可透過 $a\geq b\geq c$

的假設以及乘法公式的展開作比較：若 $a \geq b \geq c$，

則 $(a+b)^2+c^2=a^2+2ab+b^2+c^2$

$(b+c)^2+a^2=b^2+2bc+c^2+a^2$

$(a+c)^2+b^2=a^2+2ac+c^2+b^2$

明顯可得 $2ab \geq 2ac \geq 2bc$ 的結果，故得知當 $a \geq b \geq c$ 時，$\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ 為距離的其小值，且 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $< \sqrt{(b+c)^2+a^2}$，即螞蟻路徑恆大於蜜蜂路徑的結果。

二、長方體被平面截出三角錐各面面積間的平方關係

例 3、 如圖 **12**，已知長方體被平面 **ABC** 所截，在長、寬、高所得到的三段截線段長度分別為 **5**、**3** 與 **4**，試求所截出的三角形 **ABC** 面積。

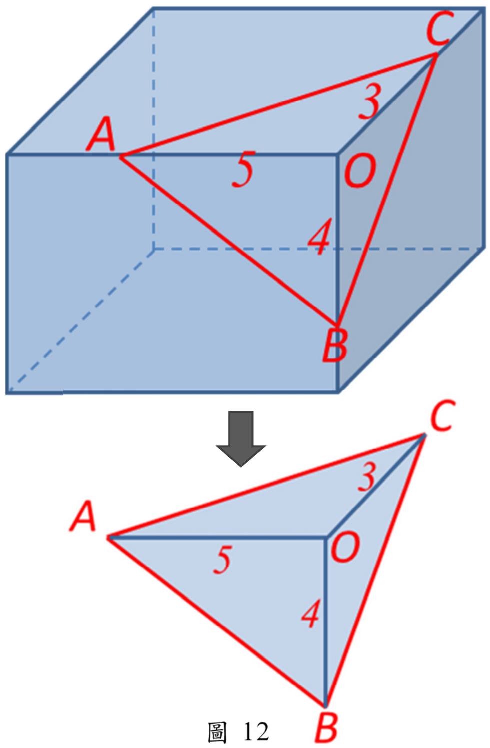


圖 12

我們先以**方法(1)**立體綜合幾何法進行運算：

步驟 1： 要計算三角形 ABC 面積，若以 $\overline{AC}$ 為底，則可自 B 點畫至 $\overline{AC}$ 的垂直線段 $\overline{BE}$ 並與 $\overline{AC}$ 交於 E 點(如圖 13)，故 $\Delta ABC = \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BE}$ (這裏教師可透過實物模型或是 Cabri3D 等立體幾何軟體進行操弄，會使學生對於 $\overline{BE}$ 的位置更有感覺。

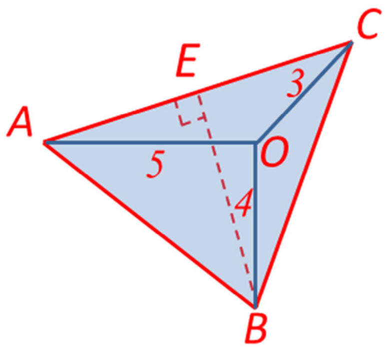


圖 13

因 $\overline{AC} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$，故我們要進一步計算 $\overline{BE}$ 的長度。

步驟 2： 要計算 $\overline{BE}$ 的長度，此時教師不妨詢問學生要如何計算？是否有其它的三角形可提供輔助？期待學生能發現將 O、E 連線，再進一步討論 ΔBOE 為直角三角形的結果(如圖 14)。

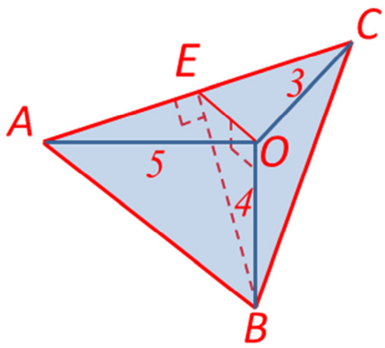


圖 14

因 $\overline{OB}$ 恆垂直於平面 AOC，故可得 $\overline{OB} \perp \overline{OE}$，因此 $\triangle BOE$ 為直角三角形，$\overline{BE}$ 為其斜邊，且 $\overline{BE} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OE}^2}$。因 $\overline{OB} = 4$，故接下來我們要計算的是 $\overline{OE}$ 的長度。

步驟 3：若 $\overline{OE}$ 為直角三角形 AOC 斜邊上的高，則 $\overline{OE} = \dfrac{\overline{AO} \times \overline{OC}}{\overline{AC}} = \dfrac{5 \times 3}{\sqrt{34}}$，然而若要確認 $\overline{OE}$ 是否恰為 $\triangle AOC$ 斜邊上的高，我們可計算 $\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2$ 是否與 $\overline{OE}^2$ 相同；$\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2 = \left(\overline{AB}^2 - \overline{BO}^2\right) - \left(\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2\right)$（∵△$ABO$、△$ABE$ 均為直角三角形）$= \overline{BE}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{OE}^2$（∵△$BOE$ 為直角三角形）；根據畢氏定理的逆定理，可得 $\overline{OE} \perp \overline{AC}$，即 $\overline{OE}$ 為直角△AOC 斜邊上的高。

步驟 4：故我們要計算的△ABC

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AC} \times \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OE}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3^2 + 5^2} \times \sqrt{4^2 + (\frac{5 \times 3}{\sqrt{34}})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 \times 34 + 15^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{769}$$

步驟 5：乍看步驟 4 的算式與結果似乎有些複雜，然而再將分子與分母的 $(\sqrt{34})^2$ 對消後，我們突然覺得豁然開朗，因若將 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 \times 34 + 15^2}$ 等式兩邊分別平方，再將 $34 = 3^2 + 5^2$ 還原後，可得

$$\triangle ABC^2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 \times 34 + 15^2}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[4^2 \times \left(3^2 + 5^2\right) + 15^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[(3 \times 4)^2 + (4 \times 5)^2 + (3 \times 5)^2\right]$$

，恰與 $\triangle BCO^2 + \triangle ABO^2 + \triangle ACO^2$ 的結果相同，即 $\triangle ABC^2 = \triangle ABO^2 + \triangle BCO^2 + \triangle ACO^2$。而若將 3,4,5 的特例，分別以 a、b、c 替代如法泡製計算，將會發現其結果依然相同。

方法(1)的立體綜合幾何法的結果雖然漂亮，但推導過程總是略嫌冗長（若讀者對立體綜合幾何法的原始詮釋方式有興趣，可自行參考國家教育研究院出版國中數學原型教材 C 冊（上）1-3 的內容），事實上，同樣以本題而言，尚有國中生也能接受的**方法(2)**綜合幾何＋代數法，在此提供各位讀者一併比較：

如圖 15，因 $\overline{OA} \perp \overline{OC}$ 可由畢氏定理計算得知 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 5^2}$，另作△$ABC$ 中 $\overline{AC}$ 邊

上的高 $\overline{BE}\perp\overline{AC}$，並設 $\overline{AE}=x$，則 $\overline{CE}=\sqrt{3^2+5^2}-x$，由 $\overline{AB}^2-\overline{AE}^2=\overline{BE}^2=\overline{BC}^2-\overline{CE}^2$，可得 $(4^2+5^2)-x^2=(3^2+4^2)-(\sqrt{3^2+5^2}-x)^2$

化簡整理，得

$$x=\frac{5^2}{\sqrt{3^2+5^2}}，\overline{BE}^2=(4^2+5^2)-\frac{5^4}{3^2+5^2}$$

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BE}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+5^2}\times\sqrt{(4^2+5^2)-\frac{5^4}{3^2+5^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(3\times4)^2+(4\times5)^2+(5\times3)^2}$$

$$\therefore \Delta ABC^2=\frac{1}{4}[(3\times4)^2+(4\times5)^2+(5\times3)^2]$$

$$=\Delta ABO^2+\Delta BCO^2+\Delta ACO^2，$$

同樣以 a、b、c 替代 3,4,5 如法泡製計算，仍會發現其結果相同。

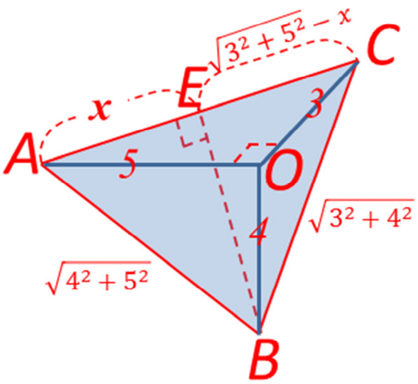


圖 15

此方法不需要較為複雜的立體幾何先備知識與抽象的立體概念，不過可明顯發現計算過程也頗繁瑣，因此我們想要發展其它方法，以得到同樣的結果。

接下來我們採用**方法(3)**三角形海龍公式計算面積法進行說明：

如圖 16，根據方法(1)、(2)所得結果，我們要說明$(\Delta OAB)^2$=$(\Delta ABC)^2=(\Delta OAB)^2+(\Delta OBC)^2+(\Delta OCA)^2$

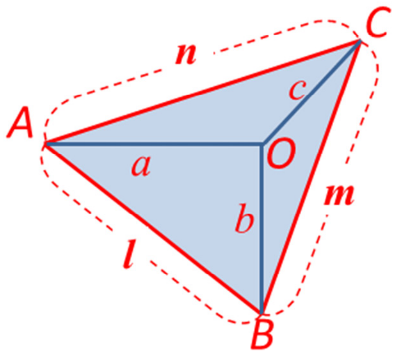


圖 16

假設所截出的三角錐底部三角形 ABC 三邊長各為 m、n 與 l，且三角錐上的稜邊各為 a、b 與 c，即說明$(\Delta ABC)^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

步驟 1： $\because$ $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=l$

$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}=m$

$\overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}=n$

由ΔABC 的海龍公式：

$\Delta ABC=\sqrt{s(s-l)(s-m)(s-n)}$，

其中 $s=\dfrac{l+m+n}{2}$（半周長）

步驟 2： 將上述結果代入，可得$(\triangle ABC)^2$

$$=\frac{(l+m+n)(l+m-n)(l+n-m)(n+m-l)}{16}$$

$$=\frac{[l+(m+n)][(l+m)-n][(n+(l-m)][n-(l-m)]}{16}$$

$$=\frac{[(l+m)^2-n^2][n^2-(l-m)^2]}{16}$$

$$=\frac{\left[l^2+m^2+2lm-n^2\right]\left[n^2-l^2-m^2+2lm\right]}{16}$$

$$=\frac{[a^2+b^2+b^2+c^2+2lm-c^2-a^2][c^2+a^2-a^2-b^2-b^2-c^2+2lm]}{16}$$

$$=\frac{[2lm+2b^2][2lm-2b^2]}{16}=\frac{4\left[lm+b^2\right]\left[lm-b^2\right]}{16}$$

$$=\frac{l^2m^2-b^4}{4}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)-b^4}{4}$$

$$=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2-b^4}{4}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$$

$=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2$，故得證。

若讀者對海龍公式的推導與相關應用有興趣，可再自行參考國家教育研究院出版國中原型教材 *C* 冊（下）3-7 的內容。

底下再介紹**方法**(4)空間坐標幾何法提供各位讀者參考比較：

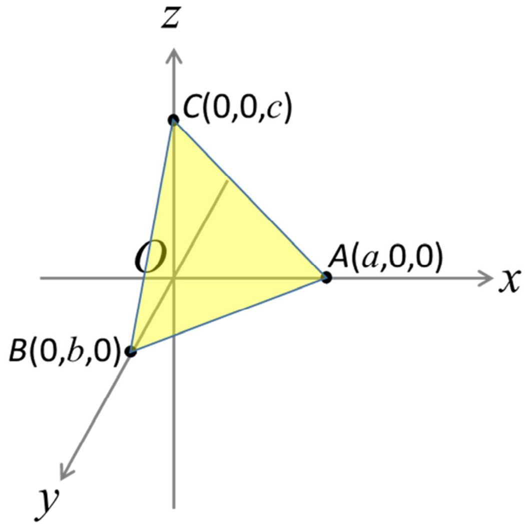


圖 17

步驟 1： 如圖 17，建立以 O 為原點，$\overleftrightarrow{OA}$為 x 軸，$\overleftrightarrow{OB}$為 y 軸，$\overleftrightarrow{OC}$為 z 軸的空間直角坐標系。

步驟 2： $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$、$C(0,0,c)$三點所決定的平面方程式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$\Leftrightarrow bcx+cay+abz-abc=0$

步驟 3： 利用三角錐 $OABC$ 的體積等於其底面積乘上高的三分之一，

可得 $\dfrac{abc}{6}=\dfrac{1}{3}$ $(\triangle ABC)\times(O$ 到$\triangle ABC$ 平面的高$)$

$=\dfrac{1}{3}$ $(\triangle ABC)\times(O$ 到平面 ABC 的距離$)$

$\Rightarrow \dfrac{a^2b^2c^2}{36}=\dfrac{1}{9}$ $(\triangle ABC)^2\times(O$ 到平面 ABC 的距離$)^2$

步驟 4： 又 $O(0,0,0)$到平面 $bcx+cay+abz-abc=0$ 的距離平方為：

$$\left(\frac{|0+0+0-abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}\right)^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

步驟 5： 故得$(\triangle ABC)^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2$

比較方法(1)至(4)，可得方法(1)、(2)所使用的數學知識較為基礎，但推導步驟較為繁瑣，且方法(1)仍需較為抽象的立體概念，方法(3)、(4)則雖然較為簡單，但均需使用較深入的數學知識（部分學生可透過自學或教師補充先行學習海龍公式），不過方法(4)應用了解析幾何的概念進行解題，可作為學生應用相關數學知識驗證此概念不錯的方法，建議教師可給予部分條件（如立體平面上三點坐標），再循序引導，讓學生透過自行推導出此概念得到成就感。

最後我們透過**方法(5)**三角函數法的介紹作為本文的結尾：

步驟 1： 參考圖 17，觀察三線段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 及 $\overline{OC}$，其中 $\overline{OA}^2=a^2$，$\overline{OB}^2=b^2$ 及 $\overline{OC}^2=c^2$，由

$\overline{OA}\perp\overline{OB}\perp\overline{OC}$，得 $\left|\overline{AB}\right|^2=a^2+b^2$，$\left|\overline{BC}\right|^2=b^2+c^2$，$\left|\overline{CA}\right|^2=c^2+a^2$。

步驟 2： 而$(\triangle ABC)^2=\left(\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|\sin\angle BAC\right)^2=\dfrac{1}{4}\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2\sin^2\theta$（$\theta=\angle BAC$）

$=\dfrac{1}{4}\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2(1-\cos^2\theta)$

步驟 3：因 $cos\theta = \dfrac{|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2-|\overline{BC}|^2}{2|\overline{AB}||\overline{AC}|}$

$$\therefore 1-cos^2\theta = \frac{4|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2-|\overline{BC}|^2)^2}{4|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2}$$

步驟 4：故 $(\triangle ABC)^2 = \dfrac{4|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2-|\overline{BC}|^2)^2}{16}$

$$=\frac{4\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)-[\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2\right)]^2}{16}$$

$$=\frac{4\left(a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)-\left(2a^2\right)^2}{16}$$

$$=\frac{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{16}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$$

$$=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2$$

此方法直接取 $\triangle ABC$ 的三邊長計算比較其關係，可於高中學生三角函數學習完畢，配合空間圖形進行說明補充。

參、結語

本文從一般國中常見的蜜蜂與螞蟻問題出發，到具挑戰性的空間切割三角錐底部面積的計算，並從特例到一般例，提供了國中生尚可接受的立體綜合幾何與綜合幾何＋代數法解法，以及綜合高中多種數學概念的其它三種解法，藉由空間的視覺化與圖說，逐步導出不同面向的幾種方法，對於部分較不具抽象立體概念的高中生，或許也能有些幫助。若能將此引進中學幾何內容，將是一堂由淺入深的數學課程；而在目前強調多元評量的教育中，若能針對不同程度學生以五種不同方式作說明，並比較所使用的數學知識與難易度，也可算是種差異化教學。期待藉此文章的多種解法，提供給所有教學現場的教師與學生，一些數學概念綜合應用不一樣的想法。

參考文獻

蘇進發。「談勾股定理」簡報，2005/12/8~9 發表，未出版。

李政憲（2013）。畢氏定理，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊（上）。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地（2013）。直角三角形母子相似定理與海龍公式，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊（下）。新北市：國家教育研究院。

張海潮（2010）。法線定理與三垂線定理，教育部高中學科中心電子報第 43 期：(檢索日期：2014/1/18）http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=d7fc55cd-5b54-4b44-a63d-4ee9609e5ca2