圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣(上)

李輝濱

嘉義縣私立同濟高級中學

壹、前言

本文是作者在中研院數學所發行的數學傳播季刊 148 期 2013 年 12 月期刊中 ,所發表的圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣、補充及完整證明 ; 主因是許多讀者來信 ,表明作者只有在該文中證明圓內接五邊形的正弦定律 ,其餘則以節略方式帶過 ,最後將歸納出的結果一筆敘述出來。讀者希望看到推廣的正弦定律的完整證明 ;因此 ,作者重新整理文稿 ,將其一般化的推理驗證過程 ,在本篇正文中詳實呈現出來。

本篇正文中所有方程式的敘述都以位階較高的符號意象表達其一般式 ,建議一般讀者需要先閱讀上述數學傳播季刊 148 期的文稿 ,再與本篇內容具體相互對照比較後始能體驗明確清晰導證過程。

三角形的正弦定理是三角函數、幾何學及測量學領域中必備的基本數學知識。此定理成立的主要原因之ㄧ是任意一個三角型必內接於ㄧ圓。根據此特徵來探討圓內接多邊形是否也具有相同類似的正弦關係式?經分析研究後,發現所有圓內接奇數邊多邊形的幾何結構都具有這種完美、對稱且令人欣賞、讚譽有加、極具簡明比例型態的正弦公式!

本研究內容是將凸多邊形的內角分配成偶數標內角集合及奇數標內角集合兩部份,再以設定一個角度修正參數做為媒介來聯繫這兩集合,據此推證出平面凸多邊形的正弦、餘弦公式。更有甚之,進而發現圓內接奇數邊多邊形的完美比例型正弦公式!全篇內文中詳盡之觀察對照、歸納研析及推理演繹的探索脈絡,在以下正文的敘述中將完整的呈現出來,請仔細參閱作者精心鑽研,思路明晰的論述過程!

貳、本文

一、平面凸多邊形的向量性質

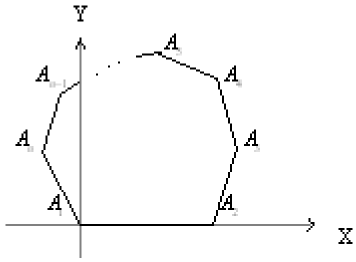
任給一個平面凸 n 邊形,其各頂點依序為 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,\ A_{n-2},A_{n-1},A_n\ A_{n-2}$,並令一邊 A_1A_2 的向量為 $\overrightarrow{V_1}$,$\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{V_2}$,$\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{V_3}$,……,$\overrightarrow{A_mA_{m+1}}=\overrightarrow{V_m}$,……,$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{V_{n-1}}$,$\overrightarrow{A_nA_1}=\overrightarrow{V_n}$,則此平面凸 n 邊形即為 $\overrightarrow{V_1}$,$\overrightarrow{V_2}$,$\overrightarrow{V_3}$,…,$\overrightarrow{V_n}$ 等 n 個向量按序箭頭接箭尾相加而成的封閉凸 n 邊形。依向量加法性質知;

$$\sum_{m=1}^{n}\overrightarrow{V_m}=0=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}\ ,$$

θ_m 為 V_m 在直角座標平面上的方位角。$\vec{i}$ 為正 X 軸方向的單位向量，$\vec{j}$ 為正 Y 軸方向的單位向量。

再由平面正交座標系性質知；$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$ 且 $\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$

引理 1. 任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，…，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$。將頂點 A_1 置於直角座標平面上的原點 O，使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，如下圖(1)，則



圖(1)凸 n 邊形

$$V_1=\sum_{m=2}^{n}(-1)^m\cdot V_m\cdot\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)\ldots\ldots(1)\qquad 且\quad \sum_{m=2}^{n}(-1)^m\cdot V_m\cdot\sin\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)=0\ \ldots\ldots(2)$$

證明： 由圖(1)知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$，故 V_1 的方位角 θ_1 為零，V_2 的方位角 θ_2 為 $\pi-A_2$，V_3 的方位角 θ_3 為 $\pi-A_2+\pi-A_3$，V_4 的方位角 θ_4 為 $\pi-A_2+\pi-A_3+\pi-A_4$，……，V_n 的方位角 θ_n 為 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\cdots+A_n)$。

將這 n 個方位角全部代入以下方程式中：$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$ 且 $\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$ 則

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=V_1+V_2\cos(\pi-A_2)+V_3\cos(2\pi-A_2-A_3)+\cdots+V_n\cos\left[(n-1)\pi-\sum_{k=2}^{n}A_k\right]=0$$

將上列等式逐項展開、化簡後再縮減改寫成下式；

$$得\quad V_1=\sum_{m=2}^{n}(-1)^m\cdot V_m\cdot\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$另\ \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=V_2\sin(\pi-A_2)+V_3\sin(2\pi-A_2-A_3)+\cdots+V_n\sin\left[(n-1)\pi-\sum_{k=2}^{n}A_k\right]=0$$

再將上列等式改寫成下式；得 $\sum_{m=2}^{n}(-1)^m \cdot V_m \cdot \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) = 0$ ……..(2)

引理 2. 平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，其所有內角的總和恰為 $(n-2)\pi$；證明（略）。

引理 3. 圓內接偶數邊（2n + 2 邊）多邊形，其 2n + 2 個內角中 $\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k} = \sum_{k=1}^{n+1} A_{2k-1} = n\pi$

證明：由圖(2)、(3)知 $A_1 = \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n+1} = \pi - \theta_1 - \theta_{2n+2}$

$$A_2 = \theta_3 + \theta_4 + \cdots + \theta_{2n+2} = \pi - \theta_2 - \theta_1$$

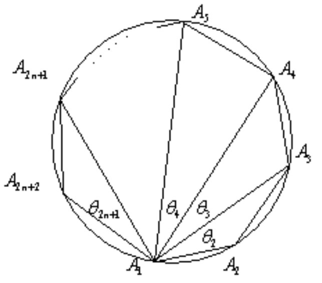
$$A_3 = \theta_4 + \theta_5 + \cdots + \theta_1 = \pi - \theta_3 - \theta_2$$

$$A_4 = \theta_5 + \theta_6 + \cdots + \theta_2 = \pi - \theta_4 - \theta_3 \cdots\cdots\cdots$$

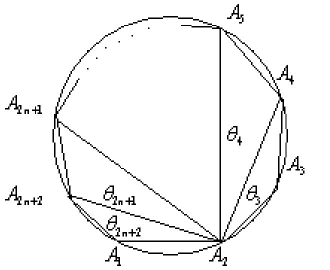
$$A_{2n+1} = \theta_{2n+2} + \theta_1 + \cdots + \theta_{2n-1} = \pi - \theta_{2n+1} - \theta_{2n}$$

$$A_{2n+2} = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n} = \pi - \theta_{2n+2} - \theta_{2n+1}$$

則很容易得證出 $\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k} = \sum_{k=1}^{n+1} A_{2k-1} = n\pi$



圖(2)



圖(3)

現在要利用這三個引理來推導圓內接奇數邊多邊形的正弦公式。

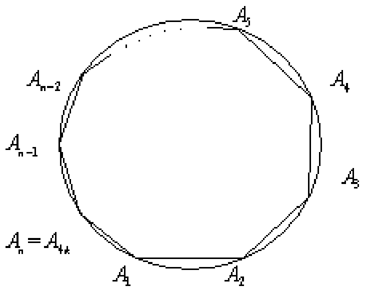
二、平面凸 n 邊形的正弦公式及餘弦公式

四邊形以上的平面凸多邊形恰可分成四種類型；即 n= 4k，n= 4k+1，n= 4k+2，n= 4k+3，k 為 自然數。以下敘述內容是欲將此四種類型的正弦、餘弦關係式尋找出來：

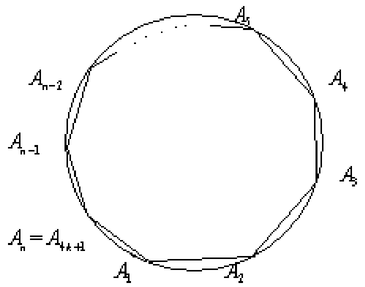
(一) 第一類型，n= 4k 請參閱圖(4)

(B-1-s-1).由引理 1 的方程式(2)，寫成下式；

$$\sum_{m=2}^{n}(-1)^m \cdot V_m \cdot \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



圖(4)



圖(5)

Key idea： 將上式(2)拆成四部份，並化簡使任一項的內角數目少於 n/2 個，如下；

$$V_2 \sin A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$+ \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) + V_n \sin\left(\sum_{j=2}^{n} A_j\right) = 0 \;\ldots\ldots\ldots(2\text{-}1b)$$

觀察 (2-1b)式中的第三項、第四項內的內角，發現每一 sin 項中內角的數目皆超過 n/2 個，因此將其作一個轉換，轉換成內角數目少於 n/2 個，運算過程如下；

由 n 邊形的內角總和為(n－2)π= (4k－2)π，故 sin(n－2)π= 0，cos(n－2)π= 1，則第三項的

$$\sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) = \sin\left[(n-2)\pi - A_1 - \sum_{c=m+1}^{n} A_c\right] = -\sin\left(A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c\right)$$

且　$\sin\left(\sum_{j=2}^{n} A_j\right) = \sin\left[(n-2)\pi - A_1\right] = -\sin A_1$,將此 2 個轉換式代入(2-1b)式,得

$$V_2 \sin A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$+ \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1} (-1)^{m+1} V_m \sin\left(A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c\right) - V_n \sin A_1 = 0 \ldots\ldots(3)$$

(B-1-s-2). Keyidea： 將(3)式中內角轉換成偶數標內角及奇數標內角的組合

將 n 邊形的所有內角分配成偶數標內角及奇數標內角兩部份，而 n 邊形的所有內角總和為(n－2)π，此偶數標內角總和及奇數標內角總和約略各視為接近(n－2)π 的一半；現在，令ϕ為角度的修正參數，

並取 $A_2+A_4+\cdots+A_{\frac{1}{2}\left[2n-1+(-1)^n\right]} = \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]} A_{2i} = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi-\phi$ ……………(3-a)

且 $A_1+A_3+\cdots+A_{\frac{1}{2}\left[2n-1-(-1)^n\right]} = A_1+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]} A_{2i+1} = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi$ ………(3-b)

將(3-a)式及(3-b)式代入(3)式中，經化簡、整理時，發現有下列兩種情形；

(i). 當 m 是偶數，(3)式中第二項內的 sin 項內的角度和轉換為下式

$$\sum_{j=2}^{m} A_j = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-2)} A_{2i+1} - \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-m)} A_{m+2i}$$

而同樣在第三項內的 sin 項內的角度和則轉換為下式

$$A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \phi - \left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-2)} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-m)} A_{m+2i}\right)$$

(ii). 當 m 是奇數，(3)式中第二項內的 sin 項內的角度和轉換為下式

$$\sum_{j=2}^{m} A_j = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} A_{2i+1} - \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-m+1)} A_{m+2i-1}$$

而同樣在第三項內的 sin 項內的角度和則轉換為下式

$$A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \phi - \left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-m+1)} A_{m+2i-1}\right)$$

觀察比對上述 (i), (ii) 兩情況，無論 m 是偶數或奇數，皆可組合成統一的表示式如下；即 (3)式中第二項內的 sin 項內的角度和轉換為下列統一的表示式

$$\sum_{j=2}^{m} A_j = \left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]} A_{2i+1} - \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}} \quad \text{………(3-c)}$$

而(3)式中第三項內的 sin 項內的角度和則轉換為下列統一的表示式

$$A_1+\sum_{c=m+1}^{n}A_c=\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\text{....(3-d)}$$

現在將(3-a), (3-b), (3-c), (3-d) 四式一併代入方程式(3)中，即得下式

$$V_2\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi-\phi-\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$-V_n\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]=0\text{.......................................(4)}$$

(B-1-s-3). 再由 $[(n/2)-1]\pi=(2k-1)\pi=2(k-1)\pi+\pi$，可得 $\sin\{[(n/2)-1]\pi\}=0$ 及 $\cos\{[(n/2)-1]\pi\}=-1$ 則將方程式(4)化簡，即得下列方程式(5)

$$V_2\sin\left[\phi+\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\sin\left[\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$+V_n\sin\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]=\mathbf{0}\text{...(5)}$$

(B-1-s-4).Key idea： 現在要將方程式(5)中的參數 ϕ 代換掉，方法如下；先將方程式(5)中各項內的 ϕ 分離，展開並重新組合各項，提出 $\sin\phi$ 與 $\cos\phi$，整理成下式(6)；

$$P_1\cdot\sin\phi+R_1\cdot\cos\phi=0\text{ ....(6)}$$

$$P_1=V_2\cos\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]+V_n\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]$$

$$R_1=V_2\sin\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]-V_n\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]$$

(B-1-c).key idea :此(6)式中有 $\sin\phi$ 與 $\cos\phi$ 兩項 ,要解出此兩者分別與 p_1,R_1 關係而得方程式(9)與(10)，需再尋找另一方程式(8)，過程於下；倣效前述**(B-1-s-1).**的推導過程，由 引理 1 的方程式(1)，將其展開並化簡後，可得下式；

$$V_1=\sum_{m=2}^{n}(-1)^m\cdot V_m\cdot\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)=V_2\cos A_2+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)+V_n\cos\left(\sum_{j=2}^{n}A_j\right)$$

$$=V_2\cos A_2+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\cos\left(\sum_{j=2}^{m}A_j\right)$$

$$\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\cos\left(A_1+\sum_{c=m+1}^{n}A_c\right)+V_n\cos A_1$$

$$=V_2\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi-\phi-\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m \cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m \cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$+V_n\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]$$

$$=-V_2\cos\left[\phi+\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m \cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m \cos\left[\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$-V_n\cos\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right] \cdots\cdots\cdots(7)$$

至此，再倣效前述方程式(5)的方法；將方程式(7)展開並重新組合各項，整理成下式(8)；

$$V_1=-\,P_1\cdot\cos\phi+R_1\cdot\sin\phi \cdots\cdots\cdots(8)$$

此處 P_1與 R_1恰和方程式(6)者完全相同。聯立解出方程式(6)與方程式(8)，得

$$R_1=V_1\sin\phi \cdots\cdots\cdots(9)$$

與 $P_1=-\,V_1\cos\phi \cdots\cdots\cdots(10)$

(B-1-d). 求出 $n=4k$ 多邊形的正弦公式、餘弦公式

再利用(3-a)式，求出 $\sin\phi=\sin\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right)$ 及 $\cos\phi=-\cos\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right)$

將此兩式代入方程式(9)與方程式(10)，再移項，整理成正弦公式、餘弦公式，如下；

$$V_1\sin\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right)-V_2\sin\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-V_n\sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

$$V_1\cos\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right)-V_2\cos\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-1}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)+1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-V_n\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

以上所得證之方程式(11) 為 n= 4k 平面凸多邊形的正弦公式，而另一個方程式(12) 則為此 n =4k 平面凸多邊形的餘弦公式。

(二)第二類型 *n*= 4k+1　請參閱圖(5)，

key idea：以下完全仿效第一類型的推演過程 ；

(B-2-s-1). 倣效**(B-1-s-1).** 的作法，由 引理 1.的方程式(2),將其寫成下式；

$$\sum_{m=2}^{n}(-1)^m \cdot V_m \cdot \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

再將上式(2)拆成五部份，如下；

$$V_2 \sin A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) + \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$+ (-1)^{n-1} V_{n-1} \sin\left(\sum_{j=2}^{n-1} A_j\right) - V_n \sin\left(\sum_{j=2}^{n} A_j\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ 2-1c })$$

將此 (2-1c)式中之第三、四、五項的內角作轉換，再經運算後即得下式；

$$V_2 \sin A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \sin\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) + \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m \sin\left(A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c\right)$$

$$+ (-1)^{n-1} V_{n-1} \sin(A_1 + A_n) - V_n \sin A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots(\text{ B-2-3 })$$

(B-2-s-2). 將 (B-2-3)式中內角轉換成偶數標內角及奇數標內角的組合

同理，仿照 **(B-1-s-2).**將 (B-2-3)式中內角轉換成偶數標內角及奇數標內角的組合，運算後即得下式；

$$V_2 \sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi - \phi - \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]} A_{2i}\right] + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m$$

$$\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]} A_{2i+1} - \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] + \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m$$

$$\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \phi - \left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right] +$$

$$(-1)^{n-1} V_{n-1} \sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-7-(-1)^n\right]} A_{2i+1}\right] - V_n \sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi + \phi - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]} A_{2i+1}\right]$$

$$= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ B-2-4 })$$

(B-2-s-3). 由 $[(n/2)-1]\pi=(2k-1/2)\pi$，可得 $\sin\{[(n/2)-1]\pi\}=-1$ 及 $\cos\{[(n/2)-1]\pi\}=0$ 將方程式(B-2-4)化簡，即得下列方程式(B-2-5)；

$$-V_2\cos\left[\phi+\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]}A_{2i}\right]$$

$$-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-2}(-1)^m V_m\cos\left[\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$-(-1)^{n-1}V_{n-1}\cos\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-7-(-1)^n]}A_{2i+1}\right]+V_n\cos\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]}A_{2i+1}\right]=0\ldots..(\text{B-2-5})$$

(B-2-s-4). 將方程式（B-2-5)展開並重新組合各項，提出 $\sin\psi$ 與 $\cos\psi$，整理成下式 (B-2-6)； $-P_2\cdot\cos\phi+R_2\cdot\sin\phi=0$ …………….(B-2-6

$$P_2=V_2\cos\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]}A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+\sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-2}(-1)^m V_m\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$+(-1)^{n-1}V_{n-1}\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-7-(-1)^n]}A_{2i+1}\right]-V_n\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]}A_{2i+1}\right]$$

$$R_2 = V_2 \sin\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]} A_{2i}\right]$$

$$-\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-(-1)^{n-1} V_{n-1} \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-7-(-1)^n\right]} A_{2i+1}\right] + V_n \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]} A_{2i+1}\right]$$

(B-2-c).倣照前述 **(B-1-c).** 的推導過程，由 引理 1. 的方程式(1)，將其展開並化簡後，可得下式；

$$V_1 = \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \cdot V_m \cdot \cos\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$= V_2 \cos A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \cos\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$+ \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m \cos\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right) + (-1)^{n-1} V_{n-1} \cos\left(\sum_{j=2}^{n-1} A_j\right) - V_n \cos\left(\sum_{j=2}^{n} A_j\right)$$

$$= V_2 \cos A_2 + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]} (-1)^m V_m \cos\left(\sum_{j=2}^{m} A_j\right)$$

$$- \sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2} (-1)^m V_m \cos\left(A_1 + \sum_{c=m+1}^{n} A_c\right) - (-1)^{n-1} V_{n-1} \cos(A_1 + A_n) + V_n \cos A_1$$

$$= V_2 \cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi - \phi - \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]} A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m \cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2}(-1)^m V_m \cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$-(-1)^{n-1}V_{n-1}\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-7-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]$$

$$+\ V_n\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi+\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]$$

$$=-\ V_2\sin\left[\phi+\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}\left[2n-1+(-1)^n\right]}A_{2i}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right]}(-1)^m V_m \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right]$$

$$-\sum_{m=\frac{1}{4}\left[2n+7+(-1)^n\right]}^{n-2}(-1)^m V_m \sin\left[\phi-\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2m-3-(-1)^m\right]}A_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-m)-1-(-1)^m\right]}A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right)\right]$$

$$-(-1)^{n-1}V_{n-1}\sin\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-7-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]+\ V_n\sin\left[\phi-\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}\left[2n-3-(-1)^n\right]}A_{2i+1}\right]\ldots\ldots\text{(B-2-7)}$$

接下來，將此方程式（B-2-7)展開並重新組合各項，整理成下式(B-2-8)；

$$V_1=-\ P_2\cdot\sin\phi-R_2\cdot\cos\phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(B-2-8)}$$

此處 P_2 與 R_2 恰和方程式（B-2-6)者完全相同。

(B-2-d).　求出 n= 4k+1 多邊形的正弦公式、餘弦公式

聯立解出方程式（B-2-6）與方程式（B-2- 8），得

$$R_2=\ -V_1\cos\phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(13)}$$

與 $P_2 = -V_1 \sin\phi$ ……………………………………………………(14)

再利用(3-a)式，求出 $\sin\phi = -\cos\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right)$ 及 $\cos\phi = -\sin\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right)$

將此兩式代入方程式(13) 與方程式(14)，再移項，整理成正弦公式、餘弦公式，如下；

$$
\begin{aligned}
& V_1 \sin\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right) - V_2 \sin\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right] \\
& + \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\
& + \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-2} (-1)^m V_m \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\
& + V_{n-1} \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-7-(-1)^n]} A_{2i+1}\right] - V_n \sin\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]} A_{2i+1}\right] = 0 \text{………..(15)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& V_1 \cos\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right) - V_2 \cos\left[\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}[2n-1+(-1)^n]} A_{2i}\right] \\
& - \sum_{m=3}^{\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]} (-1)^m V_m \cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\
& - \sum_{m=\frac{1}{4}[2n+7+(-1)^n]}^{n-2} (-1)^m V_m \cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2m-3-(-1)^m]} A_{2i+1} - \sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2(n-m)-1-(-1)^m]} A_{m+2i-\frac{1-(-1)^m}{2}}\right] \\
& - V_{n-1} \cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-7-(-1)^n]} A_{2i+1}\right] + V_n \cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-3-(-1)^n]} A_{2i+1}\right] = 0 \text{………..(16)}
\end{aligned}
$$

以上所推證之方程式**(15)**為 **n= 4k+1** 平面凸多邊形的正弦公式，而另一個方程式**(16)**則為此 **n= 4k+1** 平面凸多邊形的餘弦公式。　(待續)