從克卜勒行星繞日運動到牛頓萬有引力平方反比定律

黃光照* 蕭志明

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在教學的過程中，我們很想知道如何由克卜勒行星三大運動定律開始，透過向心加速度的概念並配合牛頓運動定律，推導出牛頓的萬有引力與兩物體之距離平方成反比的結論。

貳、曲線的曲率與曲率半徑

如圖 1 所示，為了描述曲線的彎曲程度，定義曲線上 AB 兩點切線變化的角度 $\Delta\alpha$（$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$，其中 α 與 α' 為曲線在 A 點的切線與 x 軸的夾角與曲線在 B 點的切線與 x 軸的夾角）與 AB 兩點間弧長 Δs 的比值，為 AB 兩點間曲線線段的平均曲率（為了方便使用，令曲率為正值）

$$\text{平均曲率}\quad \bar{k} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

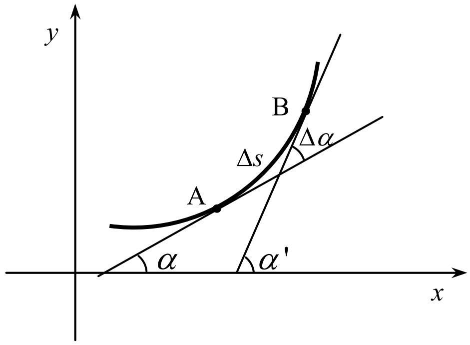

圖 1　曲率

對於曲線上的一個點，如 A 點，為精確描述此處曲線的彎曲程度，可令 B 點趨近 A 點，也就是 $\Delta s \to 0$，則此處的曲率為：

$$\text{曲率}\ k = \left|\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

*為本文通訊作者

$$\because ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\ =\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\ dx=\sqrt{1+y'^2}\ dx$$

又因為曲線的切線斜率為　$\tan\alpha=y'$

$$\Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(\ y')\qquad \Rightarrow d\alpha=\frac{d\tan^{-1}(\ y')}{d(\ y')}\cdot\frac{dy'}{dx}\cdot dx=\frac{1}{1+y'^2}\cdot y''\cdot dx$$

所以可推出曲率計算公式：

$$曲率\ k=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$$

因為曲率半徑為曲率的倒數，所以曲率半徑

$$R=\frac{1}{k}=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}\right|=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right| \qquad (1)$$

參、由克卜勒第一定律：橢圓軌道，求橢圓的曲率與曲率半徑

如圖 2 所示，若有一橢圓方程式為：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

可利用參數 θ，令 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta \Rightarrow dx=-a\sin\theta\cdot d\theta$；$dy=b\cos\theta\cdot d\theta$

$$\Rightarrow\ y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{-\sin\theta\cdot\sin\theta-\cos\theta\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a^2\sin^3\theta}$$

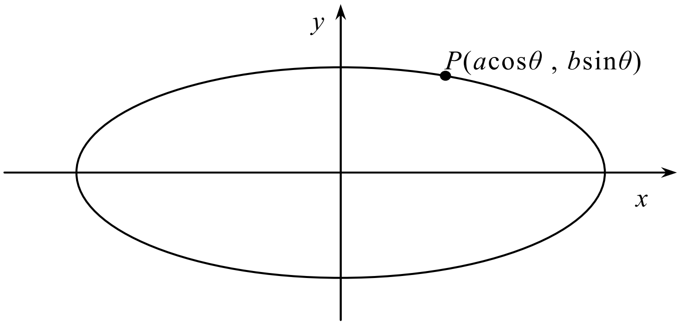

圖 2　橢圓的參數式

代入曲率半徑公式(1)，得

橢圓的曲率半徑 $$R=\left|\frac{[1+(\frac{-b\cos\theta}{a\sin\theta})^2]^{3/2}}{-\frac{b}{a^2\sin^3\theta}}\right|=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab} \qquad (2)$$

更進一步，我們希望引入較有意義的夾角 φ（焦點至橢圓上一點 P 的位置向量 $\vec{r}$，與此點 P 切線速度 $\vec{v}$ 的夾角）來取代參數 θ。

如圖 3 所示，角 β 為位置向量 $\vec{r}$ 與 x 軸的夾角，角 α 為切線也就是速度 $\vec{v}$ 與 x 軸的夾角，所以 $\varphi=\alpha-\beta$。由圖形可知 $\tan\beta=\dfrac{b\sin\theta}{c+a\cos\theta}$ 且 ∵ $\tan\alpha=y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

$$\Rightarrow \tan\varphi=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}-\frac{b\sin\theta}{c+a\cos\theta}}{1+(-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta})(\frac{b\sin\theta}{c+a\cos\theta})}=-\frac{b}{c\sin\theta}$$

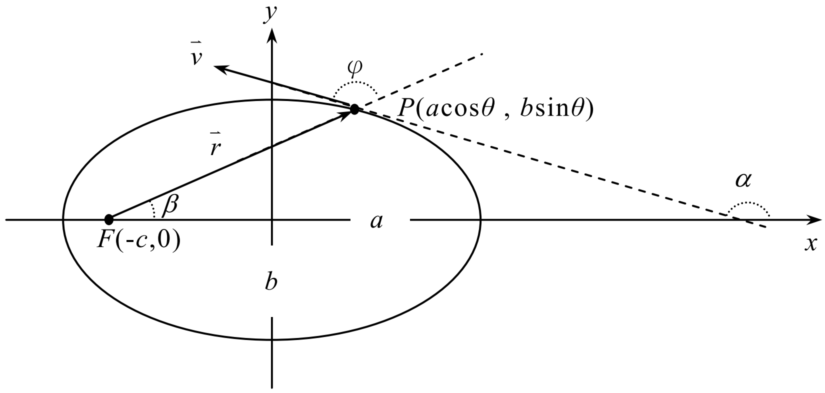

圖 3 橢圓的曲率和曲率半徑

由(2)式，得橢圓的曲率半徑

$$R=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}=\frac{\left[a^2\sin^2\theta+b^2(1-\sin^2\theta)\right]^{3/2}}{ab}=\frac{\left[b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta\right]^{3/2}}{ab}$$

$$=\frac{(b^2+c^2\sin^2\theta)^{3/2}}{ab}=\frac{\left[b^2+(\frac{-b}{\tan\varphi})^2\right]^{3/2}}{ab}=\frac{b^2}{a\sin^3\varphi} \qquad (3)$$

肆、由克卜勒第二、第三行星定律、向心加速度的概念與牛頓運動定律推得萬有引力之平方反比定律

由克卜勒第二定律：$\frac{1}{2}rv\sin\varphi = \frac{ab\pi}{T}$ ⇨ $v = \frac{2ab\pi}{rT\sin\varphi}$

由向心加速度：$A_C = \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{4\pi^2a^2b^2}{r^2T^2\sin^2\varphi}}{\frac{b^2}{a\sin^3\varphi}} = \frac{4\pi^2}{r^2}\frac{a^3}{T^2}\sin\varphi$

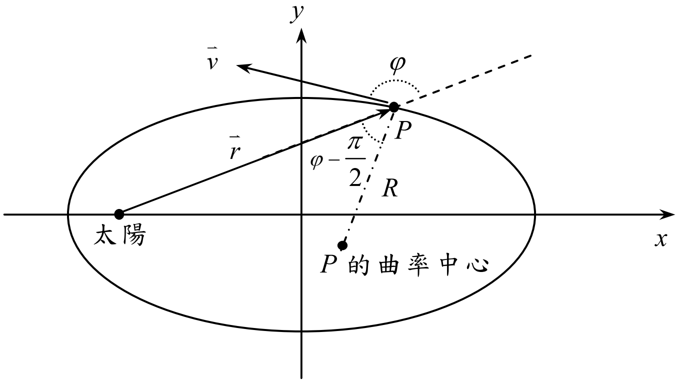

圖 4　平方反比定律推導用圖
(r：行星與太陽間距離；R：P 點的曲率半徑)

由圖 4 知：

行星所受的加速度 $A = \frac{A_C}{\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})} = \frac{A_C}{\sin\varphi} = \frac{4\pi^2}{r^2}\frac{a^3}{T^2}$

由克卜勒第三定律：$\frac{a^3}{T^2} =$ 定值 K ⇒ $A = \frac{4\pi^2K}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$

由牛頓運動定律 ⇒ 質量 m 的行星受太陽引力 $F = mA = m\frac{4\pi^2K}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$

表明萬有引力與距離平方成反比。

參考文獻

曹亮吉(2002)：怎麼說它有多彎？取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_16_08_2/

徐國誠(2003)：行星橢圓軌道部分相關問題。(龍騰版)科學新天地，第 4 期，38-43。