
直角三角比的學習應在十二年國教 國中課程佔有一席之地

鄭章華^{1*} 李源順²

¹國家教育研究院 課程及教學研究中心

²臺北市立教育大學 數學系

壹、前言

自從第八次全國教育會議決定推動 12 年國民基本教育(教育部, 2010), 數學課程的研修, 首先對 97 高中數學課綱進行微調, 於 102 年公布修正課綱, 完成十二年國教第一波課綱的研發, 並於 103 學年度從高一開始實施(教育部, 2013), 其特色在於十年級完成核心內容的學習並注意和自然學科的橫向連結。接續第一波課綱的研修, 第二波課綱的研修業已展開, 在進到各領域課綱的研修之前, 國家教育研究院結合院內研究員與院外學者進行領域課綱的前導研究, 研究結果做為領域課綱研修的重要參考。本文報告前導研究對於現行數學課程內容探討的部分結果, 特別針對直角三角比的研究發現, 提出來就教於教育界先進, 從三角學發展的歷史來看, 三角函數的本質是三角比(楊孝斌, 2012), 九年一貫課程之前的國中數學課程即採用三角比來定義銳角三角函數(本文稱為直角三角比, 主要是因為它從直角三角形發展出來的)。

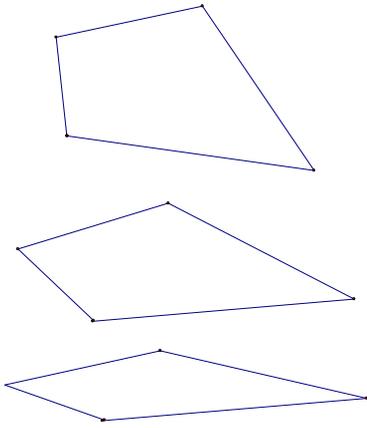
*為本文通訊作者

貳、直角三角比的發展脈絡與重要性

平面幾何的發展有其脈絡, 它可以說是簡化為以直線段為邊的平面圖形, 再簡化為三角形、直角三角形, 以探究其性質與關係, 之後再利用它來解決平面幾何相關的問題。因為平面幾何圖形何其多, 包括許多邊為非直線段的不規則平面圖形。為了能掌握平面圖形, 數學上先探究以直線段為邊的平面圖形(我們忽略圓形不談), 並且在小學的平面幾何課程中, 先從視覺的方式認知平面幾何圖形, 例如, 三角形、正方形、長方形、五邊形、六邊形…等等。人們為了能掌握這些幾何圖形, 在了解其構成要素, 例如: 頂點、邊、角, 並將邊、角等構量化為長度與角度之後, 再加以定義與探究其性質, 例如: 定義正方形的四個角都是直角, 四個邊等長, 同時它有對角線等長且互相垂直平分的性質。

然而以直線段為邊的平面圖形也非常多, 同時我們發現四邊形以上的平面圖形, 即使知道它們的所有邊長, 也無法固定此一平面圖形, 必須再加上它們的夾

角，才能固定平面圖形。例如，知道四邊形的四個邊長分別為 2, 3, 4, 5，它的形狀仍然多變，如下圖所示。



為了掌握以直線段為邊的平面圖形，我們發現所有的多邊形都可以切成數個三角形。同時三角形有很好的特性，只要知道三個邊和內角中的其中三個數據，我們幾乎就可以固定此一三角形（知道兩邊和一鄰角，以及三個角例外）。

在三角形的平面幾何課程中，我們會探究一個非特定三角形內，其邊的關係(任兩邊之和大於第三邊)、角的關係(三角形的內角和為 180°)、邊和角的關係(大邊對大角)。我們也會探討一個特定三角形的邊和角關係(例如：直角三角形中，斜邊的平方和等於兩股的平方和)。當然，當我們了解三角形的性質之後，也會回頭檢視四邊形或者多邊形的性質。

除了上述一個三角形內的關係之外，在國中，我們也會探究兩個三角形之間的全等與相似關係。也就是說，當我們發現二個三角形三個邊對應相等 (SSS)，二個邊和其夾角對應相等 (SAS) 或一個

邊和兩個角對應相等 (AAS, ASA)，則兩三角形全等。當我們發現二個三角形三個邊長成比例 (SSS)，二個邊長成比例和其夾角相等 (SAS) 或一個邊成比例和兩個角相等 (AAS, ASA)，甚至簡化為只要兩個角相等 (AA)，則兩三角形相似。

進一步探討相似三角形的性質，由於一個三角形的三個內角和永遠為 180° ，只要知道其中的兩個角，我們便知道第三個角，因此，它可以說是有兩個變量的問題；再者，由於直角三角形只有一個變量，我們可以很容易掌握它，也就是說，兩個直角三角形，只要知道一個銳角相等，兩個直角三角形便相似。相似三角形的對應邊長會成比例，它的另一種表現方式為三角形任何兩個邊長的比與其相似三角形的邊長比相等。因此，我們將直角三角形的兩個邊長比分別定為六個三角函數。

直角三角比之所以重要，最基本的是人們可以利用它來解決生活中許多與相似相關的問題，例如，當人們想要量一個不容易實際去量的長度(例如旗竿的高度)，可以去測量能夠量得到的一段距離(例如人所在的位置到旗竿的距離)，以及相對應的角度(例如人所在的位置測量到的旗竿全長的仰角 - 夾角)，便可以利用直角三角比把它算出來。就數學史的角度來看，比的關係貫穿著整個三角學的發展史，就學習來看，它做為高中三角函數學習的重要銜接點(楊孝斌, 2012)。當人們更進一步對三角函數進行探究之後，便可以運用正弦定理和餘弦定理精確地描述三角形邊和

角的關係，更可以利用它來了解多邊形的邊和角的精確關係。

參、國內課程對於直角三角比內容的安排

83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準有放入三角函數的內容，按課程標準所編寫的教科書處理此一學習內容的方式有所不同，然而就內容分析來看，嚴格來說，國中教的其實不是三角函數而是三角比(楊孝斌，2012)。

依據 61 年課程標準所出版的數學第六冊課本(國立編譯館，1985)，在第一章教授「數值三角」，學生需有相似形的先備知識，內容鋪陳從第一節：「銳角的三角函數」開始，接連定義正弦、餘弦、正切、餘切、正割與餘割函數，舉 35 度角為例說明如何求三角函數值，接著進入第二節：「特殊角的三角函數值」，求解 30 度、45 度與 60 度特殊角的三角函數值，並說明三角函數間的關係，第三節：「查表法求三角函數值」教授以查表的方式求三角函數值，最後一節：「簡單的應用」，主要是以三角函數解決簡單測量問題。

至於以 74 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，1993)，將三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「數值三角及其應用」，第一節：「銳角三角函數」從應用問題出發，以特殊角(30°-45°-60°)介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，然後才講解餘切、正割與餘割函數的概念，第二節：「三角函數的基本關係」，說

明六個三角函數間的關係，並明確說明倒數關係、商數關係與平方關係，第三節：「用查表法求三角函數值」介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，第四節為「三角函數的應用」同樣以三角函數解決簡單測量問題。

按照 83 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，2000)，同樣將三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易應用」，分為基礎篇與應用篇，在基礎篇中，課本一開始營造問題情境，在界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，並教授兩個特殊直角三角形(30°-60°-90°與 45°-45°-90°)的邊長比之後，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本同樣介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單應用。

由於國中基本學力測驗不可以把選修教材納入命題範圍，導致此單元的學習成效大幅降低，進而影響了高中的教學成效，再者，九年一貫課程暫行綱要刪除了一些學習內容，三角函數即未列入暫行綱要的能力指標之中，現行的九年一貫課程雖然把一些刪除的內容放了回來(例如：二次函數)，不過仍沒有教授直角三角比，高中數學課程雖然也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式(國立中正大學數學系，2006)。

肆、跨國比較的研究發現

目前於美國許多州所實施的新一代數學課程標準：《共同核心州立標準》(Common Core State Standards Initiative, 2010)將直角三角比的學習放到高中數學的「幾何」內容(要提醒讀者注意的是美國高中學制為 9-12 年級)，讓學生藉由相似三角形瞭解到直角三角形邊的比值取決於其角度，從而得出銳角三角形的三角比，並能運用畢氏定理與三角比解決直角三角形相關的應用問題，三角函數則是放在高中數學的「函數」內容，讓學生從座標平面上單位圓的弧度測量出發學習三角函數，藉由逆時鐘方向的弧度測量，理解到三角函數以角(弧度制)為自變數，以該角終邊上一點的坐標比值為應變數。值得注意的是，《共同核心州立標準》在高中數學階段是按照內容進行組織，這與國中小階段按年級安排有所不同，也就是說該份文件並沒有要求在高中階段，某個單元必須比另外一個單元先教授，教師可以視情況自由調整，它保留了往後因數學教育研究發現而進行調整的可能性。陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛(2005)所進行的跨國比較研究指出，新加坡於八年級介紹簡單的三角比，九年級拓展正弦和餘弦的角度至 180 度，並使用相關公式，八、九年級的教科書主要教授正弦、餘弦與正切函數的概念，其例題與練習題不受限於特殊角度，而是 180 度內的任意的角度，包含帶有一位小數的角度，設計讓學生透過查表求解任意角度的問題，韓國在九年級的測量主

題開始教授三角函數(0° 至 90°)。英國於 2013 年九月公布的國家數學課程 (Department for Education, 2013)，要求學生在第三學習階段(即七到九年級)結束時，有能力應用畢氏定理與三角比 (trigonometric ratios)，解決包括直角三角形的相關問題。芬蘭現行的數學課綱 (Finnish National Board of Education, 2004)同樣將應用畢氏定理與三角學進行問題解決，列為六至九年級核心課程內容。中國大陸的課程標準在第三學段(七至九年級)提到利用相似的直角三角形探索與認識銳角三角函數(限於正弦、餘弦和正切概念)，以及知道特殊角之值 (30° 、 45° 、 60°)(中華人民共和國教育部，2011)。日本跟台灣一樣，高中之前完全沒有提到三角函數 (Takahashi, Watanabe & Yoshida, 2008)，高一時開始教授直角三角比，讓學生了解 \sin 、 \cos 、 \tan 是直角三角形的斜邊、對邊及鄰邊所造成的比值，讓學生先有這樣的概念後才導入函數的觀念。

現行的高中課程以一學期的時間完成直角三角比與三角函數的學習，對照其他國家至少以兩年來鋪陳的做法，陳宜良等人 (2005)建議我國也應分兩段時間來學習三角函數，於九年級或十年級開始進行直角三角比的學習，並引入科學計算器。若從九年級開始學習直角三角比，在教學時數無法增加的前提下，可以考慮壓縮國中推理幾何的內容與範圍，刪除「兩圓關係」、「弦切角」、「三角形內心」內容，理由為：「兩圓關係及弦切角在各國綱要中均無提及，內心則只

有在日本及大陸談及，這一部份刪除並不影響高中的學習」(p. 109)，直角三角比的學習內容聚焦在處理直角三角形特殊角的邊角性質，至於倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係留待 11 年級處理。

伍、結論

綜合以上的討論，參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，直角三角比似乎可以放入國中階段的九年級教授。若放在九年級上學期教授，當教學時數無法增加時，可以考慮壓縮九上推理幾何課程的內容，刪除「兩圓關係」、「弦切角」、「三角形內心」；若放在九年級下學期教授，可以考慮將九下的機率概念提前至七、八年級，甚至於國小第三學習階段教授。教授內容可聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入電算器，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，建議延後至高中數學教授。

參考文獻

- 中華人民共和國教育部(2011)。**義務教育數學課程標準**。取自：<http://mat1.gting.com/edu/pdf/edu/xkb2011/20120130155736445.pdf>
- 楊孝斌(2012)。**三角學的歷史對任意角三角函數的教學啟示**。**數學傳播**，**36**(3)，86-96。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛(2005)。**中小學數學科課程綱要評估與發展研究**。教育部高中數學學科中心。取自 <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Center/CourseOutline.aspx>
- 教育部(2010)。**第八次全國教育會議實錄**。臺北市：作者。取自 http://www.edu.tw/FileUpload/1052-10320%5CDocuments/%E7%AC%AC8%E6%A1%E6%9C%83%E8%AD%B0%E5%AF%A6%E9%8C%8420111020_%E9%83%A8%E5%88%861.pdf
- 教育部(2013)。**103 年十二年國民基本教育課綱準備就緒**。取自 <http://www.edu.tw/pages/detail.aspx?Node=1088&Page=19565&wid=ddc91d2b-ace4-4e00-9531-fc7f63364719&Index=1>
- 國立編譯館(1985)。**國中數學第六冊**。臺北市：作者。
- 國立編譯館(1993)。**國中第六冊選修數學**。臺北市：作者。
- 國立編譯館(2000)。**國中第六冊選修數學**。臺北市：作者。
- 國立中正大學數學系(2006)。**九年一貫數學學習領域銜接高中課程教材**。取自：http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/95sutdy/PDF/Expound_9596.pdf
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Common Core State Standards Initiative. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- Department for Education (2013). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study (Statutory guidance)*. Retrieved from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>.
- Finnish National Board of Education (2004). *National Core Curriculum for Basic Education 2004*. Retrieved from http://www.oph.fi/download/47672_core_curricula_basic_education_3.pdf
- Takahashi, A., Watanabe, T., Yoshida, M. (2008). *English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study*. Retrieved from http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/Japanese_COS2008Math.pdf