以中學生的觀點看尤拉線與九點圓

李政豐 [1*] 陳昭地 [2]

[1] 國立竹南高級中學

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

瑞士數學家 Euler (1707~1783)發現了尤拉線，它跟九點圓有很密切的關係。而最早提出九點圓的是英國的 Benjamin Beven，發表在 1804 年的一本英國雜誌上，第一個完全証明九點圓這個定理的是法國數學家 Poncelet(1788-1867)。九點圓是幾何學的一個著名問題，然而尤拉線與九點圓在中學生的認知裡還是很生疏。在編寫國家教育研究院國民中學數學教材原型的過程中，感覺到目前幾何課程的份量逐漸減輕，在過去教學的經驗裡，要訓練學生證明與推理的能力，幾何是大家公認不可或缺的教材。在台灣師大數學系陳昭地教授的指導下，他很自然的運用簡明易懂的手法，親切的解釋了九點圓的意涵，讓中學生能夠以比較低門檻的心情進入幾何的世界。我們先從不等邊的銳角三角形 ABC 開始，以中學生熟悉的平面幾何、解析幾何，逐步解說九點圓的形成，事實上九點圓對任意三角形都成立。我們藉助 Geogebra 強大的繪圖功能，讓中學生由視覺化的圖像表徵，看到下列的性質：

1. 三角形 ABC 的外接圓半徑是三角形 ABC 的九點圓半徑的兩倍。
2. 三角形 ABC 的重心，在外心與垂心連線段接近外心的三分點上。
3. 三角形 ABC 的九點圓圓心，在外心與垂心連線段的中點。
4. 等腰非直角三角形的九點圓會退化成八點圓。
5. 等腰直角三角形的九點圓會退化成四點圓。
6. 正三角形的九點圓會退化成六點圓。

貳、本文

我們先從步驟化呈現的方式，分段說明九點圓的性質與成因：

步驟 1： 不等邊的銳角三角形 ABC，三邊的中點跟任意高的垂足產生四點共圓，如圖 1，A', B', C', F 四點共圓，理由如下：

(1) $\overline{A'B'} // \overline{AB}$，$\overline{A'B'}=(1/2)\overline{AB}=\overline{BC'}$，$A'B'C'B$ 是 ▱，$\overline{C'F}$ 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{A'B'} // \overline{C'F}$。

*為本文通訊作者

(2) A' 為直角三角形 CBF 斜邊中點，與三頂點等距離，$\overline{A'F}=\overline{A'B}$。

(3) 四邊形 A′B′C′F 中，$\overline{A'B'}\,//\,\overline{C'F}$，且 $\overline{A'F}=\overline{B'C'}$，四邊形 A′B′C′F 為等腰梯形，$\angle A'B'C'+\angle A'FC'=180^\circ$。故等腰梯形 $A'B'C'F$ 為圓內接四邊形。當垂足 F 在 C' 的左邊，同理可證。

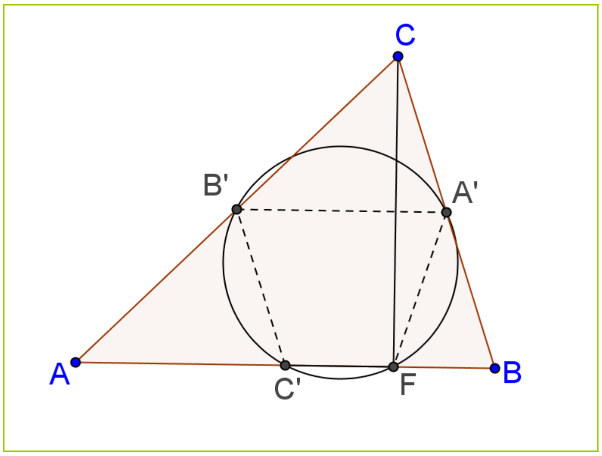

圖 1

步驟2： 由以上步驟1之理由，如圖2，知F在 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，故 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓通過高 $\overline{CF}$ 的垂足；同理 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓亦通過 $\overline{BC}$ 邊上高的垂足D及 $\overline{AC}$ 邊上高的垂足E。故知 A',B',C',D,E 與F都在 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，即 A',B',C',D,E,F 六點共圓。

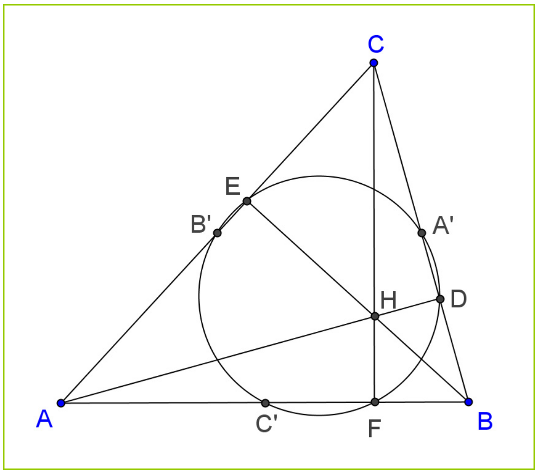

圖 2

步驟3： 設H為不等邊 ΔABC 的垂心(即三高的交點)，M為 $\overline{HC}$ 的中點，如圖3，不含虛線的圖形。連 $\overline{B'C'}$，$\overline{B'M}$，並設 $\overline{B'C'}$ 交 $\overline{AD}$ 於P。期待 B', C', F及M四點共圓。

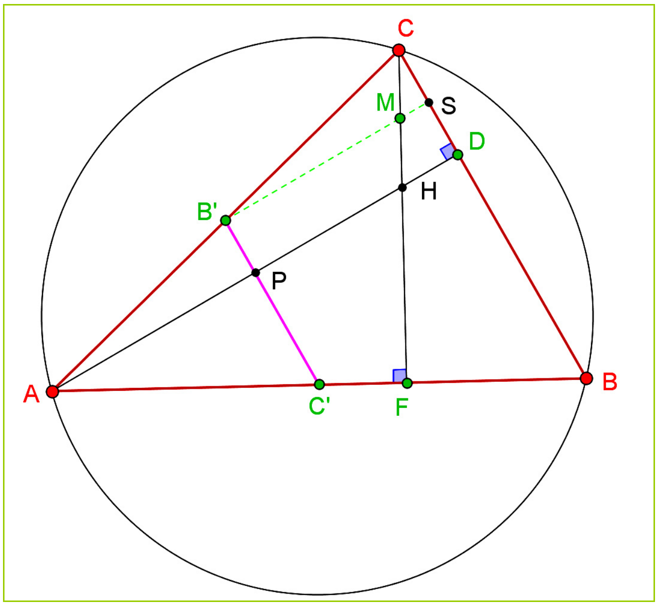

圖 3

理由如下：

(1) 因為 B' , C' 分別為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ 。

(2) 又因為 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，故 $\overline{AD} \perp \overline{B'C'}$

(3) ΔACH 中，因為 B',M 是 $\overline{AC}$, $\overline{CH}$ 的中點，所以 $\overline{B'M} \parallel \overline{AH}$ 。

(4) $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ 所以 $\overline{B'M} \perp \overline{B'C'}$ ，即 $\angle C'B'M = 90^\circ$

在四邊形 $B'C'FM$ 中，$\angle C'B'M + \angle C'FM = 180^\circ$，故 B',C',F 及 M 四點共圓，而 A',B',C',F 四點共圓，此圓也就是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。

步驟4： 同理，如圖4，設 $\overline{HA}$ 的中點為 K,則 A',B',K 及 D 四點共圓，而此圓也是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓；再同理，設 $\overline{HB}$ 的中點為 L,則 B',C',L 及 E 四點共圓，而此圓也是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。綜合得知 A',B',C',M,K,L 六點共圓，此圓即為 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。

由六點圓到七點圓到九點圓：綜合以上的解說，以及步驟2~4，得 A',B',C',D,E,F 與 A',B',C',M,K,L, 兩組六點共圓，且此圓都是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓，即得 $A',B',C',$ D,E,F,M 七點共圓，以至於再加上兩個點 K,L 得 A',B',C',D,E,F,M,K,L 九點共圓，當然此圓亦是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。於是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓除過三頂點 A',B',C' 之外，亦通過 ΔABC 三高的垂足D,E,F，再通過 ΔABC 垂心到頂點的中點M,K,L，這九點都在 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，此外接圓即被稱為 ΔABC 的九點圓。

步驟 5： 在圖 4 中，若 N 是 $\overline{C'M}$ 的中點，則 N 就是 ΔABC 九點圓的圓心，而且 $\overline{C'M}$ 就是九點圓的直徑。

說明：由 $\angle C'B'M = 90^\circ$ ，直角對直徑， $\overline{C'M}$ 是直徑，中點 N 是圓心。

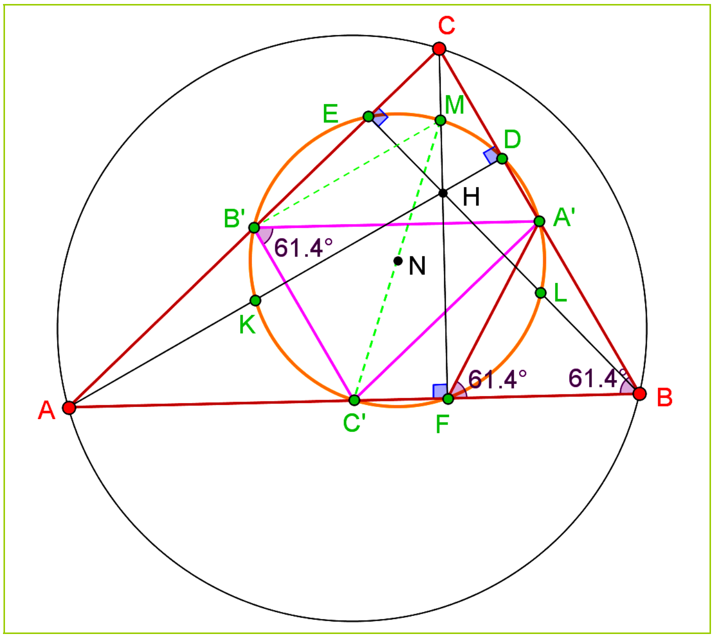

圖 4

步驟 6： 如圖 5， ΔABC 的外心 O,重心 G ,及垂心 H,三點在同一條直線上(稱為尤拉線)，N 是九點圓圓心， $G,N \in \overline{OH}$, $\overline{GH} = 2\ \overline{GO}$ ， $\overline{ON} = \overline{NH}$ 。

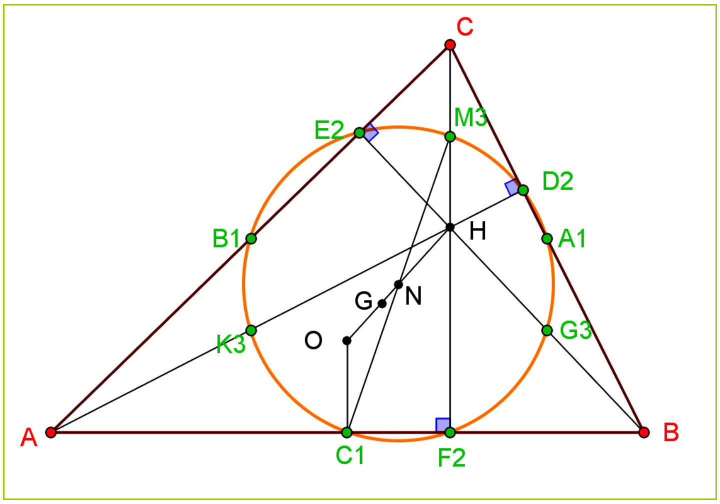

圖 5

解說：用另一角度~坐標幾何，來探究尤拉線。先將它坐標化，不妨設 $\angle C$ 是 ΔABC 的最大內角，將 $\overline{AB}$ 擺放在水平位置充作 x 軸， $\overline{AB}$ 邊上通過 C 點的高 $\overline{CF}$ 所在的直線充作 y 軸，且垂足 F 充作原點，如此建立了 ΔABC 的所在直角坐標平面，如圖 6 所示。

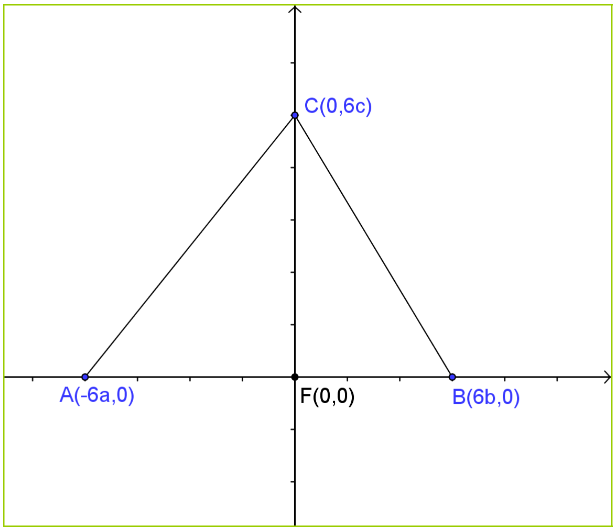

圖 6

注意：為了方便計算，設 A(-6a,0)、B(6b,0)、C(0,6c)，且 $a,b,c>0$ 。
如圖 7 所示，我們想要求 ΔABC 之重心 G，外心 O ,及垂心 H 的坐標。

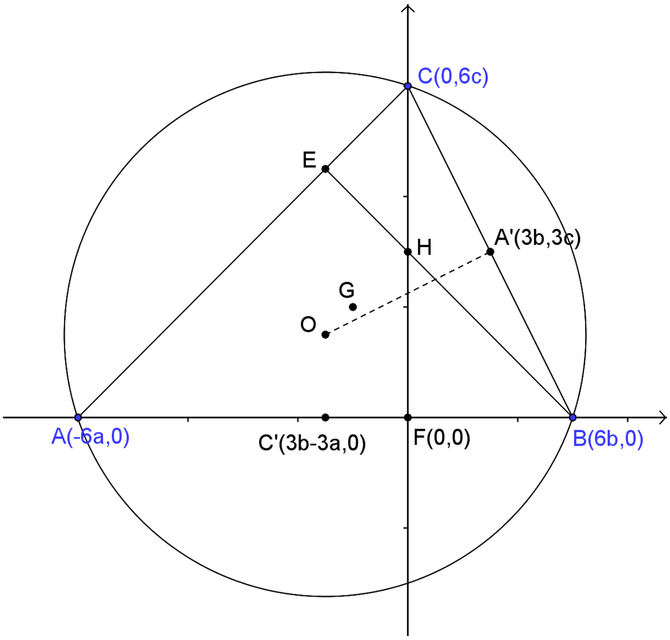

圖 7

圖中 $\overline{BC}$ 的中點 $A'(3b,3c)$ ，$\overline{AB}$ 中點 $C'(3b-3a,0)$

(1) 重心 G 的坐標 $\left(\dfrac{6b+0+(-6a)}{3},\dfrac{0+6c+0}{3}\right)$ 即 $G(2b-2a\ ,\ 2c)$

(2) 垂心 H 的坐標求法如下：其 x 坐標為 0；y 坐標求法如下：$\overleftrightarrow{AC}$ 的斜率為 $\frac{c}{a}$，兩垂直線的斜率乘積等於-1，故 $\overline{AC}$ 邊上的高 $\overline{BE}$ 其斜率為 $\frac{-a}{c}$，故 $\overleftrightarrow{BE}$ 方程式為 $y=\frac{-a}{c}(x-6b)$，以 x=0 代入得 $y=\frac{6ab}{c}$，即 $\mathrm{H}(0,\frac{6ab}{c})$。

(3) 外心 O 的坐標求法如下：$\overline{OC'}$ //y 軸且過 $C'(3b-3a,0)$，$\overleftrightarrow{OC'}$ 的方程式為 $x=3b-3a$。另 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 $\frac{-c}{b}$，故中垂線 $\overleftrightarrow{A'O}$ 的斜率為 $\frac{b}{c}$，而其方程式為 $y-3c=\frac{b}{c}(x-3b)$，以 $x=3b-3a$ 代入得 $y=3c-\frac{3ab}{c}$,知外心 $O(3b-3a,3c-\frac{3ab}{c})$。

進一步說明 O, G , H 三心共線，且 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$。已設 $a>0$：由外心 $O(3b-3a\ ,\ 3c-\frac{3ab}{c})$，重 $G(2b-2a\ ,\ 2c)$，垂心 $\mathrm{H}(0,\frac{6ab}{c})$。

(1) $\overleftrightarrow{OG}$ 的斜率 $\dfrac{c-\frac{3ab}{c}}{(3b-3a)-(2b-2a)}=\dfrac{c^2-3ab}{(b-a)c}$，

(2) $\overleftrightarrow{OH}$ 的斜率為 $\dfrac{3c-\frac{9ab}{c}}{(3b-3a)}=\dfrac{c^2-3ab}{(b-a)c}$

(3) $\overleftrightarrow{OG}$ 與 $\overleftrightarrow{OH}$ 有共同交點 O，而其斜率相同，直線 $\overleftrightarrow{OG}$=直線 $\overleftrightarrow{OH}$，即 O,G,H 三心在同一條直線上。故知三心共線(尤拉線)。當 $a=b$，即 ΔABC 為底邊 $\overline{AB}$ 的等腰三角形，$O(0\ ,\ 3c-\frac{3ab}{c})$，$G(0\ ,\ 2c)$，$\mathrm{H}(0,\frac{6ab}{c})$ 三心都在 y 軸上，當然 $O,\ G\ ,\ H$ 共線。

(4) 試解說 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$。為此令 $X(x,y)$ 為 $\overline{OH}$ 上的點且 $\overline{OX}:\overline{XH}=1:2$，則由分點公式
$$\begin{cases} x=\dfrac{2\cdot(3b-3a)+1\cdot 0}{3}=2(b-a) \\ y=\dfrac{2\cdot\frac{3(c^2-ab)}{c}+\frac{6ab}{c}}{3}=2c \end{cases}$$
，與 $G(2b-2a,2c)$ 完全相同，故 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$。

如圖 8，設 M 為 $\overline{CH}$ 中點，N 為 $\overline{MC'}$ 中點，試說明 N 為 $\overline{OH}$ 的中點。此即為九點圓的圓心在尤拉線上，且平分 $\overline{OH}$。

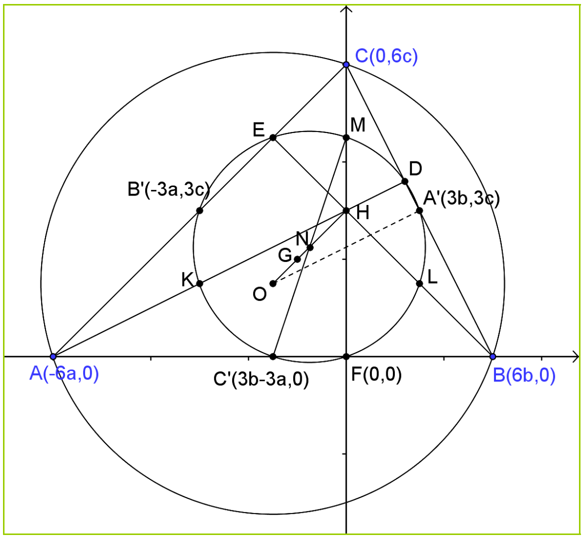

圖 8

C(0,6c)，$H(0,\dfrac{6ab}{c})$，得到 $\overline{CH}$ 中點 $M(0,\dfrac{3(c^2+ab)}{c})$，而 N 為 $\overline{MC'}$ 的中點，故 $N(\dfrac{3(b-a)}{2},\dfrac{3(c^2+ab)}{2c})$，又知道 $O(3b-3a\,,\,3c-\dfrac{3ab}{c})$，$H(0,\dfrac{6ab}{c})$，則 $\overline{OH}$ 的中點坐標為 $(\dfrac{3(b-a)}{2},\dfrac{3(c^2+ab)}{2c})$，亦即 N 也就是 $\overline{OH}$ 的中點。

步驟 7：三角形 ABC 的外接圓半徑是三角形 ABC 的九點圓半徑的兩倍。

如果把圖 4 中，再點上外心 O 重心 G 及畫上 ΔABC 的外接圓與九點圓，再作出一些相關連線，就可以得到比圖四更複雜但有些規則的圖 9，九點圓的圓心 N，是 $\overline{OH}$ 的中點，而重心 G 在 $\overline{OH}$ 近 O 的三分點上。

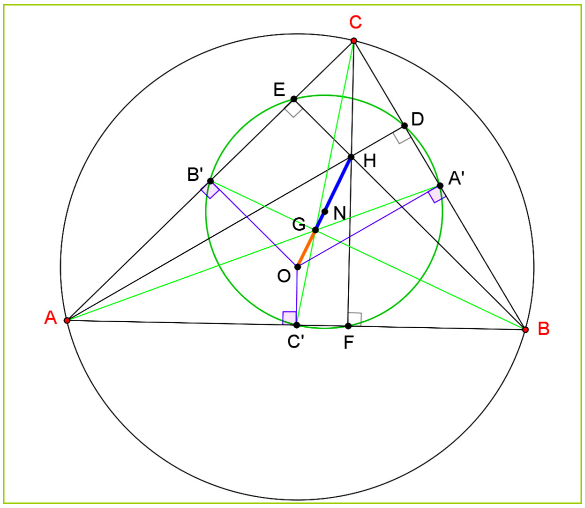

圖 9

說明：ΔABC 相似於 $\Delta A'B'C'$，兩者外接圓的半徑比=兩三角形的邊長比=2:1。如圖 10，由 $\overline{C'M}$ 是直徑，圓心 N 是 $\overline{C'M}$ 點，$\overline{MH} // \overline{OC'}$，由 A.S.A，$\Delta MHN$ 與 $\Delta C'ON$ 全等，故 N 為 $\overline{OH}$ 的中點。

M 是 $\overline{CH}$ 的中點，$\overline{CM} // \overline{OC'}$　$\overline{CM} = \overline{OC'}$，一組對邊平行且相等，則 $OC'MC$ 為平行四邊形，$\overline{C'M} = \overline{OC}$，即得九點圓的直徑等於 ΔABC 的外接圓半徑。

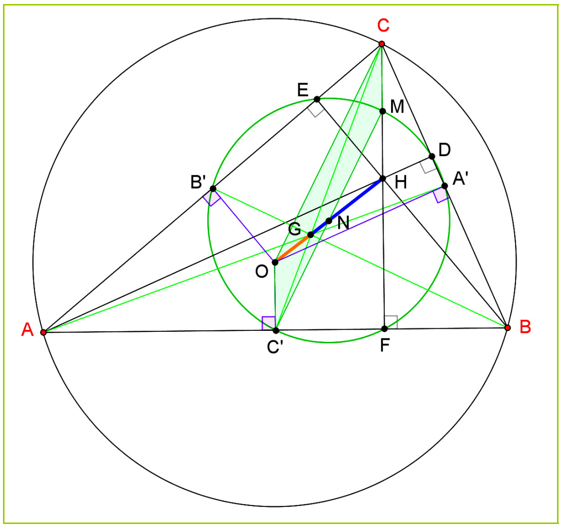

圖 10

步驟 8：九點圓的退化

(1) 如圖 11，等腰非直角三角形的九點圓會退化成八點圓(底邊中點與垂足重合)。

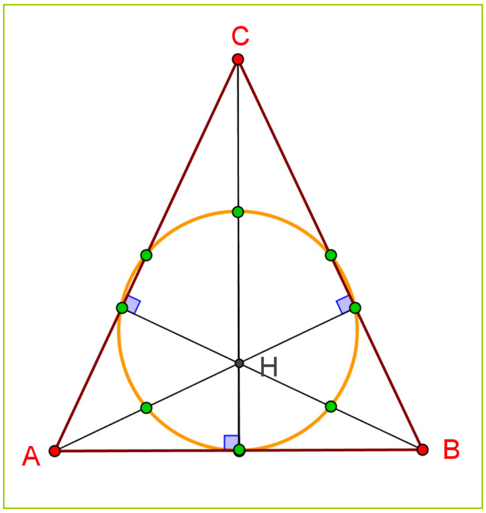

圖 11

(2) 如圖 12、13，等腰直角三角形的九點圓會退化成四點圓。兩腰的垂足與直角頂重疊，少了 1 點(多了頂點 C)。頂點與垂心連線中點少了 3 點(有 2 點與兩腰中點重合,另一點為 $\overline{CH}$ 的中點,但 C=H)，底邊中點與垂足重合,再少一點，因此剩下四點圓。

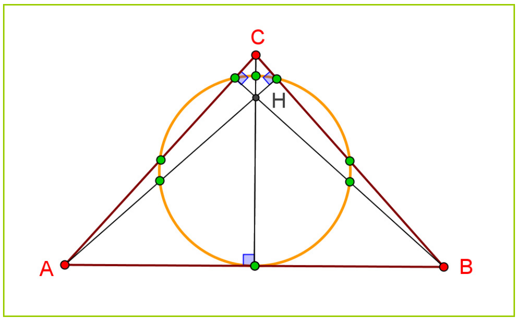

圖 12

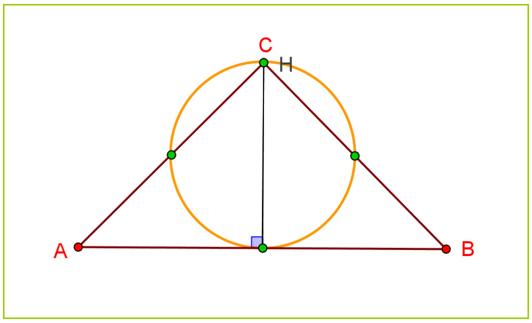

圖 13

(3) 如圖 14，正三角形的九點圓會退化成六點圓。三邊中點與垂足重合，少了三點，因此剩下六點圓

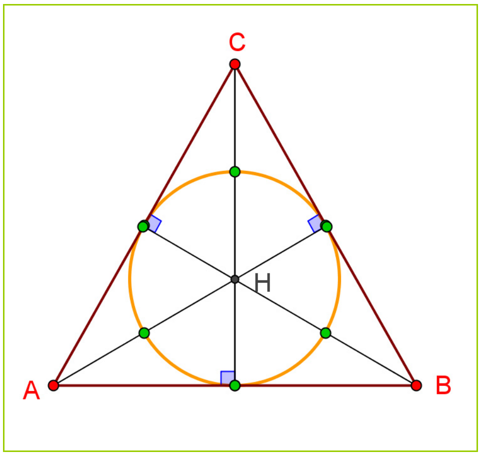

圖 14

參、結語

陳昭地老師以中學生能了解的數學語言，搭配 Geogebra 的圖像表徵，以步驟化呈現的手法，讓尤拉線與九點圓以及其相關的性質，能夠以相對簡明易懂的方式，展現在中學老師及學生的面前，讓大家領略幾何的理路與美感。當動態幾何呈現在課堂上，深奧的理論也變得自然，學生的學習興致變高了，這又是一堂很有感覺的數學課。

參考資料

李虎雄、陳昭地等(2002)。高級中學幾何學及教師手冊。台中：康熙網路圖書有限公司出版印行。

李政豐、陳昭地(2013)。銳角三角形的九點圓，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 5-5 單元主題。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 3-3 單元主題。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。三角形的三心，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 3-5 單元主題。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。平行線與平行截線定理，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 3-4 單元主題。新北市：國家教育研究院。

蘇進發(2013)。平行四邊形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 4-1 單元主題。新北市：國家教育研究院。

李政豐(2013)，圓周角與圓內接四邊形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊第 5-1 單元主題。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、陳昭地(2012)。比例教學篇斜率，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊 (PP.163-182)。新北市：國家教育研究院。

張海潮(2009)。從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓，數學傳播 33 卷 2 期， pp. 48-51。台北市：中央研究院數學研究所。

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 57: Trisecting a circle. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 309-310). Columbus, OH：Merrill.

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 61:.The Nine-Point circle. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 316-317). Columbus, OH：Merrill.

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 62:.The Euler Line. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 344-345). Columbus, OH：Merrill.