

談幾何扣條在國中相似三角形單元的應用

李祐宗

澎湖縣立湖西國民中學

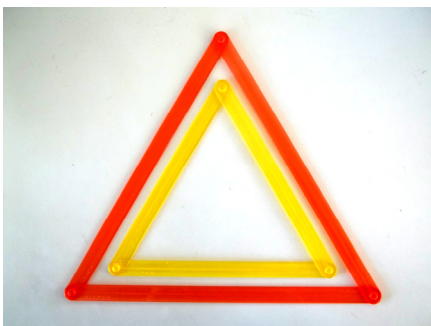
壹、前言

筆者曾發表幾何扣條（詳見附錄）在國中數學三角形、平行與四邊形單元的應用（詳見科學教育月刊第 331、344 期），可見市售的幾何扣條在教學輔助上很有幫助。最近筆者發現在國三上的相似三角形單元中，扣條亦扮演著優良輔助教具的角色，茲介紹如下。

貳、相似形的概念

教師在教學生相似形單元時，必然會問到以下幾個問題，筆者建議學生可以扣條的組合實驗來發現並解決問題。

問題一：兩個正三角形是否相似？

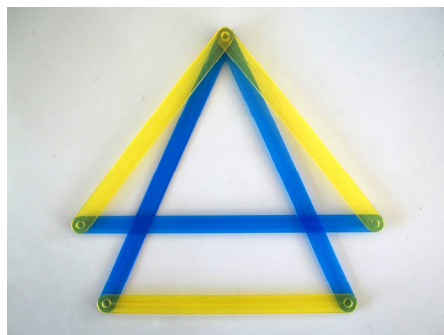


圖一

因為正多邊形每個內角皆相等，且對應邊成比例，故兩正三角形一定相似。

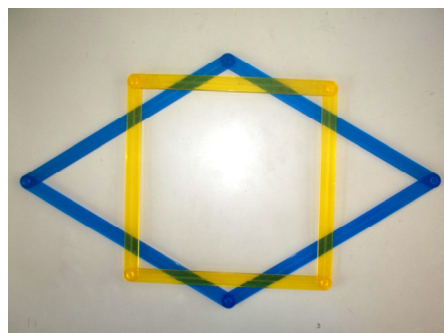
問題二：兩個等腰三角形是否相似？

如下圖，等腰三角形的對應邊不一定成比例，對應角不一定相等。



圖二

問題三：兩個對應邊成比例的四邊形是否相似？

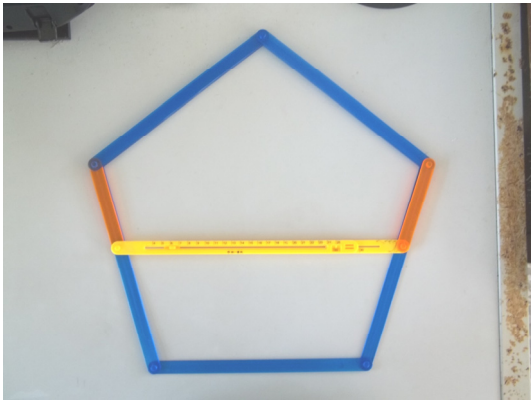


圖三

由於四邊形不具穩定性，所以角度可能會跑掉不固定，故兩個對應邊成比例的四邊形不一定相似（推論：兩個對應邊成比例的非正 n 邊形不一定相似）。

問題四：兩個對應角相等的五邊形是否相似？

如圖四，兩個對應角相等的五邊形重疊在一起時，發現對應邊有的相等，有的不相等，故兩個對應角相等的五邊形不一定相似（推論：兩個對應角相等的非正 n 邊形不一定相似）。以上筆者只列舉四個問題，其實類似的問題都可以藉由教具來幫助學習並協助釐清概念。

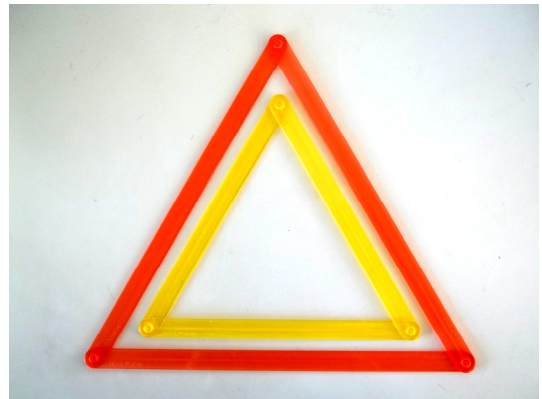


圖四

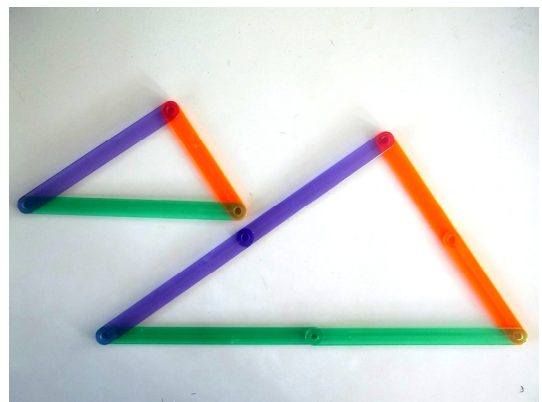
參、相似三角形 Discovery

在學生學習完相似三角形的基本定義後（相似三角形的要件為對應角相等、對應邊成比例），教師可帶領學生實做，利用市售的幾何扣條來組相似三角形，並比較各組誰能找到的相似三角形組合為最多種。雖說市售扣條只有六種長度，但若數量足夠的話，理論上可以找出許許多多種組合的相似三角形。因此教師可以請學生挑戰較高層次的問題，例如找出不同的等腰直角三角形，那麼這些等腰直角三角形是否都相似？並請學生說明相似的原因。

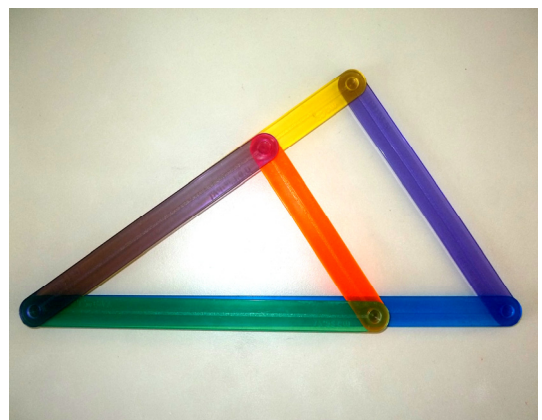
或者如圖七，向學生提問此兩組三角形是否相似？原因為何？



圖五



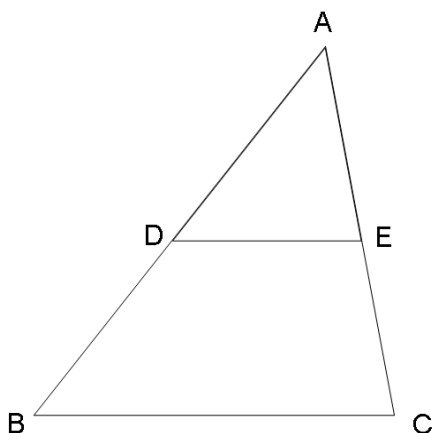
圖六



圖七

肆、常見的迷思概念

在相似三角形的邊長比例問題當中，筆者常見學生在如下的題目中發生類似的錯誤：題目：如圖八，假設 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1$ ，求 $\overline{DE} : \overline{BC}$ 之比？

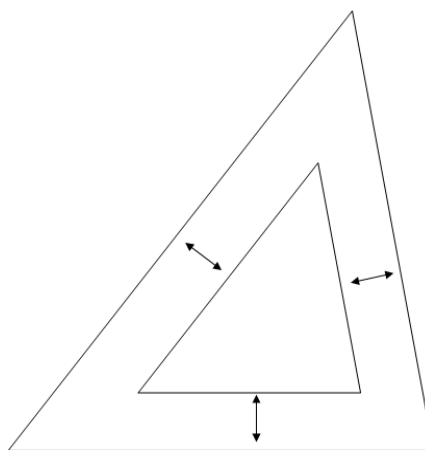


圖八

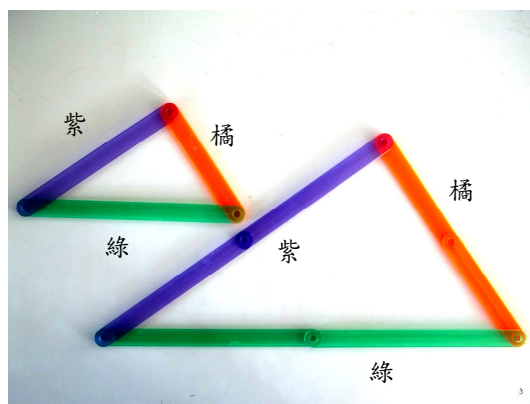
此題正確的答案應是 $1 : 2$ ，但是有不少的學生認為是 $1 : 1$ ，因為他們以為 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DB}$ ，事實上應是 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ 。雖然經過教師的指正或教導，有時犯此錯誤的學生仍然難以想像為何 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ ？學生會犯此錯誤有很多原因，有些是學生只會拿「看得到」的邊長來比，不會把「看不到」的邊長拿來比，或者學生也不知道自己寫的比例式是否正確等都有可能。

教師若在教導此單元時能配合具體的教具來輔助甚為適當。我們可以請學生將上題的圖形以兩個重疊的相似三角形來說明，並以扣條做出符合上述條件的相似三角形（如圖九的概念）。從圖十中得知兩三角形對應邊的比例關係為左邊的（紫：

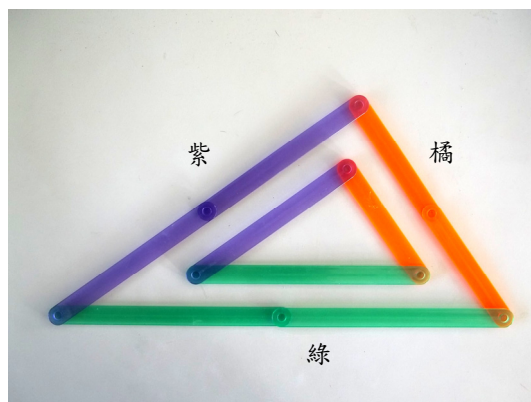
橘：綠）= 右邊的（紫：橘：綠）。也就是 $10\sqrt{2} : 10 : 10\sqrt{3} = 20\sqrt{2} : 20 : 20\sqrt{3}$ 。



圖九



圖十

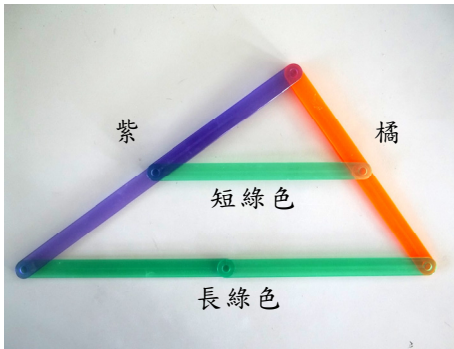


圖十一

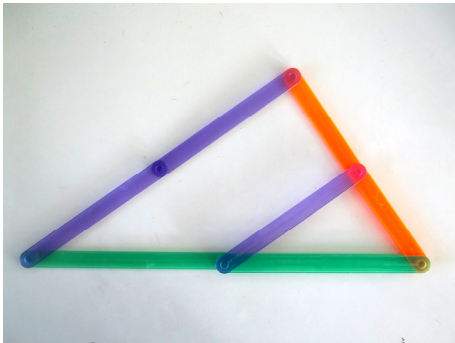
接著將小三角形的三個頂點分別與大三角形的三個頂點重合，就會分別發現三組平行線，並且向學生提問三組平行線的比例關係為何（相同顏色的扣條即為對應邊）。學生有了具體概念後，再發生同樣錯誤的機率就會降低。例如請學生回答圖十三中的短綠色：長綠色為何？（1：2）學生就比較能回答出正確答案來。



圖十二

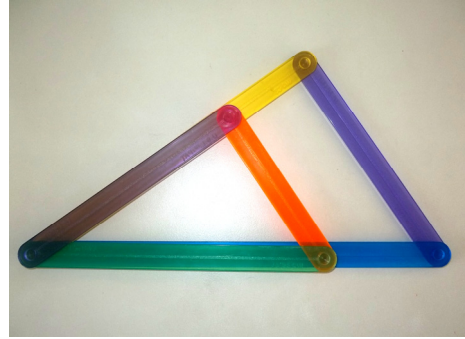


圖十三

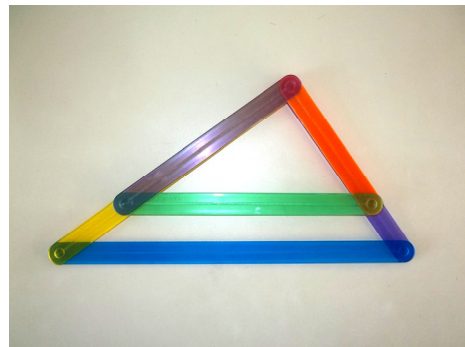


圖十四

其實任意兩組相似三角形皆可用同樣的方式來學習對應邊的比例關係，如圖十五～十七。



圖十五



圖十六

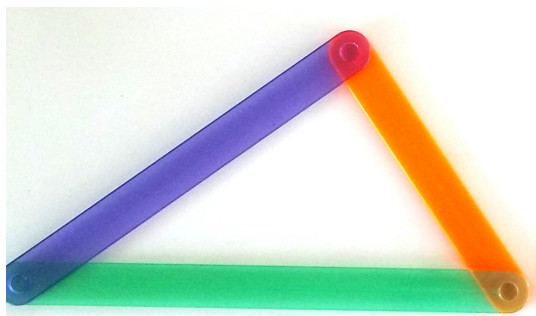


圖十七

伍、相似三角形的面積比

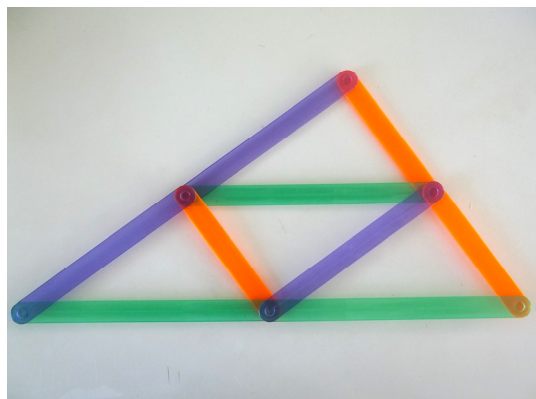
相似三角形的面積比通常也是學生較不懂的地方，通常教師不斷的說明相似形的面積比就是其邊長的平方比，但很多

學生還是不會。此時扣條再度發揮它很大的作用，我們從較簡單的例子來說，我們可以製作三個相似三角形其邊長比分別為 1 : 2 : 3，試問面積比為多少？

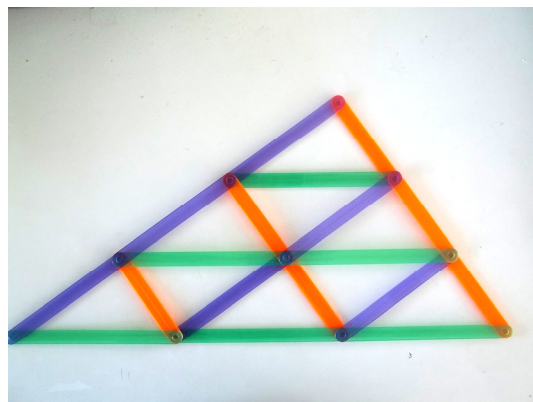


圖十八

如圖十九，以 4 個最小單位的三角形即可組成邊長為兩倍的、面積為四倍的相似三角形；同理，用 9 個單位就可以組成邊長為三倍、面積為九倍的相似三角形。依此類推，可以繼續追問學生，邊長 1 : 4 的相似三角形的面積比為多少？學生就可以輕易推論答案為 1 : 16！如此，相似多邊形的面積比為邊長的平方比的概念就容易瞭解了。



圖十九



圖廿

除此，課本的相關證明是以三角形的面積公式為出發點導出的，若從扣條的幾何來推理，可得到邊長為 n 倍的相似三角形可切割出 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 個單位三角形，亦可證明邊長比為 1 : n 的兩相似三角形的面積比為 1 : n^2 。

此時可以請學生複製多個最小的三角形，利用最小單元的三角形看看是否能拼成大一號、和更大的相似三角形。

陸、實物估測——橫倒法的改進

筆者每年在教完相似三角形單元後，一如往例會帶學生以 2-3 人分組的方式至操場進行校內三棟建築物的估測，採用的方式是橫倒法（詳見科學教育月刊第 328 期）。由於先前規定學生只能帶筆進行估測，所以當測量時筆的方向從直向到橫向便容易跑位而產生誤差，若用扣條組成直角三角形（或是請學生攜帶等腰直角三角形的尺）的話將會減去跑位的誤差，使得測量更準確、一次到位。

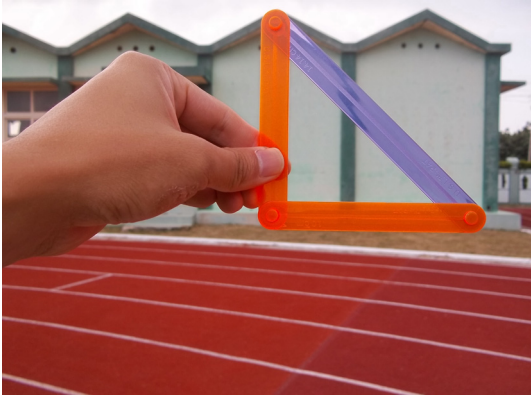


圖 廿一

參考資料

- 李祐宗(2010a)。國中數學相似三角形的應用--實地測量教學法。科學教育月刊，328，45-49。
- 李祐宗(2010b)。以三角形的基本結構搭配教具、軟體操作導入三角形的全等概念教學。科學教育月刊，331，25-34。
- 李祐宗(2011)。談幾何扣條在國中數學「平行」與「四邊形」單元的應用。科學教育月刊，344，49-55。
- 洪有情(2013)。康軒國中數學 3 上。新北市：康軒文教。

附錄

市售幾何扣條長度分析表

顏色	橘	紫	綠	黃	藍	紅
大扣條長度 (cm)	10	14.14	17.32	20	24.48	28.28
小扣條長度 (cm)	5	7.07	8.66	10	12.24	14.14
大扣條除以小扣條之比例	2	2	2	2	2	2
大扣條長度分析	10	$10 \times \sqrt{2}$	$10 \times \sqrt{3}$	10×2	$10 \times \sqrt{6}$	$20 \times \sqrt{2}$
各扣條長度的比	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
顏色代號	1	2	3	4	5	6