三角形三個最大值問題的迴響

李政豐 [1*] 朱啟台 [2] 陳昭地 [2]

[1] 國立竹南高級中學

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

在民國 103 年 2 月 26 日，陳昭地教授在國立台灣師範大學科學教育中心五樓演講廳，發表一個演講『從高等數學的觀點探究初等數學的一些問題』,會中以高等數學的觀點,探究了三個初等數學的問題:

(1) 三角形上或其內部一點到三角形三邊所在直線距離和的最小值。

(2) 給定一個銳角三角形，求三邊內接三角形的最短周長。

(3) 最大內角小於或等於 120 度的三角形上及其內部一點到三頂點的最小距離和。

對這三個問題，導出以 ΔABC 的三個對邊長 a,b,c 表出三個最小值的計算公式:

(1) 平面上任一點到三角形三邊所在直線的距離和之最小值，發生在頂點到最大邊上的高，不妨設 $a \le b \le c$，則它的最小值計算公式：

$$\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c},$$

其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2},(a \le b \le c)$ 。

(2) 銳角三角形 ΔABC，其三邊內接三角形的最短周長，發生在 ΔABC 的垂足三角形，此內接三角形的最短周長公式：

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$$

這個公式對於銳角三角形才會成立。

(3) P 是最大內角不超過 120 度的 ΔABC 邊上或其內部一點，當 P 到三頂點有最小距離和的時候，P 稱為等角點或費馬點，其最小距離和公式：

$\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$，其中

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$， $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。

這個公式對最大內角不超過 120 度的三角形均成立。

當時也在演講資料中，提出了以上三個最大值的問題。本文的重點，在討論下面三角形三個最大值問題的解答：

(一) 三角形邊上或內部一點 P 到三邊所在直線的距離和有最大值時，P 點發生在最短邊對應的頂點，最大值為最短邊上高的長度。

(二) 給定一個三角形，三邊內接三角形的最大周長發生在本身周長(a+b+c)。

*為本文通訊作者

(三) 三角形邊上或內部一點 P 到三頂點的最大距離和，發生在較長兩邊的交點，其值為較長兩邊長之和。

其中(一)的解法與(1)類似，用面積證法，(二)比較容易只用到三角不等式，(三)的証明相當精巧與高難度，值得稱為一個有用的定理。

貳、本文

一、三角形邊上或內部一點 P 到三邊所在直線的距離和有最大值時，P 點發生在最短邊對應的頂點，最大值為最短邊上高的長度。

ΔABC 中, $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}=a$, $\angle B$ 的對邊 $\overline{AC}=b$, $\angle C$ 的對邊 $\overline{AB}=c$ 。

若 $\overline{BC}=a$ 是最小的邊， $\overline{AH}$ 是最小邊上的高，P 是 ΔABC 的內部或邊界上的任一點。假設 $\overline{AB}\ge\overline{AC}\ge\overline{BC}$ ，亦即 $c\ge b\ge a$ ，則三角形的形狀可分三種：銳角三角形如圖 1-1、直角三角形如圖 1-2、鈍角三角形如圖 1-3。

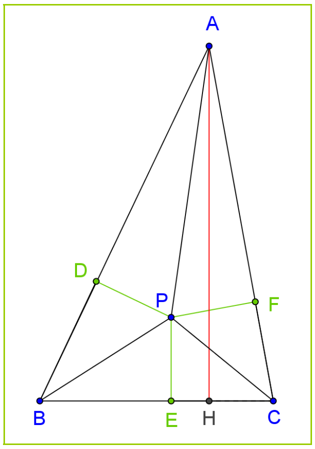

圖 1-1

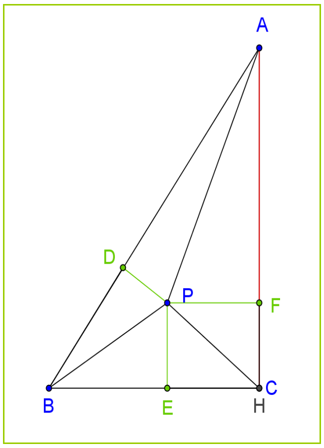

圖 1-2

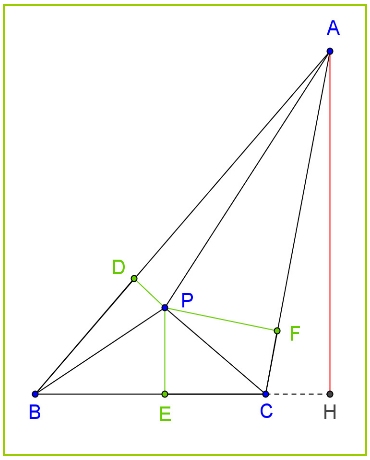

圖 1-3

當 P 是 ΔABC 的內部或邊界上的一點，如上圖。

ΔPAB 的面積+ ΔPBC 的面積+ ΔPAC 的面積= ΔABC 的面積

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}\ 。$$

但是，因為 $\overline{BC}$ 是最小的邊，所以

$$\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}$$

$$\ge\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PF}$$

得

$$\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH} \ge \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PF}$$

兩邊除掉 $\frac{1}{2}\overline{BC}$，得到 $\overline{AH} \ge (\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})$

，由 Δ 面積的海龍公式：

$$(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}) \le \overline{AH} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，$a \le b \le c$ 。

等號成立之充要條件為 P 取在 A 點，最大值為 $\overline{AH}$ 。

亦即：三角形邊上或內部一點，到三角形三邊所在直線的距離和有最大值時，其 P 點發生在最短邊所對的頂點，最大值為最短邊上高的長度。

於是根據以上性質，合併最小值的定理，我們也可以得到如下大家都熟悉的推論：

推論 1　正三角形邊上及其內部的任一點到三邊的距離和為常數，即為任一個高。

二、三角形三邊內接三角形的最大周長為原三角形的周長(a+b+c)

如圖 2，ΔDEF 是 ΔABC 的內接三角形，由三角不等式：

$$\overline{DC}+\overline{CE} \ge \overline{DE}\text{ ，}\overline{EA}+\overline{AF} \ge \overline{EF}\text{ ，}$$

$$\overline{FB}+\overline{BD} \ge \overline{FD}\text{ 則}$$

$$\overline{DC}+\overline{CE}+\overline{EA}+\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{BD} \ge \overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}$$

$$\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=(a+b+c) \ge \overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}$$

等號成立之充要條件為：D,E,F 恰是 A,B,C

亦即 ΔABC 的內接 ΔDEF 的周長最大值為原 ΔABC 的周長(a+b+c)

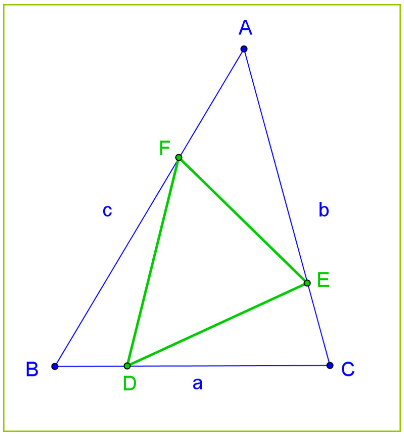

圖 2

三、三角形邊上或內部一點到三頂點的最大距離和為較大兩邊之和

如圖 3-1，假設 $\overline{AB} \ge \overline{AC} \ge \overline{BC}$ ，亦即 $c \ge b \ge a$，P 是 ΔABC 的內部或邊界上的任一點。首先我們用 geogebra 當工具，先做 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 的動態模擬，確定猜測無誤，然後才開始設想要如何證明它，這裡我們用到很巧妙的方法做長度轉換：然後做成以下的處理步驟。

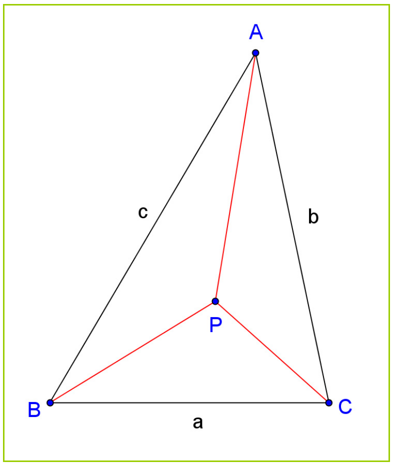

圖 3-1

步驟 1：當 P 在 ΔABC 的邊上，設 $a \le b \le c$，

如圖 3-2-1， $P \in \overline{AB}$，

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=c+\overline{PC} \le c+b$

如圖 3-2-2， $P \in \overline{BC}$，

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=a+\overline{PA} \le c+a \le c+b$

如圖 3-2-3， $P \in \overline{AC}$，

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=b+\overline{PB} \le c+b$

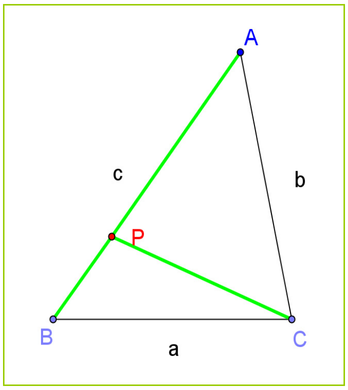

圖 3-2-1

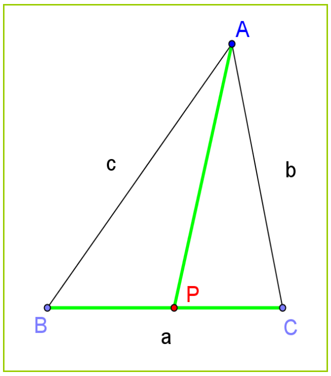

圖 3-2-2

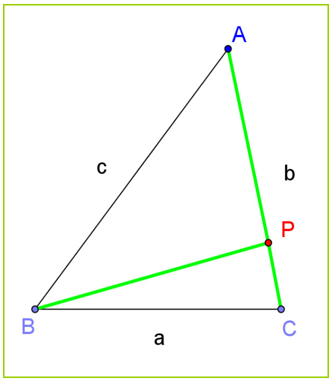

圖 3-2-3

步驟 2：當 P 在 ΔABC 的內部；如圖 3-3，做一個以 B、C 為焦點且通過 P 點的橢圓，交 $\overline{AB}$ 於 K，交 $\overline{AC}$ 於 M，KPM 弧是橢圓的一部分且是凹口向下的曲線，且 P 在 ΔAKM 的內部，由橢圓的性質：同個橢圓上任一點到兩焦點的距離和都相等，$\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{KB}+\overline{KC}$。

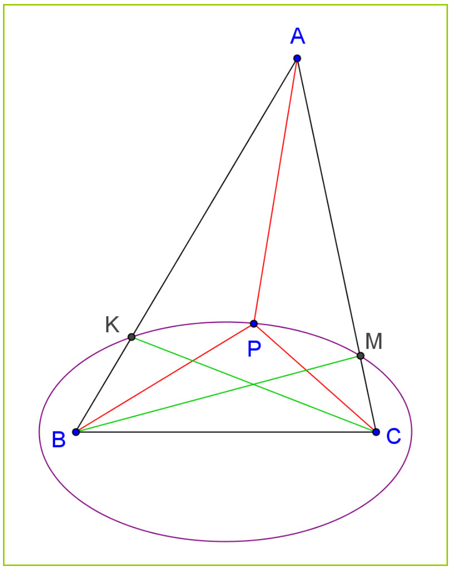

圖 3-3

步驟 3：如圖 3-4，

$\angle APK + \angle APM + \angle KPM = 360^\circ$，

因 $\angle KPM < 180^\circ$，則

$\angle APK + \angle APM > 180^\circ$。因此 $\angle APK$ 與 $\angle APM$ 當中，至少有一個是鈍角(也可能兩個都是鈍角)。否則，若兩個都是銳角；則

$\angle APK + \angle APM < 180^\circ$ 會與

$\angle KPM < 180^\circ$ 產生矛盾。

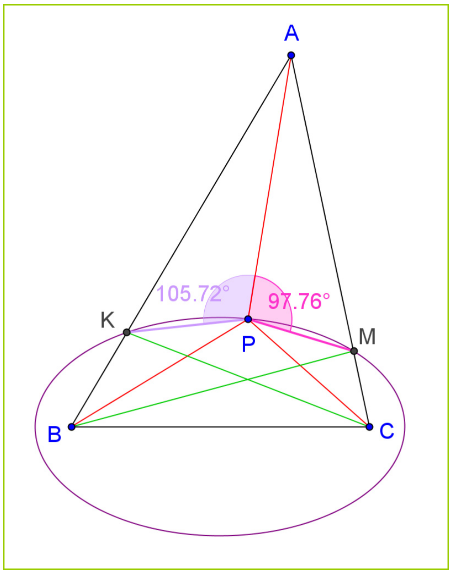

圖 3-4

(1) 若 $\angle APK$ 是鈍角，$\overline{KA} \geq \overline{PA}$，由橢圓的性質 $\overline{KB}+\overline{KC}=\overline{PB}+\overline{PC}$，

得 $\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，

即 $\overline{AB}+\overline{KC} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

ΔAKC 中 $\overline{AC} \geq \overline{BC}$，$\angle AKC > \angle B \geq \angle A$，

故 $\overline{AC} \geq \overline{KC}$，得到

$\overline{AB}+\overline{AC} \geq \overline{AB}+\overline{KC} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

(2) 若 $\angle APM$ 是鈍角，$\overline{MA} \geq \overline{PA}$，由橢圓的性質 $\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{PB}+\overline{PC}$，

得 $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，

即 $\overline{AC}+\overline{MB} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

ΔAMB 中 $\angle AMB > \angle C \geq \angle A$，

故 $\overline{AB} \geq \overline{MB}$，得到

$\overline{AB}+\overline{AC} \geq \overline{AC}+\overline{MB} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

綜合步驟 1,2,3 知 $\overline{AB}+\overline{AC} \geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 成立。

當等號成立時，P 在 A 點上，此時 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 有最大值 $\overline{AB}+\overline{AC}$，且 $P=A=M=K$。

於是我們可以得到以下的定理：

定理 1 ΔABC，假設 $\overline{AB} \geq \overline{AC} \geq \overline{BC}$，亦即 $c \geq b \geq a$，P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上的任一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \leq (c+b)$，當等號成立時，$P$ 在 A 點上。

為了完整的討論各類三角形邊上或內部一點到三頂點距離和的最小值，我們還需要進一步說明：

1. 最大內角大於或等於 120 度的鈍角三角形邊上或內部一點到三頂點距離和的最小值為較短兩邊長之和。

   解說：如圖 4：

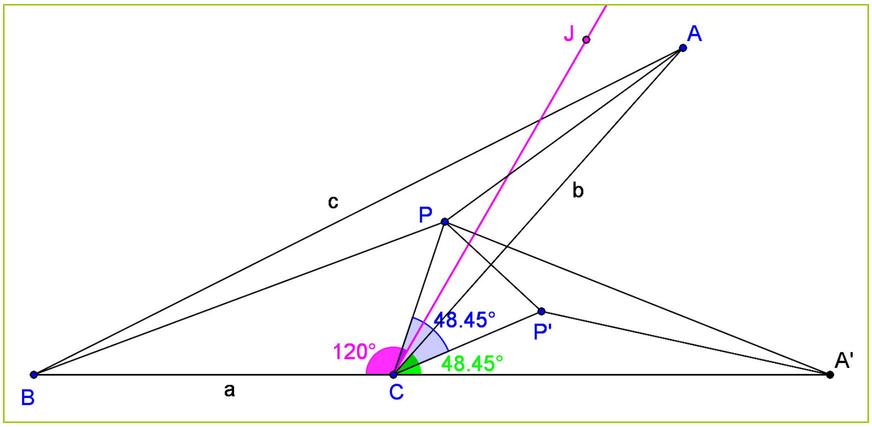

圖 4

假設 $\overline{AB} \geq \overline{AC} \geq \overline{BC}$，即 $c \geq b \geq a$，P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上的任一點，當 $\angle ACB$ 大於或等於 120 度時，將 $\overline{BC}$ 向右延長到 A'，使 $\overline{CA'} = \overline{CA}$，由 $\angle ACB + \angle ACA' = 180^\circ$，令 $\angle ACA' = m^\circ$，知 $m^\circ \leq 60^\circ$，以 C 為中心，將 P 右旋 m° 到 P'，由 S.A.S 全等，$\Delta APC \cong \Delta A'P'C$，$\Delta PCP'$ 是頂角 m° 的等腰三角形，當 $\angle ACB \geq 120^\circ$ 時，頂角 $m^\circ \leq 60^\circ$，故底角 $\angle CPP' = \angle CP'P \geq 60^\circ$，知 $\overline{PC} \geq \overline{PP'}$。$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{P'A'} + \overline{PB} + \overline{PP'} \geq \overline{PA'} + \overline{PB} \geq \overline{CB} + \overline{CA'} = \overline{CB} + \overline{CA} = a+b$ 成立。

亦即：最大內角大於或等於 120 度的三角形的邊上或內部一點到三頂點距離和的最小值為較短兩邊長之和。於是我們可以得到以下的定理：

定理 2 ΔABC，假設 $\overline{AB} \geq \overline{AC} \geq \overline{BC}$，亦即 $c \geq b \geq a$，$\angle C \geq 120^\circ$，P 是 ΔABC 的內部或邊界上的一點，則 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq (a+b)$，當等號成立時，$P$ 在 C 點上。

2. 當最大內角 $\angle ACB$ 不超過 120 度，如圖 5，假設 $\overline{AB} \geq \overline{AC} \geq \overline{BC}$，亦即 $c \geq b \geq a$，P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上的任一點，F 是三角形 ΔABC 的邊上或內部的費馬點(等角點)。則 $\overline{EC} = \overline{BD} = \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$。(請參考文獻:三角形三個極小值問題的探討)。由海龍公式 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$。根據餘弦定理，$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(60^\circ + C)$，由和角公式：

$$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)$$
$$= a^2 + b^2 - ab \cdot \cos C + \sqrt{3}ab \cdot \sin C ....(1)$$

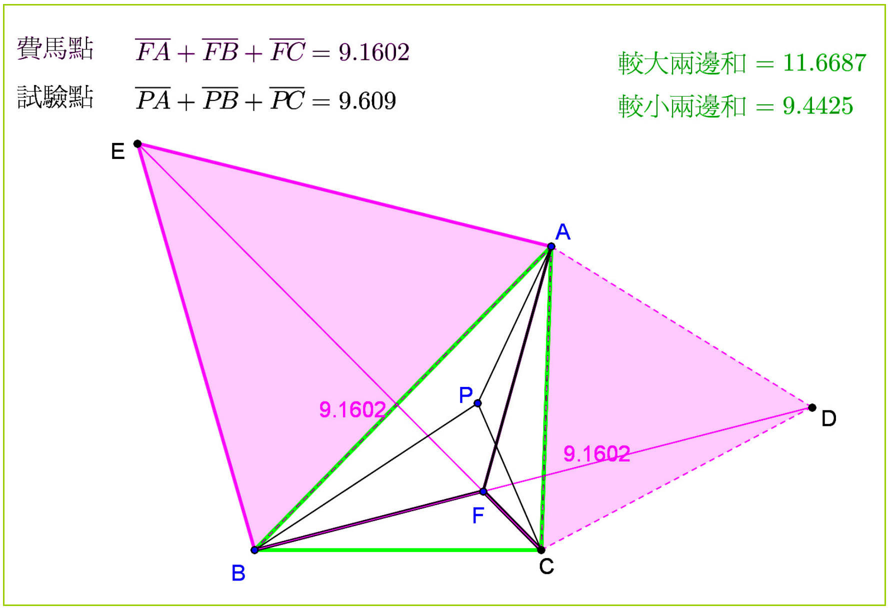

圖 5

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，面積公式 $\Delta=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin C \Rightarrow \sin C=\dfrac{2\Delta}{ab}$，將 $\sin C$, $\cos C$ 代入(1)式

$\overline{BD}^2=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta$，最短距離和為 $\overline{BD}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta}$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left[2(a^2+b^2+c^2)+8\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$$

當 ΔABC 三邊長固定為 a,b,c，$a\le b\le c$，且最大內角 $\angle ACB$ 不超過 120 度時，我們稱 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$ 為 ΔABC 相應的費馬數。

在 ΔBCD 中 $\overline{BD}\le\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{CA}=a+b$。此時；

$\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}\le a+b$。

或由餘弦定理：

$\overline{BD}^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(60^\circ+C)\le a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$，亦即 $\overline{BD}\le a+b$ 成立，僅當 $\angle C=120^\circ$ 時，$\overline{BD}=a+b$。

綜合上面的說明，於是我們可得到下面的推論：

推論 2　ΔABC 中，$\overline{AB}\ge\overline{AC}\ge\overline{BC}$，亦即 $c\ge b\ge a$，當最大內角 $\angle ACB$ 不超過 120 度，P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上的任一點，則有以下的不等式 $c+b\ge\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\ge\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$，而且費馬數

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}\le a+b$$

3. 當 $\angle C\ge 120^\circ$ 時，如圖 5-1。

根據餘弦定理：

$$\overline{BD}^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(360^\circ-(60^\circ+C))$$

$$=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(60^\circ+C)$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta$$

（請參考(1)式的說明）

但是

$$\overline{BD}^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(360^\circ-(60^\circ+C))$$

$$\le a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

故

$$\overline{BD}^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta\le(a+b)^2$$

亦即 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}\le(a+b)$。

或由三角不等式 $\overline{BD}\le\overline{BC}+\overline{CD}$，亦即 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}\le(a+b)$

綜合上面的說明，於是我們可得到下面的推論：

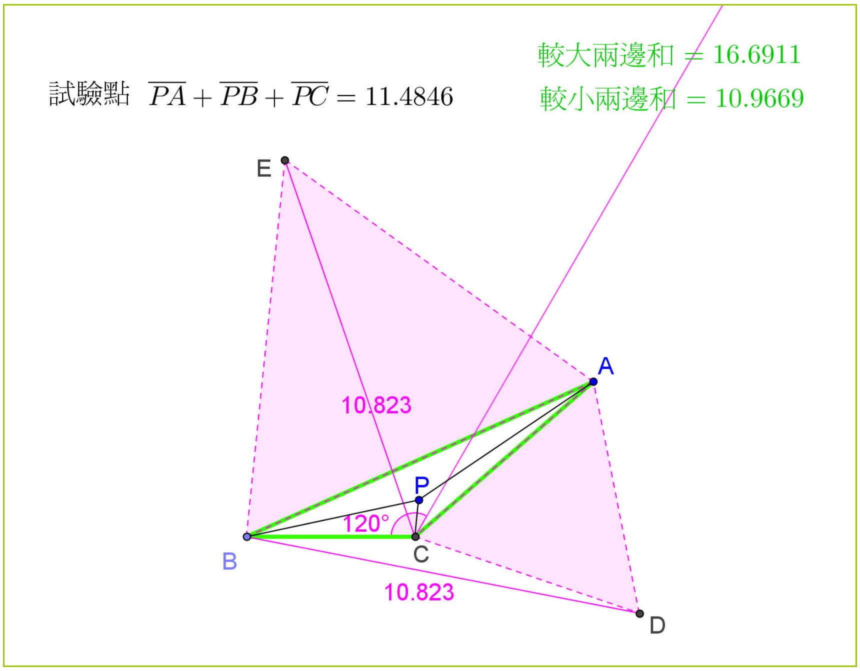

圖 5

推論 3 ΔABC，$\overline{AB}\ge\overline{AC}\ge\overline{BC}$，亦即 $c\ge b\ge a$，當最大內角 $\angle ACB\ge 120$ 度時，P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上的任一點，則有以下的不等式 $c+b\ge\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\ge a+b$，而且

$$a+b\ge\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$$

4. 對於直角或鈍角三角形邊上的內接三角形的周長，其最大值仍是原直角或鈍角三角形的周長，最小值是最大邊上高的兩倍。

證明如下：如圖 6，$\overline{AB}\ge\overline{AC}\ge\overline{BC}$，亦即 $c\ge b\ge a$，$\angle C\ge 90^\circ$，D 是 $\overline{BC}$ 上一點，D 關於 $\overleftrightarrow{AC}$ 的對稱點為 D'，D 關於 $\overleftrightarrow{AB}$ 的對稱點為 D''，連接線段 $\overline{D'D''}$，則 $\overline{D'D''}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 各交於一點，設 ΔDEF 是 ΔABC 邊上的內接三角形。

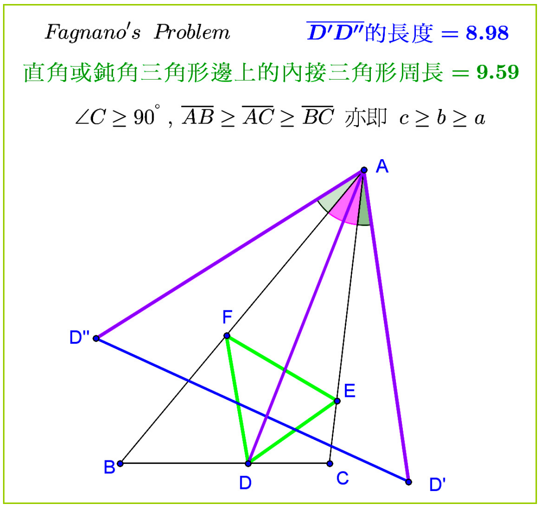

圖 6

如圖七所示，將 E 點移到 $\overline{D'D''}$ 與 $\overline{AC}$ 的交點，將 F 點移到 $\overline{D'D''}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點，則 $\overline{DE}=\overline{D'E}$ ， $\overline{DF}=\overline{D''F}$ 。此時，$\overline{D'D''}$ 即等於 ΔDEF 的周長。$\Delta AD'D''$ 是頂角固定是 $2\angle BAC$ 的等腰三角形，當腰長 $\overline{AD''}=\overline{AD'}=\overline{AD}$ 愈短，則底邊 $\overline{D'D''}$ 就愈短。

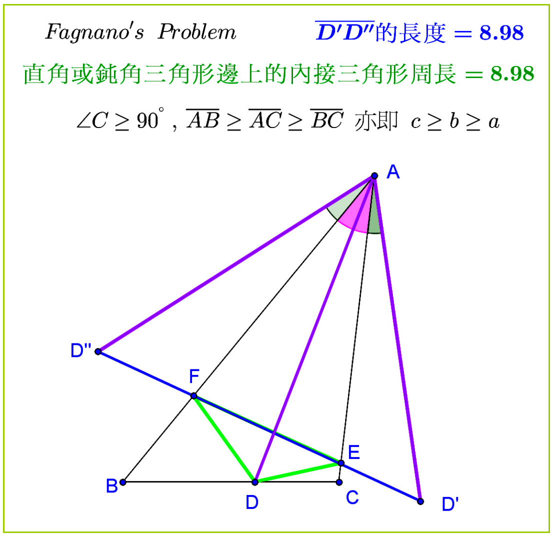

圖 7

如圖 8，D 在鈍角 ΔABC 的底邊 $\overline{BC}$ 上移動，當 $D=C$ 時，$\overline{AD}$ 最短，此時 D、D' 、 C 三點重合。

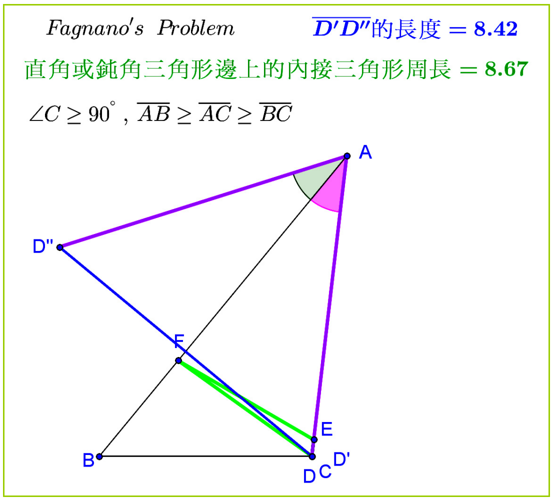

圖 8

如圖 9，再把 E 點移動到 C，變成四點重合，也將 F 點移到 $\overline{D'D''}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點。此時，$\overline{D'D''}$ 最短，亦即 ΔDEF 的周長最短，此時 ΔDEF 退化成線段 $\overline{FC}$ 的兩倍。

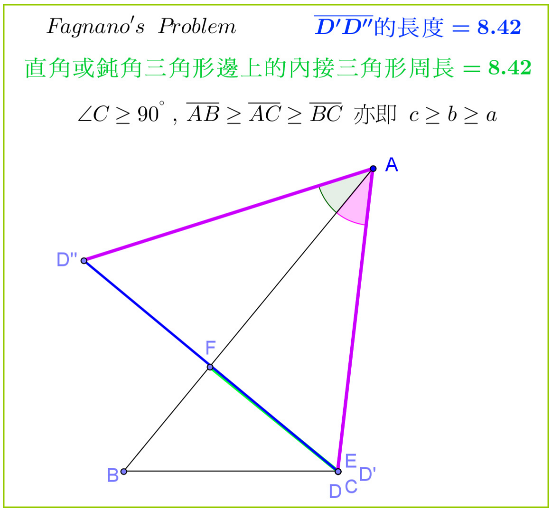

圖 9

於是我們可得到下面的推論：

推論 4：直角或鈍角三角形邊上內接三角形周長的最大值是原三角形的周長，最小值是最大邊上高的兩倍，此時 ΔDEF 退化成線段 $\overline{FC}$ 的兩倍。

當 $a=\overline{BC}$ 、 $b=\overline{AC}$ 、 $c=\overline{AB}$ ，$\angle C \geq 90^\circ$，則不妨設 $a \leq b \leq c$ ，則它的最小值計算公式為 $\dfrac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$ ，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。

如圖 10，若 ΔPQR 是銳角 ΔABC 邊上的內接三角形，將 P 移到 $\overline{BC}$ 上高 h_a

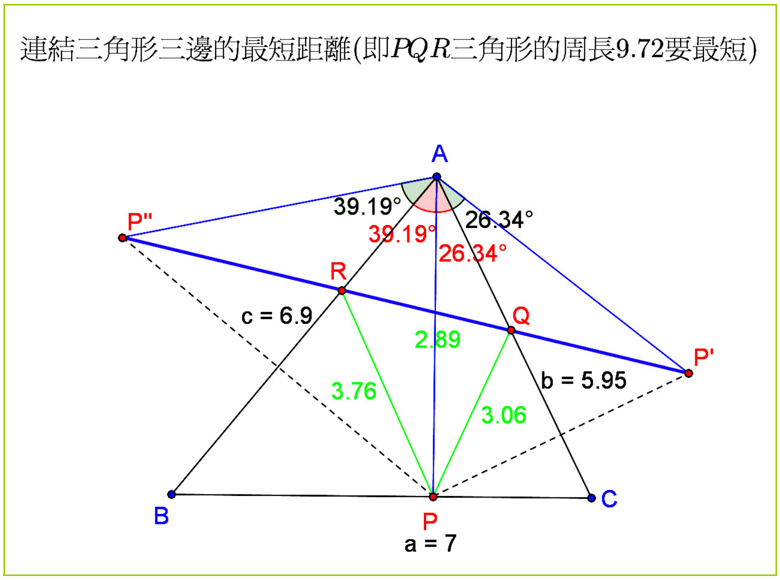

圖 10

的垂足，Q 移到 $\overline{AC}$ 上高 h_b 的垂足，R 移到 $\overline{AB}$ 上高 h_c 的垂足；

此時內接三角形的最短周長 $= \overline{P'P''} = 2\overline{AP''}\cdot sin\,\mathrm{A} = 2\overline{AP}\cdot sin\,\mathrm{A} = 2h_a\cdot sin\,\mathrm{A}$。

同理可得內接三角形的最短周長 $= 2h_b\cdot sin\,\mathrm{B} = 2h_c\cdot sin\,\mathrm{C}$

於是我們可得到下面的推論：

推論 5：銳角 ΔABC，$\overline{BC}$ 上高為 h_a，$\overline{AC}$ 上高為 h_b，$\overline{AB}$ 上高為 h_c，則有以下結果：

$h_a\cdot sin\,A = h_b\cdot sin\,B = h_c\cdot sin\,C$。

令 ΔABC 面積為 Δ，$\Delta = \dfrac{1}{2}a\cdot h_a$、$\Delta = \dfrac{1}{2}bc\cdot sin\,A \Rightarrow h_a = \dfrac{2\Delta}{a}$、$sin\,A = \dfrac{2\Delta}{bc}$

代入上式，可得更一般性的結果：

對任意 ΔABC，$h_a\cdot sin\,A = h_b\cdot sin\,B = h_c\cdot sin\,C = \dfrac{4\Delta^2}{abc}$。

參、結語

經由嚴密精巧的解題技術，也借助 Geogebra 的繪圖及運算能力，我們得以證明費馬點(等角點)的相關性質，也解開學生對於費馬數的疑惑。一個看似簡單的問題：三角形三個最大值、三個最小值的問題，這是一個很通俗也很有趣的教材，從國小、國中到高中，相信有很多的學生與老師都曾經想過，然而我們卻沒想到要做完整證明有這麼高的技巧。也很欣慰，我們能將它詳細的證明與圖示，只要學過初等數學的基礎就即可完成，這是一個很有意義的科普數學學習教材。

參考文獻

陳昭地(2014)。從高等數學的觀點探究初等數學的一些問題。台北市：國立台灣師範大學數學系、國立台灣師範大學科學教育中心。(2014.02.26 演講手冊)

李政豐、傅淑婷、陳昭地(2014)。三角形三個極小值問題的探討，科學教育月刊待刊中。台北市：國立台灣師範大學理學院科學教育中心發行。
黃武雄,高中數學實驗教材編輯小組(1984)。第五章：用各種方法處理平面幾何。 (pp.288-295)，高中數學實驗教材第三冊自然組修訂本。台北市：數理出版公司。
傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形。國民中學數學教材原型 C 冊第 2-3 單元主題。新北市：國家教育研究院。
傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。三角形的三心。國民中學數學教材原型 C 冊第 1-5 單元主題(陳昭地主編)。新北市：國家教育研究院。
A.S.Posamentier & J. Stepelman(1986). Unit 43 ： The Equiangular point(pp.284-285) In Posamentier S.A. & Stepelman J. (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics(2nd Ed.)，Columbus OH，Merrill.
A.S.Posamentier & J. Stepelman(1986). Unit 44：The minimun Distance Point of a Triangle (pp.285-286) In Posamentier S.A. & Stepelman J. (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics(2nd Ed.), Columbus OH，Merrill.