正 n 角星的繪圖與光芒角之探討

梁惠珍[1*] 柳賢[2]

[1]屏東縣立同安國民小學
[2]國立高雄師範大學

壹、前言

布置聖誕樹的時候，總會看到許多星星的裝飾品(如圖 1)，如果將星星裝飾品轉換成數學模型，可以是「☆」，也可以是「⛤」。其中，「☆」是由 10 條一樣長的線段所形成的封閉區域，是一個凹十邊形；「⛤」是由 5 條一樣長的線段和 5 個等角的光芒角所形成的圖形，稱為正五角星或是五芒星(任景業, 2005)。國中的數學課程經常利用正五角星(如圖 2)和正六角星(如圖 3)的圖形，來進行有關三角形內角和定理、外角和定理的練習(楊惠后, 2009)。筆者發現，透過 AMA(Activate your Mind Attention)外掛程式的增益集功能(陳明璋, 2013)，可以輕易地在 Powerpoint 簡報軟體上，畫出正 n 角星，而且正 n 角星的繪圖還存在著有趣的規律性。

圖 1 星星裝飾品

此外，利用圓周角的概念可以快速地找出正 n 角星光芒角(如圖 2、3)的角度，而且正 n 角星光芒角的角度也存在有趣的數學公式。

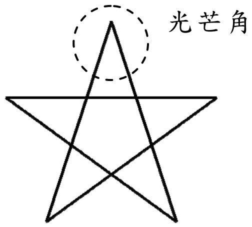

圖 2 正五角星

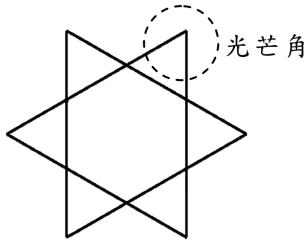

圖 3 正六角星

貳、正 n 角星的繪圖

這裡所談論的正 n 角星是指在 n(>5)個等分點的圓內，連接兩個不毗鄰頂點的線段，使其具有 n 條一樣長的線段和 n 個等角的光芒角所形成的星狀圖形。以圖 4 為例，就是在 7 個等分點的圓內，連接兩

*為本文通訊作者

個不毗鄰頂點的線段，使其具有 7 條一樣長的線段和 7 個等角的光芒角所形成的正七角星；而圖 5 因為是連接兩個毗鄰頂點的線段，所以並不是正七角星，而是正七邊形。

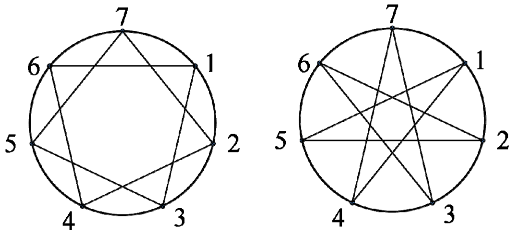

圖 4 正七角星

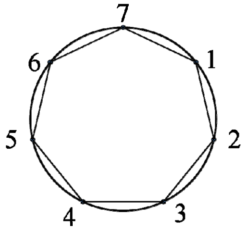

圖 5 正七邊形

關於如何利用 AMA 在 Powerpoint 上繪製正 n 角星的步驟如下：

1. 在 Powerpoint 上畫一個圓，執行 AMA 功能：「Show→Devisions(等分點)」，圓上會出現 n 個等分點。將圓上的等分點依照順時針方向，分別標示 1、2、3…..n。
2. 以標示點 n 為起點，並令圓上兩點之間的等分弧數目為 a，依照不同的 a，依序選取圓上各點。然後執行 AMA 功能：「Structure→Connect(連線)→單一連線→以折線連接(或以線段連接)→封閉區間」，即可畫出正 n 角星。
3. 如果步驟 2 不能一筆畫出正 n 角星，則再依序以標示點 1 為起點、標示點 2 為起點….，重複步驟 2 的方法，就能畫出正 n 角星。
4. 以 n=5、a=2 為例，按照(5→2→4→1→3)的順序將點連接起來，然後執行步驟 2，就能繪出正五角星(如圖 6)

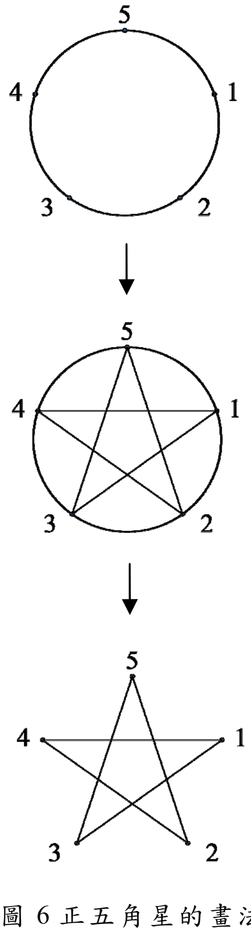

圖 6 正五角星的畫法

5. 以 n=9、a=3 為例，按照(9→3→6)、(1→4→7)、(2→5→8)的順序將點連接起來，依序執行步驟 2 和 3，就能繪出正九角星(如圖 7)。

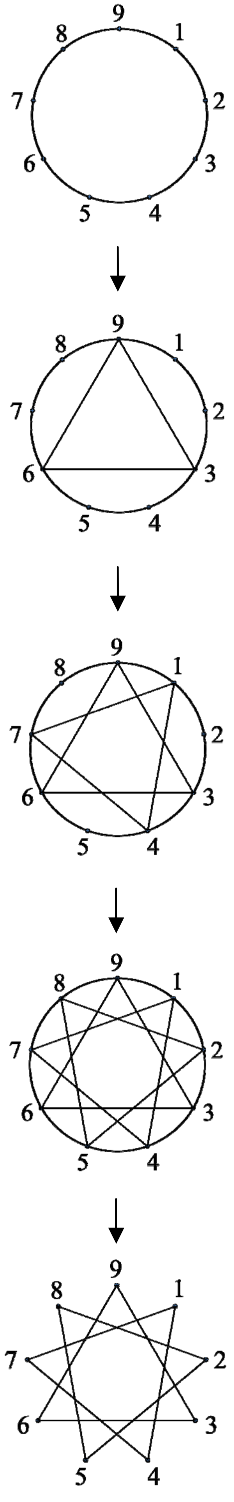

圖 7 正九角星的畫法

參、正 n 角星的繪圖結果與規律探討

整理正 n 角星的繪圖結果如表 1。

由於正 n 角星的繪圖是先將一個圓 n 等分，並產生 n 個等分點之後再連接 n 條一樣長的線段所形成的星狀圖形。因此，正 n 角星是具有 n 條對稱軸的線對稱圖形(任景業, 2005; 楊惠后, 2009)。所以，必存在一條對稱軸使得(a,n−a)兩點互相對應，所以 a 個等分弧間隔和(n−a)個等分弧間隔所畫出的正 n 角星是一樣的(孫文先, 2003)。因此，正 n 角星的成星情況只需在 $a<\frac{n}{2}$ 的條件下探討即可。此外，從表 1 的繪圖結果可發現，將圓上 n 個等分點，按 a 個等分弧間隔依序連接 n 條一樣長的線段所形成的圖形中，有的無法成星，有的可以成星。其中，當 a =1、a = n−1、a=n 及 a = n÷2 時，無法畫出正 n 角星，反之則能畫出正 n 角星。而且，正 n 角星的成星情況與 n 和 a 的最大公因數 d 有關，共有三種類型，分別是「一筆畫」成星、「正 m 邊形」成星和「一筆畫正 m 角星」成星。以下針對 n>5，$1<a<\frac{n}{2}$ 的條件下，說明正 n 角星的成星類型。

表 1　正 n 角星的繪圖結果

繪圖結果	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=12	n=15	n=18
a=1	正五邊形	正六邊形	正七邊形	正八邊形	正九邊形	正十邊形	正十二邊形	正十五邊形	正十八邊形
a=2	一筆畫成星	2 個△成星	一筆畫成星	2 個□成星	一筆畫成星	2 個⬠成星	2 個⬡成星	一筆畫成星	2 個◯成星
a=3	一筆畫成星	無法成形	一筆畫成星	一筆畫成星	3 個△成星	一筆畫成星	3 個□成星	3 個⬠成星	3 個⬡成星
a=4	正五邊形	2 個△成星	一筆畫成星	無法成形	一筆畫成星	2 個☆成星	4 個△成星	一筆畫成星	2 個✵成星
a=5	×	正六邊形	一筆畫成星	一筆畫成星	一筆畫成星	無法成形	一筆畫成星	5 個△成星	一筆畫成星
a=6	×	×	正七邊形	2 個□成星	3 個△成星	2 個☆成星	無法成形	3 個☆成星	6 個△成星
a=7	×	×	×	正八邊形	一筆畫成星	一筆畫成星	一筆畫成星	一筆畫成星	一筆畫成星
a=8	×	×	×	×	正九邊形	2 個⬠成星	4 個△成星	一筆畫成星	2 個✳成星
a=9	×	×	×	×	×	正十邊形	3 個□成星	3 個☆成星	無法成形

註：兩點相隔 a 個等分弧和(n–a)個等分弧所畫出的正 n 角星是一樣的，故以粗線隔開。

一、「一筆畫」成星

當 n 和 a 互質時，能一筆畫出正 n 角星[註1]，如(n,a)為(5,2)時，5 和 2 互質，最大公因數為 1，能一筆畫出正五角星；(n,a)為(7,2)時，7 和 2 互質，最大公因數為 1，能一筆畫出正七角星；(n,a)為(7,3)時，7 和 3 互質，最大公因數為 1，能一筆畫出正七角星；(n,a)為(9,2)時，9 和 2 互質，最大公因數為 1，能一筆畫出正九角星；(n,a)為(9,4)時，9 和 4 互質，最大公因數為 1，能一筆畫出正九角星。

二、「正 m 邊形」成星

當 n 和 a 不互質且最大公因數等於 a 時[註2]，是以 a 個正 m 邊形(m=n÷a)畫出正 n 角星，如(n,a)為(9,3)時，最大公因數為 3，能以 3 個正三角形(3=9÷3)畫出正九角星；(n,a)為(10,2)時，最大公因數為 2，能以 2 個正五邊形(5=10÷2)畫出正十角星；(n,a)為(18,3)時，最大公因數為 3，能以 3 個正六邊形(6=18÷3)畫出正十八角星 。

三、「一筆畫正 m 角星」成星

當 n 和 a 不互質且最大公因數 d≠a 時[註3]，能以 d 個一筆畫正 m 角星(m=n÷d) 畫出正 n 角星，如(n,a)為(10,4)時，最大公因數為 2(≠4)，且(10,4)的等價集為(5,2)，所以是以 2 個一筆畫正五角星(5=10÷2)來畫出正十角星；(n,a)為(15,6)時，最大公因數為 3(≠6)，且(15,6)的等價集為(5,2)，所以是以 3 個一筆畫正五角星(5=15÷3)來畫出正十五角星；(n,a)為(18,4)時，最大公因數為 2(≠4)，且(18,4) 的等價集為(9,2)，所以是以 2 個一筆畫正九角星(9=18÷2)來畫出正十八角星；(n,a)為(18,8)時，最大公因數為 2(≠8)，且(18,8) 的等價集為(9,4)，所以是以 2 個一筆畫正九角星(9=18÷2)來畫出正十八角星。

從上述的分析與說明中，可以發現正 n 角星的成星結果可能不只一種，如正七角星有和兩種成星方法；正九角星有、和三種成星方法；正十角星有、和三種成星方法。然而，正 n 角星的畫法到底有幾種呢？我們可以從正 n 角星的線對稱性質和 a 的條件來進一步了解。因為當 n 是奇數時，在 a =1、a = n−1 和 a=n 等 3 種情況下無法成星，再加上正 n 角星的線對稱性質，所以畫出正 n 角星的方法只有$\frac{(n-3)}{2}$種，以正七角星來說，在 a =1、a =6 和 a=7 等 3 種情況下無法成星，再加上正七角星的線對稱性質，所以正七角星會有 2 種畫法($\frac{(7-3)}{2}$)。而當 n 是偶數時，在 a=1、a= n−1、a=n 及 a=n÷2 等 4 種情況下無法成星，再加上正 n 角星的線對稱性質，所以畫出正 n 角星的方法有$\frac{(n-4)}{2}$種，以正十角星來說，在 a =1、a =5、a =9 和 a=10 等 4 種情況下無法成星，再加上正十角星的線對稱性質，所以正十角星會有 3 種畫法($\frac{(10-4)}{2}$)。

肆、正 n 角星的光芒角規律探討

正 n 角星的光芒角角度就是一個圓周角(如圖 8)，當圓被分成 n 等分時：

圓心角=1 等分弧度= $(\frac{360}{n})°$；

圓周角= $\frac{1}{2}$ 圓心角= $(\frac{180}{n})°$

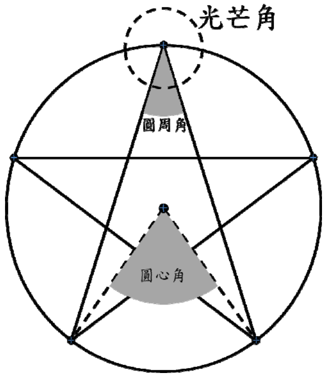

圖 8 光芒角角度與圓周角、圓心角的關係圖

當光芒角對應到 1 個等分弧時，光芒角角度= $(\frac{180}{n})°$；當光芒角對應到 a 個等分弧，光芒角角度= $(\frac{180\times a}{n})°$。由於，正 n 角星中，當兩頂點間的等分弧間隔數為 a 時，正 n 角星的光芒角是對應到(n-2×a)個等分弧(如圖 9)，可得知正 n 角星的光芒角角度為 $\frac{180\times(n-2\times a)}{n}$，其中 $1<a<\frac{n}{2}$。有關正 n 角星光芒角角度可參考表 2。

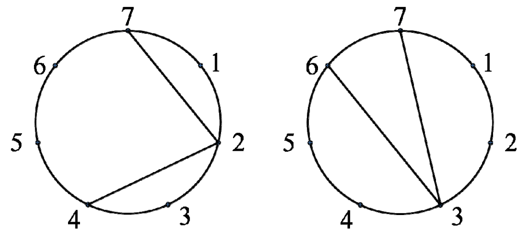

圖 9 正七角星光芒角角度分析圖

表 2　正 n 角星光芒角角度

光芒角角度	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12
a=2	$\frac{180\times1}{5}$度	$\frac{180\times2}{6}$度	$\frac{180\times3}{7}$度	$\frac{180\times4}{8}$度	$\frac{180\times5}{9}$度	$\frac{180\times6}{10}$度	$\frac{180\times7}{11}$度	$\frac{180\times8}{12}$度
a=3	$\frac{180\times1}{5}$度	$\frac{180\times0}{6}$度	$\frac{180\times1}{7}$度	$\frac{180\times2}{8}$度	$\frac{180\times3}{9}$度	$\frac{180\times4}{10}$度	$\frac{180\times5}{11}$度	$\frac{180\times6}{12}$度
a=4	×	$\frac{180\times2}{6}$度	$\frac{180\times1}{7}$度	$\frac{180\times0}{8}$度	$\frac{180\times1}{9}$度	$\frac{180\times2}{10}$度	$\frac{180\times3}{11}$度	$\frac{180\times4}{12}$度
a=5	×	×	$\frac{180\times3}{7}$度	$\frac{180\times2}{8}$度	$\frac{180\times1}{9}$度	$\frac{180\times0}{106}$度	$\frac{180\times1}{11}$度	$\frac{180\times2}{12}$度
a=6	×	×	×	$\frac{180\times4}{8}$度	$\frac{180\times3}{9}$度	$\frac{180\times2}{10}$度	$\frac{180\times1}{11}$度	$\frac{180\times0}{12}$度
a=7	×	×	×	×	$\frac{180\times5}{9}$度	$\frac{180\times4}{10}$度	$\frac{180\times3}{11}$度	$\frac{180\times2}{12}$度
a=8	×	×	×	×	×	$\frac{180\times6}{10}$度	$\frac{180\times5}{11}$度	$\frac{180\times4}{12}$度

註：兩點相隔 a 個等分弧和(n−a)個等分弧所畫出的正 n 角星是一樣的，故以粗線隔開。

伍、結語

長久以來，人類對正 n 角星的興趣一直未減。像世界各國的國旗中，就有 54 個國家的國旗上帶有正五角星的圖案(任景業, 2005)；以色列更是以象徵大衛王盾牌上的正六角星圖案(稱作大衛之星)，作為國旗標誌；我國的「青天白日滿地紅」國旗中，象徵白日光芒的十二道曙光，也是一個正十二角星；著名數學家高斯的紀念碑上，也刻著一顆正十七角星。

正 n 角星的繪圖與光芒角的探討，是一系列的數學建模歷程，在此建模歷程中，先是將真實世界中的星星裝飾品，轉換成數學模型「」，然後再透過方法尋找數學規律，發現 n 和 a 的最大公因數可以決定幾筆畫成星，以及成星的類型有「一筆畫」成星、「正 m 邊形」成星和「一筆畫正 m 角星」成星等三類。另外，正 n 角星的成星方法，在 n 是奇數時，有 $\frac{(n-3)}{2}$ 種成星方法；在 n 是偶數時，有 $\frac{(n-4)}{2}$ 種成星方法。而且，正 n 角星的光芒角角度還存在數學公式 $\frac{180\times(n-2\times a)}{n}$ 的規律。可見，正 n 角星的繪圖與光芒角的探討，是一個很有趣的數學探索活動，建議有興趣的教師不妨試試，讓學生在動手繪星的過程中，也能整合因數、倍數、多邊形、圓周角和圓心角等概念。

備註：

註1： 此時(n , a) =1，[n , a]= na。所以要連接 n 條一樣長的線段才能回到原點 n，因此能一筆畫回到原點。

註 2：此時(n , a) = a，[n , a]= n，存在 m 使得 n=ma。所以要連接 m 條一樣長的線段(正 m 邊形)才能回到原點 n。因此，要有 a 個正 m 邊形才能畫出正 n 角星。

註 3：此時(n , a) = d，存在 m、s 互質，使得 n=md、a = sd。因為{n , a}為{m , s}等價類，且{m , s}是一筆畫正 m 角星，所以要有 d 個正 m 角星才能畫出正 n 角星。

參考文獻

任景業(2005)。耐人尋味的圖案-五角星。*數學教育*，21，97-106。

孫文先(2003)。幾何學-用調查研究的方法探索。九章出版社。

陳明璋(2013)。Activate your Mind Attention。取自阿嬤的家 http://ama.nctu.edu.tw/index.php。

楊惠后(2009)。正 n 角星的內角和探討。數學傳播，33(1)，44-48。