三角形三個極小值問題的探討

李政豐 [1*] 傅淑婷 [2] 陳昭地 [3]

[1] 國立竹南高級中學

[2] 臺北市立敦化國民中學

[3] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

在編寫國家教育研究院國民中學數學教材原型的過程中，感覺到目前中學幾何課程的份量，在國高中均有減輕的趨勢，然而要訓練學生證明與推理的能力，幾何是數學家公認不可或缺的學程。在台灣師大數學系陳昭地教授的指導下，我們藉由三個初等數學的問題：

(1) 平面上一點到三角形三邊所在直線距離和之最小值。

(2) 最大內角小於或等於 120 度的三角形邊上或內部一點到三頂點的最小距離和。

(3) 給定一個銳角三角形，求三邊內接三角形的最短周長。

利用 Geogebra 為輔助工具，並透過五篇參考資料(A.S.Posamentier、陳昭地等，詳見本文末參考文獻)，以動態模擬的方式，藉由視覺化的圖說證明，得到一些結論，導出以 ΔABC 的三個對應邊長 a,b,c 表出的最小值計算公式，以我們所知，這三個公式是一項新的創見：

(1) 平面上任一點到三角形三邊所在直線的距離和之最小值，為最大邊上高的長度，不妨設 $a,b\le c$，則它的最小值計算公式：

$$\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}\text{，其中 } s=\frac{a+b+c}{2},(a,b\le c)\text{,公式對任意三角形都成立。}$$

(2) ΔABC 邊上或內部一點 P 到三頂點有最小距離和，P 稱為等角點，其最小距離和公式：

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}\text{，其中 } \Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，}s=\frac{a+b+c}{2}\text{。}$$

這個公式對最大內角不超過 120 度的三角形均成立。

(3) 銳角三角形 ΔABC，當三邊的內接三角形有最短周長時，此最短周長的內接三角形，恰是 ΔABC 的垂足三角形。此內接三角形的最短周長公式：

*為本文通訊作者

$\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$，這個公式對於銳角三角形才會成立。

在中學幾何課程日漸縮減的時候，希望能拋磚引玉，引起中學生藉由數學軟體探討幾何學的興趣。

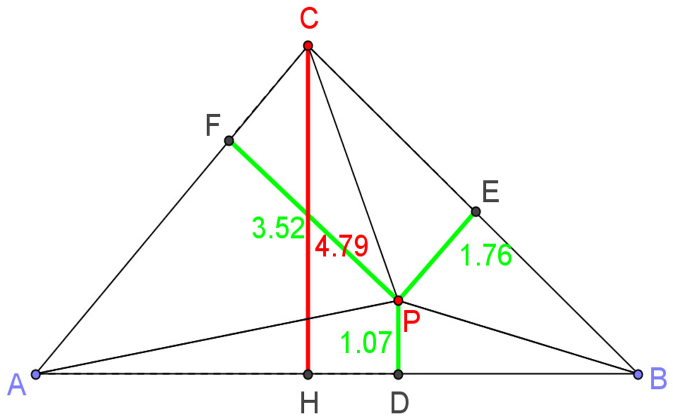
貳、本文

一、平面上任一點到三角形三邊所在直線的距離和之最小值為最大邊上高的長度。

ΔABC 中, $\angle A$ 的對應邊 $\overline{BC}=a$, $\angle B$ 的對應邊 $\overline{AC}=b$, $\angle C$ 的對應邊 $\overline{AB}=c$。

若 $\overline{AB}=c$ 是最大的邊，$\overline{CH}$ 是最大邊上的高，P 點是平面上任一點。

1. 當 P 點在三角形 ΔABC 的內部或邊界，如圖(一)



圖（一）

ΔPAB 的面積+ ΔPBC 的面積+ ΔPAC 的面積= ΔABC 的面積

$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}$ 。

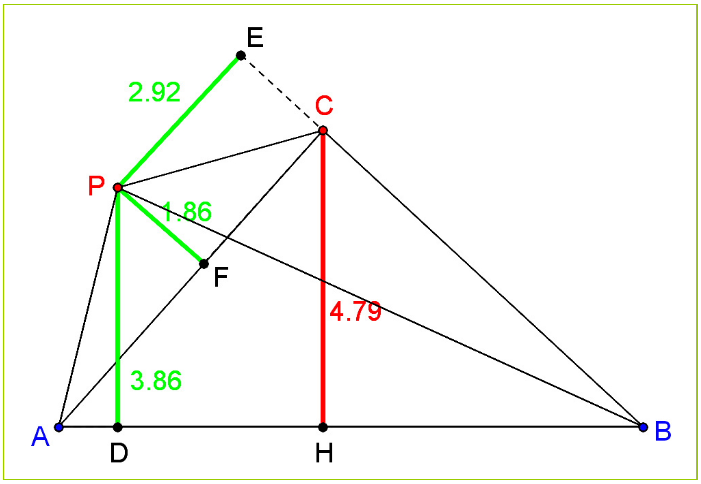
但是，因為 $\overline{AB}$ 是最大的邊。

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PF}\geq\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}$$

故 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PF}\geq\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

兩邊除掉 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，得到 $(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})\geq\overline{CH}$

2. 當 P 點在三角形 ΔABC 的外部，如下圖(二)



圖(二)

(ΔPAB 的面積+ ΔPBC 的面積+ ΔPAC 的面積)> ΔABC 的面積

$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}>\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}$ 。

但是，因為 $\overline{AB}$ 是最大的邊。

$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PF}>\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}$

故 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PF}>\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

兩邊除掉 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，得到 $(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})>\overline{CH}$ ，此時沒有最小值。

$(\overline{PF}+\overline{PD}+\overline{PE})>\overline{CH}=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$ ， $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ， $a,b\le c$ 。

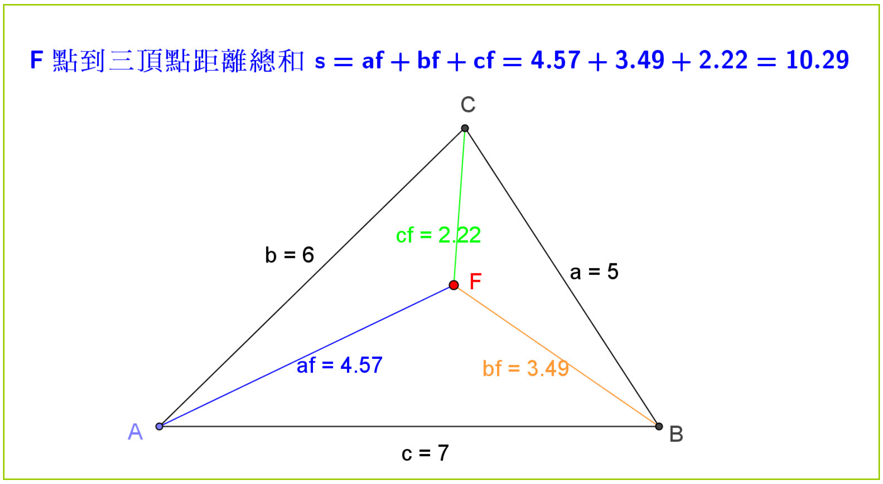
由以上的証明，若 ΔABC 非正 Δ，則 P 為頂點 C，才有最小值 $\overline{CH}$ 。

二、探討最大內角小於或等於 120 度的三角形邊上或內部一點到三頂點的最小距離和(有最小距離和的點我們稱為等角點或費馬點)。

例 1、 在邊長 5,6,7 的三角形的內部一個動點 F，當 F 移動時，觀察 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ 的最短距離和。

步驟一：如圖(三)，固定三角形三邊長 5,6,7，先讓學生們一個接一個上台到電腦桌，藉由手動模擬，讓上台同學都能動手操作，藉由同儕學習的力量，互相比較哪一位同學找得的距離和是最小，此時老師正是扮演裁判的角色，有讚賞有風趣，

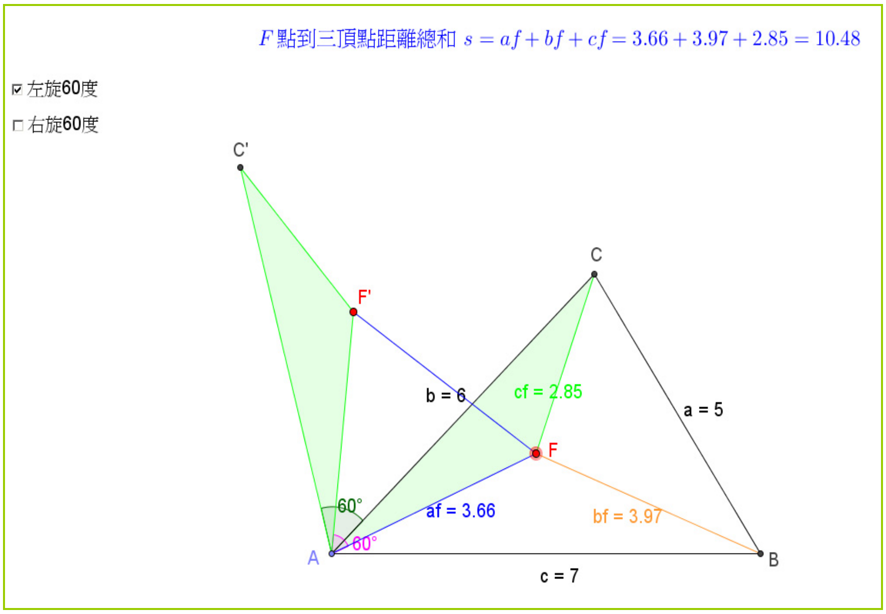
當然也增添了教室熱絡的氣氛。



圖（三）

步驟二：要激發同學們探索的興趣，「為什麼我們找到的這個點 F 會使得到三頂點的距離和最小」。

把三角形 AFC 以 A 為中心左旋 60 度，如圖(四)，$\overline{CF}=\overline{C'F'}$，$\overline{AF}=\overline{F'F}$，$\overline{FB}$ 不變。

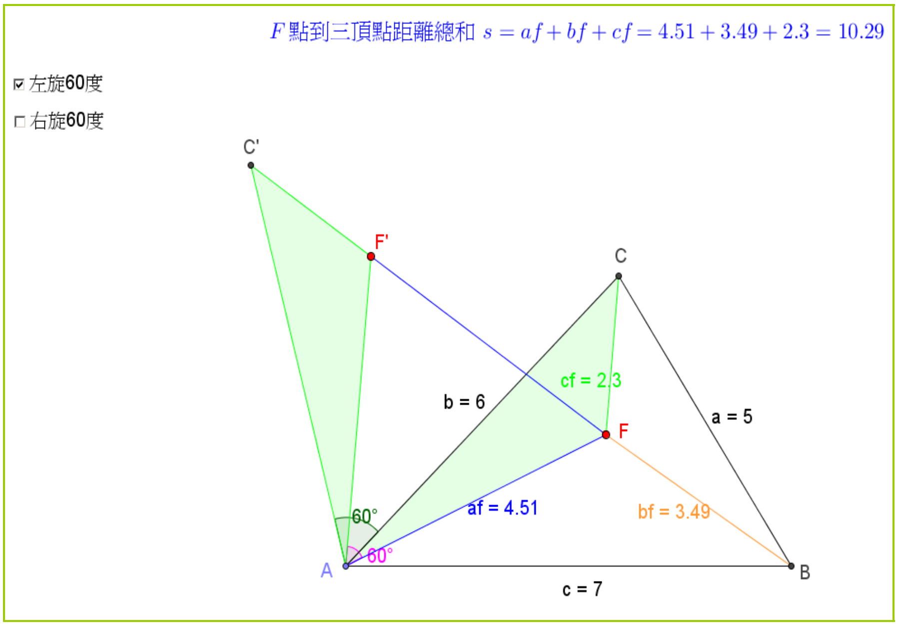


圖（四）

因為當我們將 $\overline{AF}$ 左旋 60 度時，$\Delta AFF'$ 是一個頂角 60 度的等腰三角形，也就是

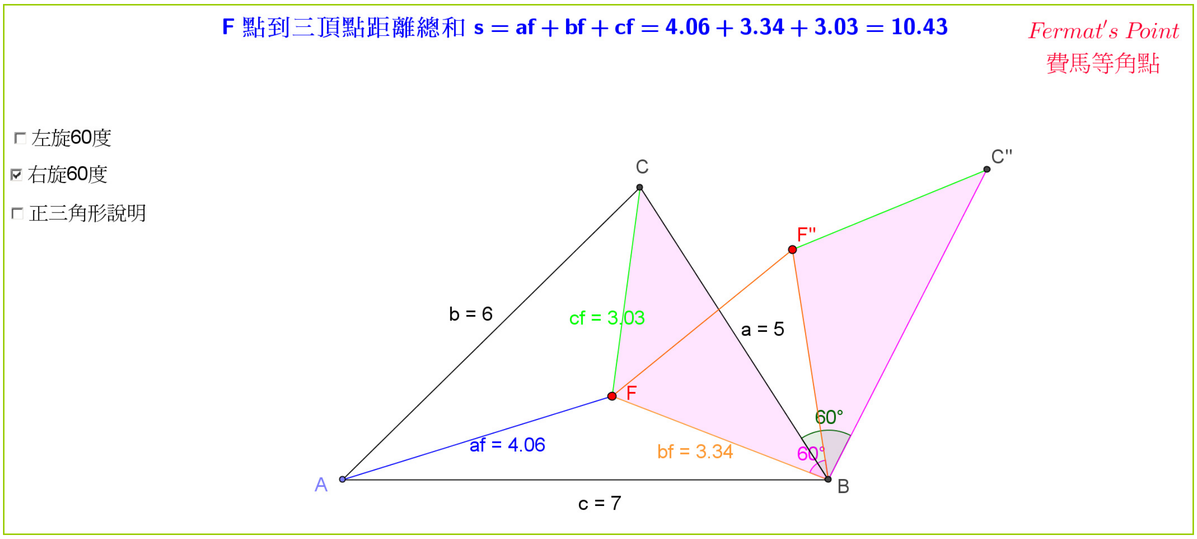
正三角形，於是把 $\overline{AF}$ 的長度用 $\overline{FF'}$ 來替換，此時 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{FF'}+\overline{FB}+\overline{F'C'}$，由於 B 點與 C' 點是固定的點，不論動點 F 如何移動，只有 F' 會跟著動，B, C' 這兩點的坐標是不變的。而 B, C' 兩點之間以直線最短。

步驟三：調整 F 點使 C', F', F, B 四點共線，如圖(五)，使得 $\overline{C'F'}+\overline{F'F}+\overline{FB}$ 最小，亦即使 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ 最小。我們發現：當 F 落在 $\overline{BC'}$ 上時 $\overline{C'F'}+\overline{F'F}+\overline{FB}$ 最小。



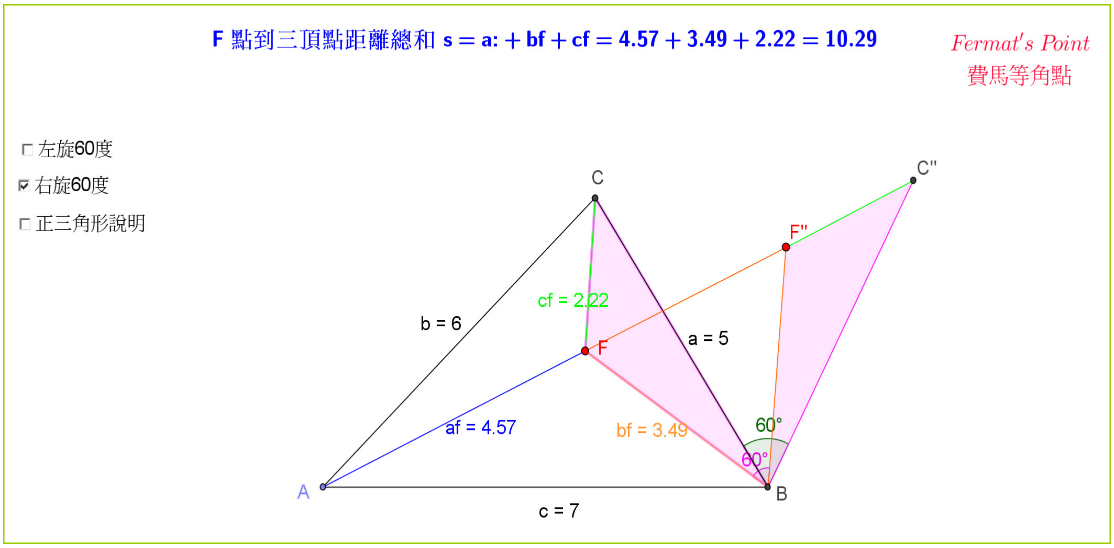
圖（五）

步驟四：同理，將把三角形 BFC 以 B 為中心右旋 60 度，如圖(六)，$\overline{FC}=\overline{F''C''}$，$\overline{FB}=\overline{FF''}$，$\overline{FA}$ 不變。此時 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AF}+\overline{FF''}+\overline{F''C''}$



圖（六）

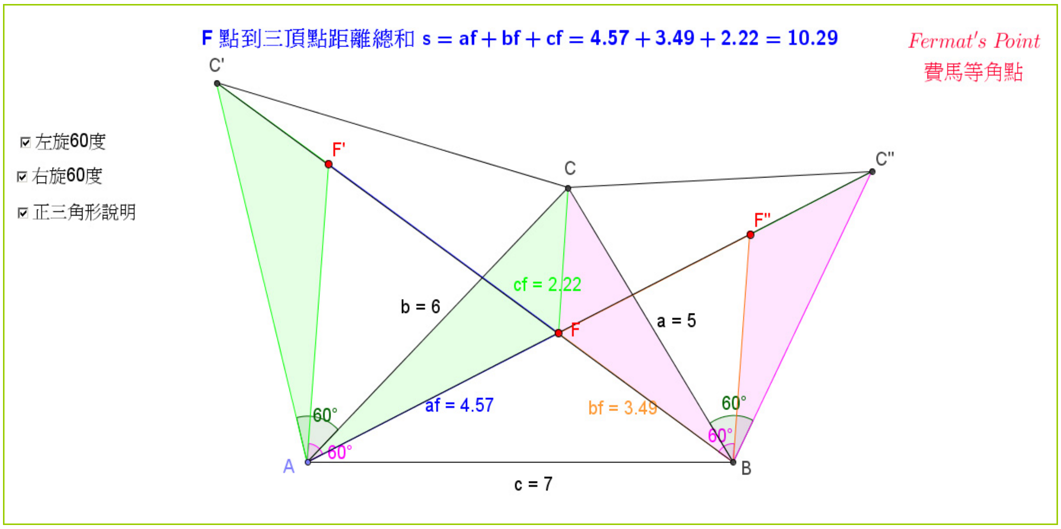
步驟五：再調整 F點，使得 F落在 $\overline{AC''}$ 上，如圖(七)，因為 A, C''是固定點，兩定點之間以直線距離最短，此時 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AF}+\overline{FF''}+\overline{F''C''}$ 為最小。



圖(七)

步驟六：當 F 落在 $\overline{BC'}$ 與 $\overline{AC''}$ 的交點時 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ 最小，如圖(八)。

當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ 最小時，F 稱為等角點或費馬點(*Fermat Point*)

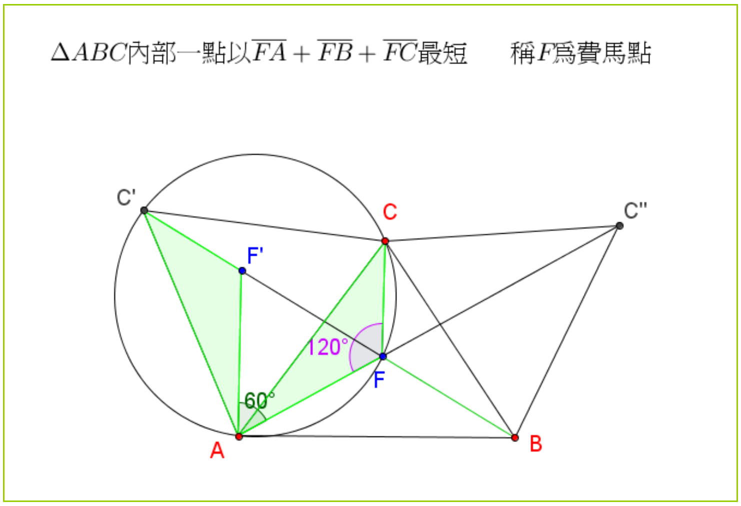


圖(八)

步驟七：當 F 是費馬點時， $\angle AFB=\angle BFC=\angle AFC=120^{\circ}$ ，如圖(九)。

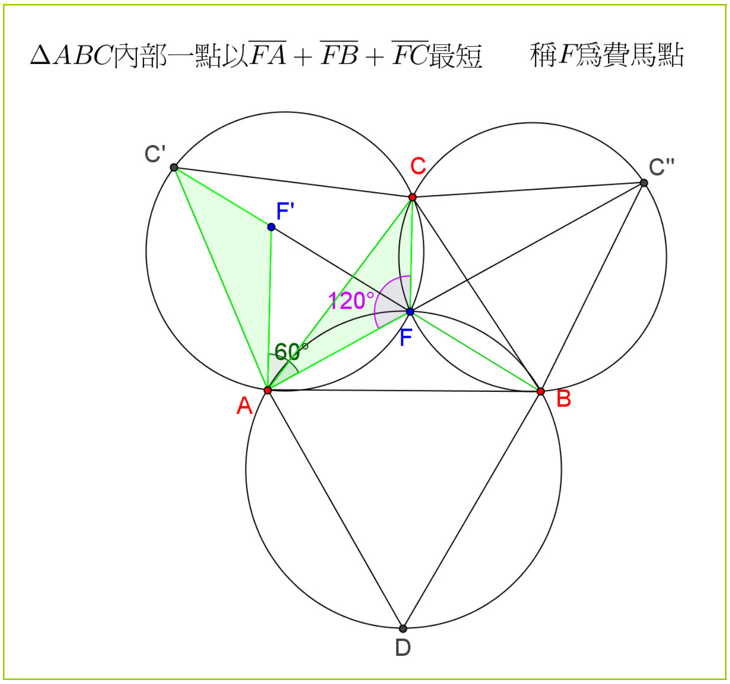
因為 C' , F' ,F,B 四點共線， $\Delta AFF'$ 是等邊三角形， $\angle FF'A$ =60 度，故 $\angle AFC=\angle AF'C'$=120 度。同理 $\angle BFC=120$ 度，則 $\angle AFB$=120 度。

因為四邊形 $AFCC'$ 中，$\angle AC'C = 60$ 度，$\angle AFC = 120$ 度，對角互補，是圓內接四邊形，故四邊形 $AFCC'$ 有一個外接圓。



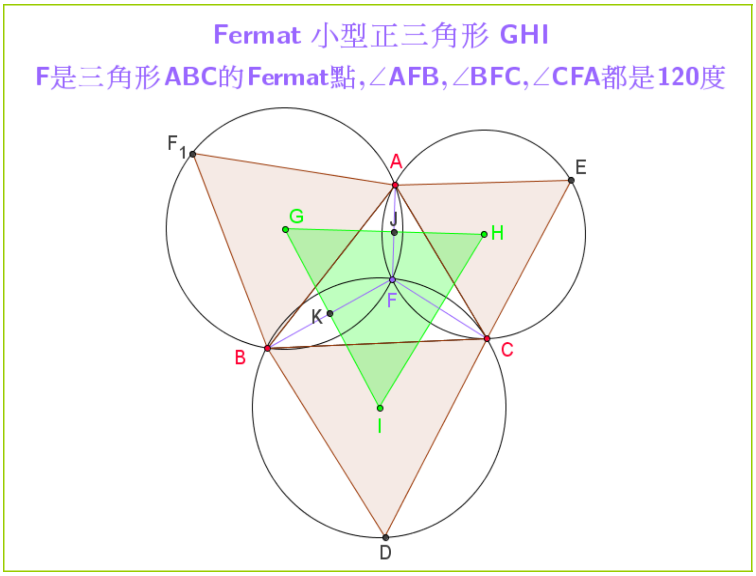
圖（九）

步驟八： 如圖(十)若將最大內角不超過 120 度的三角形的三邊，往外各作正三角形，$\angle C' = \angle C'' = \angle D = 60$ 度，$\angle CFA = \angle CFB = \angle AFB = 120$ 度,因此若以 $\overline{AB}$ 為一邊，往下做正 ΔABD，$\angle AFB + \angle ADB = 180^\circ$，則 $AFBD$ 四點共圓，費馬點 F，即是這三個正三角形外接圓共同交點。



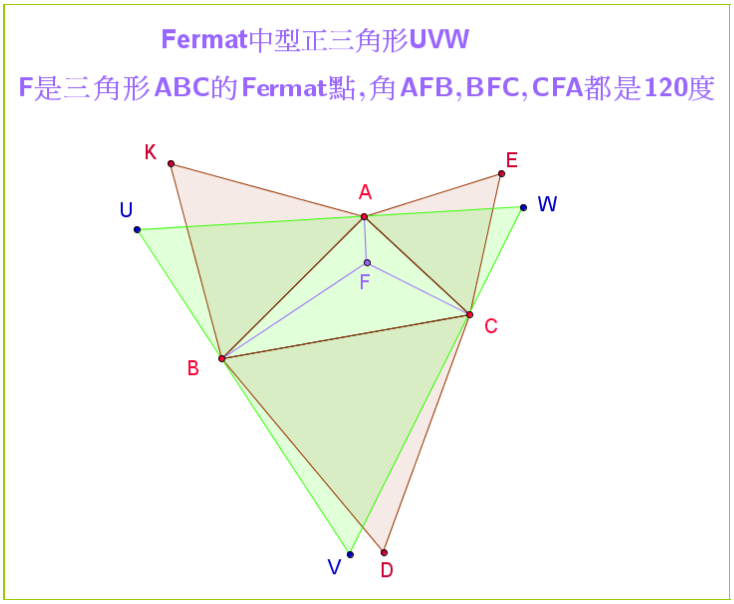
圖(十)

步驟九： 如圖(十一)，$\overline{AF}$ 是左右兩圓之公共弦，與連心線 $\overline{GH}$ 互相垂直，垂足為 J，同理，$\overline{BF}$ 與 $\overline{GI}$ 互相垂直，垂足為 K，四邊形 $GJFK$ 中，$\angle FJG+\angle FKG=180$ 度，對角互補，是圓內接四邊形，因為 $\angle JFK=120$ 度，故 ΔGHI 中，$\angle G=60$ 度，同理 $\angle H=\angle I=60$ 度，則不論 A,B,C 如何移動，ΔGHI 永遠是正三角形。



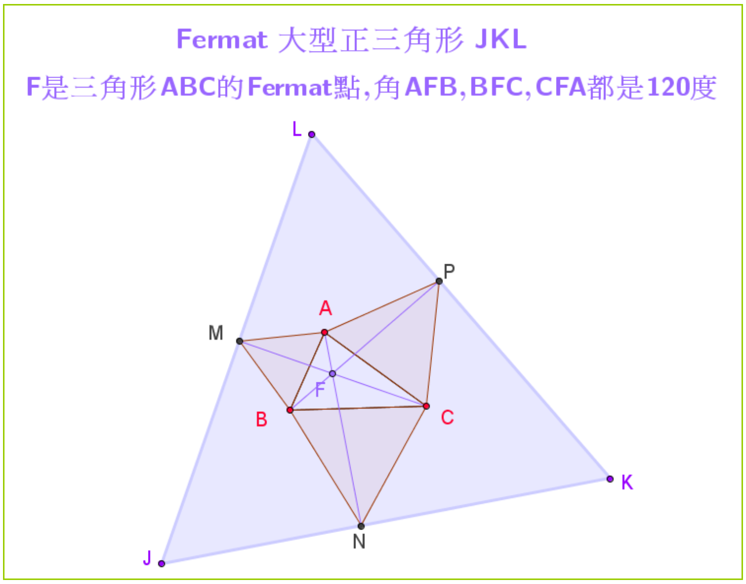
圖(十一)

如圖(十二)，分別過三頂點 A,B,C 作線段 $\overline{FA}$、$\overline{FB}$、$\overline{FC}$ 的垂線，若三垂線的交點為 U,V,W，則四邊形 $AUBF$ 對角互補是圓內接四邊形，$\angle AFB=120$ 度，$\angle AUB=60$ 度，同理可證 ΔUVW 也永遠是正三角形。



圖(十二)

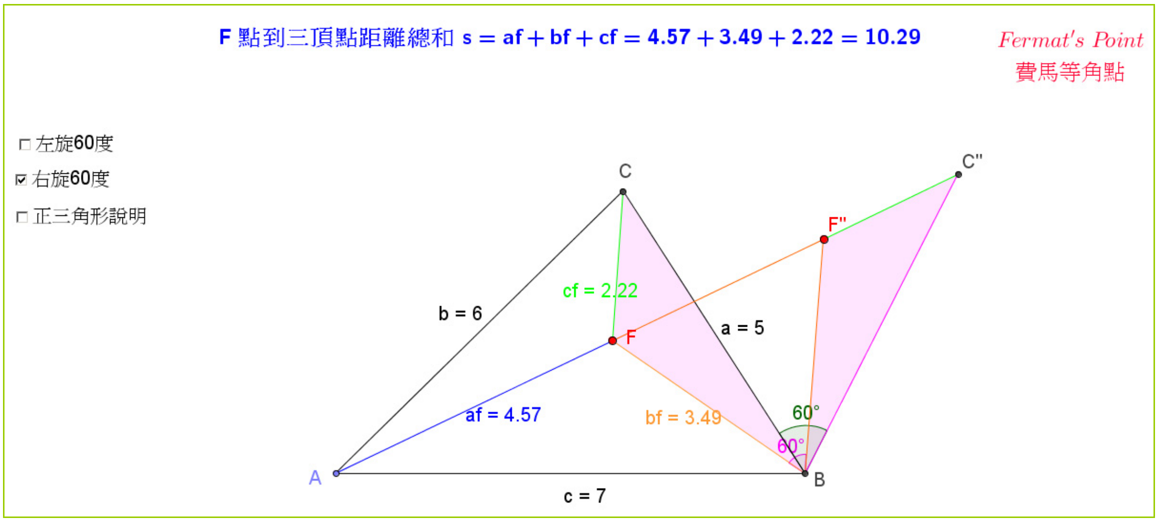
如圖(十三)，過三個正三角形的外頂點 M,N,P 作 $\overline{CM}$ 、 $\overline{AN}$ 、 $\overline{BP}$ 的垂線，三垂線交在 L,J,K。因為 $\angle AFM$ 是正三角形 ABM 外接圓的弦 $\overline{AM}$ 所對的圓心角，故 $\angle AFM=\angle MFB=60$ 度，同理 $\angle AFP=\angle PFC=60$ 度， $\angle CFN=\angle NFB=60$ 度，四邊形 $LPFM$ 對角互補是圓內接四邊形， $\angle PFM=120$ 度，故 $\angle L=60$ 度。因此，不論 A,B,C 如何移動， ΔLJK ，永遠是正三角形。



圖(十三)

步驟十：當 ΔABC 的邊長為 a,b,c 時 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ 的最小值要如何用 a,b,c 來表示?

如圖(十四)



圖(十四)

由海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中周長之半 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。

根據餘弦定理， $\overline{AC''}^2=c^2+a^2-2ac\cdot\cos(60^\circ+B)$ ，由和角公式，

$$\overline{AC''}^2=c^2+a^2-2ac(\frac{1}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B)=c^2+a^2-ac\cdot\cos B+\sqrt{3}ac\cdot\sin B.........(1)$$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,面積公式 $\Delta=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B\Rightarrow\sin B=\dfrac{2\Delta}{ac}$,將 sin$B$, cos$B$ 代入(1)式

$\overline{AC''}^2=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta$ ，最短距離和為 $\overline{AC''}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\cdot\Delta}$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left[2(a^2+b^2+c^2)+8\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$$

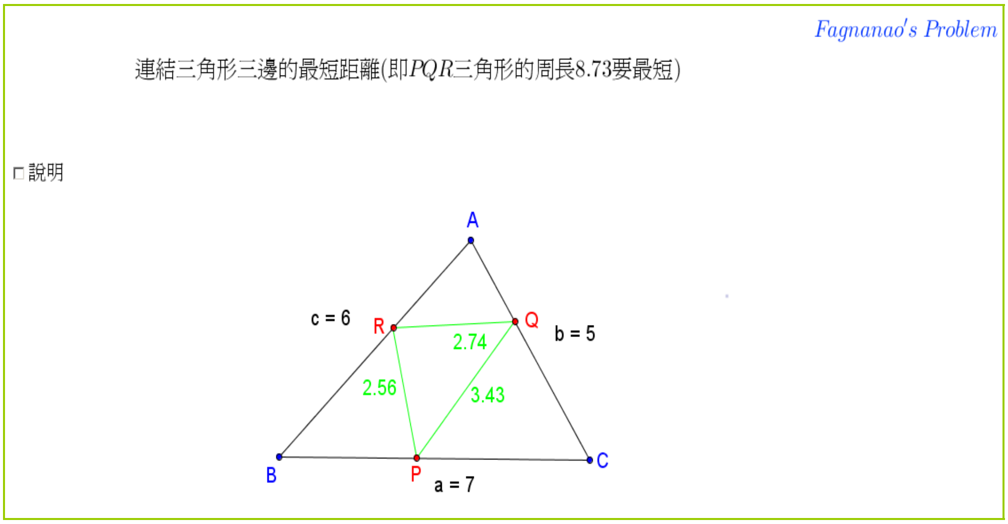
再找一個特別的三角形來印證，當邊長是 $a=5,b=6,c=7$ 的三角形，代入

$\overline{\mathrm{AC''}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(110)+4\sqrt{3}\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}\right]}\approx10.29$ ，符合上面實驗操作的結果。

上面所討論的情形對於最大角 120 度以內的三角形均成立。換言之，對於最大內角 120 度以內的三角形，它的等角點都在三角形的內部，上述討論的情形均成立。

三、探索銳角三角形三邊內接三角形的最短周長(Fagnano's Problem)

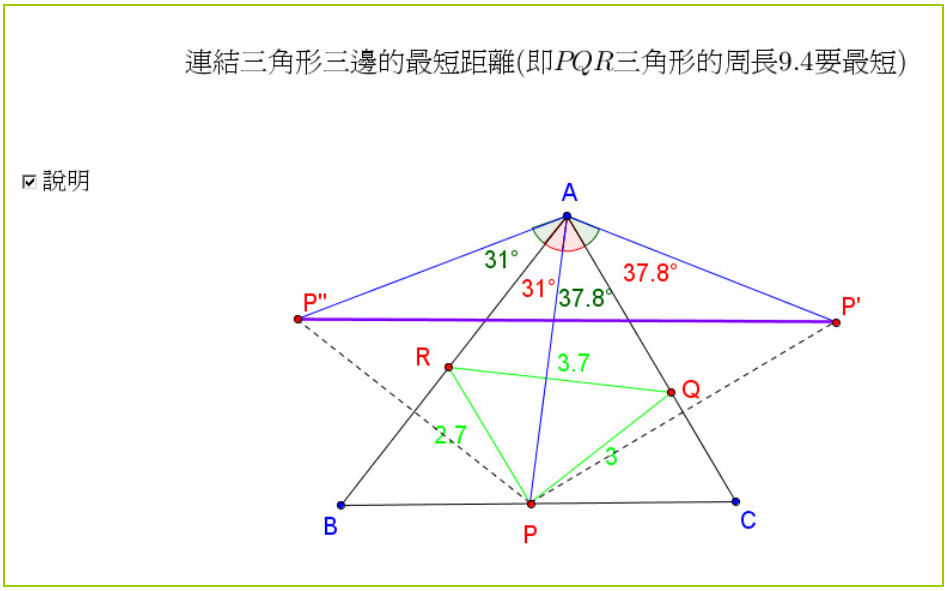
例 2、如圖(十五)，P,Q,R 分別為 5,6,7 的 ΔABC 三邊上的點求 ΔPQR 的最短周長。



圖(十五)

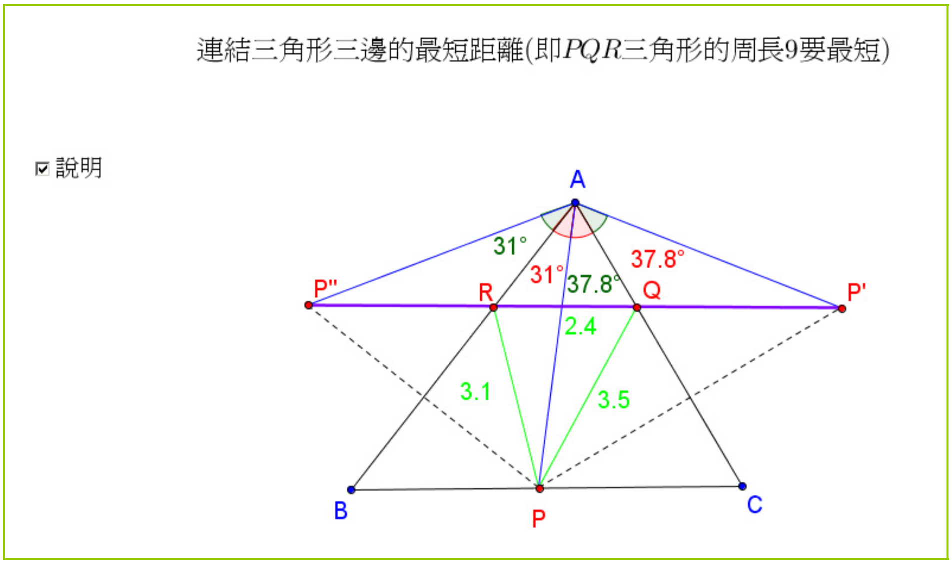
步驟一：固定 ΔABC 的邊長分別為 5,6,7，在三邊 $\overline{BC}$ ，$\overline{CA}$ ，$\overline{AB}$ 上分別取一點 P,Q,R，讓學生輪流上台拖曳這三點，看誰能求得周長的最小值，這又是一番熱鬧的氣氛。

步驟二：作法說明；如圖(十六)，選 $\overline{BC}$ 邊上一點 P，P 對 $\overline{AC}$ 線段的對稱點 P' ，對 $\overline{AB}$ 線段的對稱點 P'' ，連接 $\Delta AP'P''$ 。



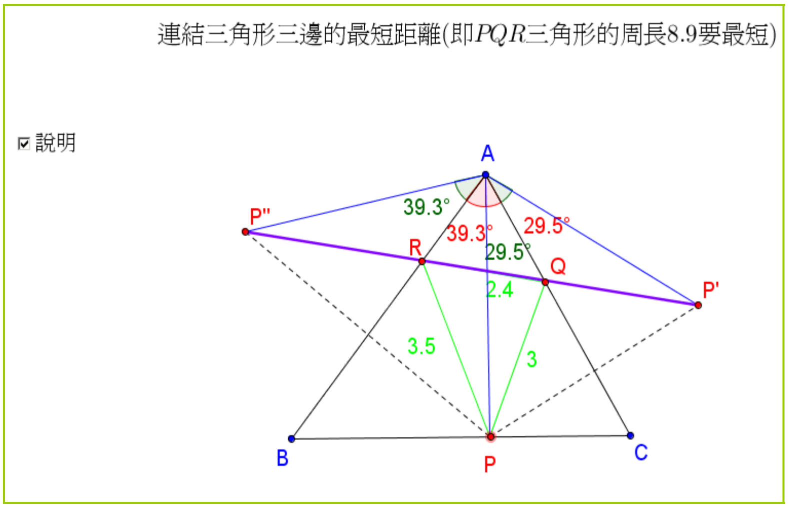
圖(十六)

步驟三：如圖(十七) $\Delta AP'P''$ 是以 $\overline{AP}$ 為腰，頂角固定是 $2\angle A$ 的等腰三角形，當腰長最短，底邊 $\overline{P'P''}$ 最短，此時將 Q,R 移到 $\overline{P'P''}$ 上， ΔPQR 的周長最短。



圖(十七)

步驟四：如圖(十八)當 P 是 $\overline{BC}$ 邊上高的垂足，$\overline{AP}$ 最短，頂角固定是 $2\angle A$ 的等腰 $\Delta AP'P''$ 的兩腰最短，則底邊 $\overline{P'P''}$ 也最短，若將 R,Q 移到 $\overline{P'P''}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的交點，則 ΔPQR 周長最短。$\angle APR=\angle AP''R=\angle AP'Q=\angle APQ$，而且 $\angle PQC=\angle P'QC=\angle AQR$，僅當 $\overline{BQ}\perp\overline{AC}$ 時，$\angle BQR=\angle BQP$ 才會成立，故 Q 是垂足，同理 R 也是垂足。把 P 點同樣的程序套用在 Q,R 上也有相同的結果。於是得到，到三邊最短距離和，恰是垂足三角形的周長。



圖(十八)

步驟五：當 ΔABC 的邊長為 a,b,c 時 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 的最小值要如何表示?

令高 $\overline{AP}=\overline{AP'}=\overline{AP''}=h$，由餘弦定理

$$\overline{P'P''}^2=h^2+h^2-2\cdot h\cdot h\cdot\cos 2A=2h^2(1-\cos 2A)=2h^2\cdot 2\sin^2 A=4h^2\sin^2 A$$

$\Rightarrow \overline{P'P''}=2h\cdot\sin A$，令 $\overline{BC}=a$

三角形 ABC 面積 $\Delta=\dfrac{1}{2}ah \Rightarrow$ 高 $h=\dfrac{2\Delta}{a}$，另一方面 $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A=\dfrac{2\Delta}{bc}$

則 $\overline{P'P''}=2h\cdot\sin A=\dfrac{4\Delta}{a}\cdot\dfrac{2\Delta}{bc}=\dfrac{8\Delta^2}{abc}$

將海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

代入上式，可得 $\overline{P'P''}=\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$

則連結三角形三邊之最短周長為 $\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$

再找一個特殊的三角形來印證，當邊長是 $a=2,b=2,c=2$ 的正三角形，它的垂足三角形周長為 3，若代入 $\overline{P'P''}=\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$=3，符合上面推導的結果。

參、結語

藉由 Geogebra 視覺化的圖像表徵，搭配明顯易懂的圖說證明，再利用三邊長 *a,b,c* 為參數，導出漂亮的結果：

1. 到三邊所在直線的最短距離和公式 $\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$ ，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，$a,b\le c$。對任意三角形均成立。
2. *Fermat* 最短距離和公式 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]}$，對最大內角 120 度以內的三角形成立。
3. *Fagnano* 最短周長公式 $\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$，對銳角三角形成立。

這是可以量化的公式，如果能夠把它引進中學生幾何學的內容，將會是一堂很有趣的數學課程。國中學生還沒有三角函數的基礎，可用 Geogebra 的代數功能，先找到這兩個極值的近似值。高二學生則可以放在三角形面積的海龍公式之後，完整的教完上述兩個可將三個極值量化的公式及其內容，是一則結合資訊科技與幾何三角的綜合性教材。

參考文獻

黃武雄,高中數學實驗教材編輯小組(1984)。第五章：用各種方法處理平面幾何。(pp.288-295)，高中數學實驗教材第三冊自然組修訂本。台北市：數理出版公司。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形。國民中學數學教材原型 C 冊第 2-3 單元主題(陳昭地主編)。新北市：國家教育研究院。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。三角形的三心。國民中學數學教材原型 C 冊第 1-5 單元主題(陳昭地主編)。新北市：國家教育研究院。

A.S.Posamentier & J. Stepelman(1986). Unit 43：The Equiangular point(pp.284-285) In Posamentier S.A. & Stepelman J. (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics(2nd Ed.)，Columbus OH，Merrill.

A.S.Posamentier & J. Stepelman(1986). Unit 44：The minimun Distance Point of a Triangle (pp.285-286) In Posamentier S.A. & Stepelman J. (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics(2nd Ed.), Columbus OH，Merrill.