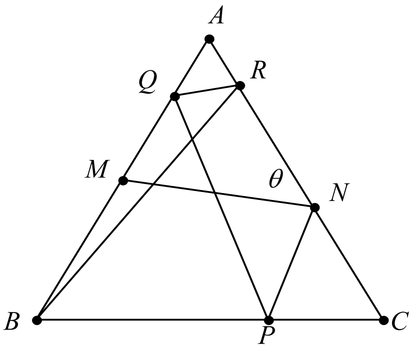
中學生通訊解題第八十二期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

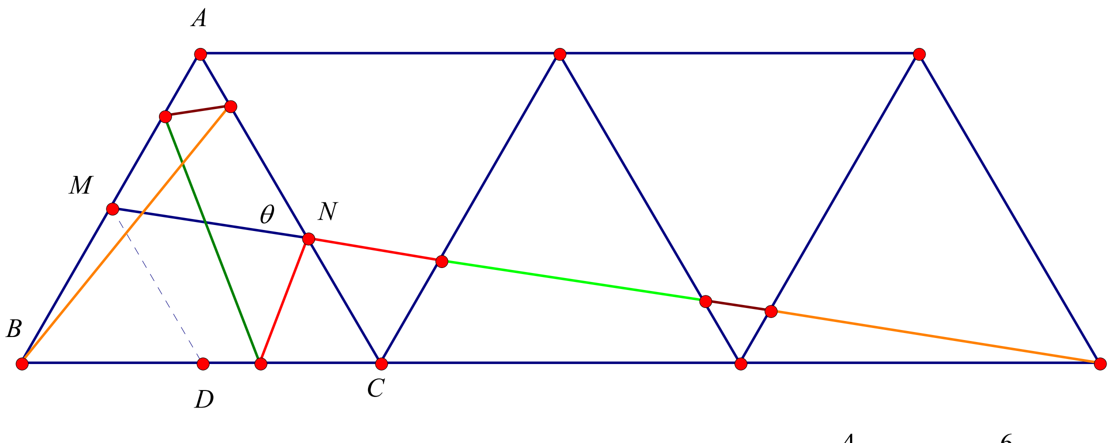
問題編號
8201

如右圖，一特製邊長為 2 的正三角形撞球桌，從 AB 邊的中點 M 向 AC 邊上 N 點擊出撞球，經反彈至 BC 邊上 P 點、再反彈至 AB 邊上 Q 點、再反彈至 AC 邊上 R 點、最後反彈至 B 點。若形成這路徑時，則 $\overline{AN}$ 的長度是多少？



參考解答：

Ans： $\frac{6}{5}$



取 BC 邊上的中點 D，所以 $NC：MD = 4：5$，因 $MD = 1$，得 $NC = \frac{4}{5}$，故 $AN = \frac{6}{5}$

解題評註：對稱的觀念是歐氏幾何的重要觀念，本題便是一個好例子。

問題編號
8202

設 $x_1, x_2, \cdots, x_{2010}$ 是整數，且滿足下列條件

(1) $-1 \le x_n \le 2(n = 1,2,...,2010)$

(2) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2010} = 204$

(3) $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{2010}{}^2 = 2010$

試求 $x_1{}^3 + x_2{}^3 + \cdots + x_{2010}{}^3$ 之最小值及最大值。

參考解答：

設這 2010 個整數中有 r 個-1，q 個 0，s 個 1，t 個 2

則 $\begin{cases} -r + s + 2t = 204 \\ r + s + 4t = 2010 \end{cases} \Rightarrow s + 3t = 1107 \Rightarrow 0 \le t \le 369$

$x_1{}^3 + x_2{}^3 + \cdots + x_{2010}{}^3 = -r + s + 8t = 204 + 6t \Rightarrow 204 \le x_1{}^3 + x_2{}^3 + \cdots + x_{2010}{}^3 \le 2418$

事實上若取 r=903,q=0,s=1107,t=0 時，$x_1{}^3 + x_2{}^3 + \cdots + x_{2010}{}^3$ 有最小值 204

若取 r=534,q=1107,s=0,t=369 時，$x_1{}^3 + x_2{}^3 + \cdots + x_{2010}{}^3$ 有最大值 2418

解題評註：作答時僅需掌握一些不等式的運算，應不難答對。

問題編號
8203

已知 n 是三位正整數，若 n^2 之末三位數等於 $n+110$，求 n 之值。

參考解答：

符合題意之正整數 n 有兩個，即：115 與 886。

解法如下：

依題意，n^2 之末三位數等於 $n+110$，即 $n^2-(n+110)$ 是 1000 的倍數，

得 $1000 \mid (n^2 - n - 110)$，即 $1000 \mid (n+10)(n-11) \Rightarrow 2^3 \times 5^3 \mid (n+10)(n-11)$，

$\because$ 若 $d \mid x$ 且 $d \mid y$，則 $d \mid (mx \pm ny)$，$\therefore$ 若 $d \mid (n+10)$ 且 $d \mid (n-11)$，則 $d \mid 21$，

而知 $(n+10)$ 與 $(n-11)$ 之公因數必為 21 之因數

$\Rightarrow$ $(n+10)$ 與 $(n-11)$ 二數之公因數不可能是 2, 5，

因此 $\begin{cases} n+10=8a \\ n-11=125b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n+10=125A \\ n-11=8B \end{cases}$ $\Rightarrow$ $8a-10=125b+11$ $\Rightarrow$ $8a-125b=21$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-13+125t \\ b=-1+8t \end{cases}$ 或 $125A-10=8B+11$ $\Rightarrow$ $125A-8B=21$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} A=1+8t \\ B=13+125t \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(a,b)=(112,7)$，$(A,B)=(1,13)$，故 n 之值為 886 或 115。

解題評註：

本題應用因數與倍數的關係以解題，只要想到了「n^2 之末三位數等於 $n+110$」其實就是「$n^2-(n+110)$ 是 1000 的倍數」，尋求 n 值之路立可豁然開朗！在得知原題意即 $(n+10)$ 與 $(n-11)$ 二數乘積為 $(2^3\times5^3)$ 之倍數後，如何討論所有的可能情形而找到 n 值是解題重點，此時我們注意到：「一數的倍數與倍數之和或差，仍是該數的倍數」，此一性質常以符號表述如下：

「若 $d\mid x$ 且 $d\mid y$，則 $d\mid(mx\pm ny)$，其中 d, x, y, m, n 都是整數。」

這是求解本題主要的理論依據。

本題應徵答題人數共有 5 人。其中台北市敦化國中林同學、台北市大安國中王同學、台北市大安國中陳同學皆由「令 $n=100a+10b+c$」著手，前者比較 n^2 末三位與 n 之關係，理路清晰；後二者依序討論 c, b, a 之可能值，雖然過程略為繁複，但是都能清楚表述，值得鼓勵。台北縣光復國中王同學則在先考慮 n 的個位數可能為 0, 1, 5, 6 後，表列 n 之末二位的所有可能一一檢視，而得到正確答案，列表詳明，也堪嘉許。台北市北投國中吳同學觀察到了 n^2 與 $(n+110)$ 除以 1000 同餘，但未進一步據此討論 $n^2-(n+110)$ 與 1000 的關係，而亦就 n 之個位數僅可能為 0, 1, 5, 6 一一討論求解，雖當然亦可行，卻不免可惜了原始的重要發現！在觀察題意初有所得後，如何想方設法，探尋可能進路，值得同學再多練習與深思。有道是：「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村」，咦！數學解題之所以迷人者在此！

問題編號
8204

設 $[x]$ 表示不大於 x 最大整數，例如：$[3]=3, [2.3]=2, [-2.5]=-3$，

則 $\left[\sqrt{2010+\sqrt{2010+\sqrt{2010+\sqrt{2010+\cdots+\sqrt{2010}}}}}\right]$ 之值為何？(其中共有 2010 個 2010)

參考解答：

定義數列，$a_{n+1}=\sqrt{2010+a_n}, a_1=\sqrt{2010}$

$\Rightarrow 44<a_1<45 \Rightarrow 45<\sqrt{2055}<\sqrt{2010+a_1}<\sqrt{2056}<46 \Rightarrow 45<a_2<46$

繼續如此的步驟 $\Rightarrow 45<a_3<46 \Rightarrow 45<a_4<46 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 45<a_{2010}<46$，故所求 $=[a_{2010}]=45$

解題評註：

有同學利用無限多個 2010 來作答，是個不錯的嘗試，但若無法確定極限存在與否，對極限值作四則運算有很大的機會會出問題，這可能須要交待清楚

問題編號
8205

平面上有 2010 個相異點，任三點都不共線

(1) 給定任一直線 L，且 L 不與這 2010 個點中任意兩點所連直線平行或重合，是否一定找得到直線 L' 平行 L 或與 L 重合，而且把這 2010 個點隔成個數相等的兩堆？

(2) 給定一個與這 2010 個點都不同的點 P，且含 P 後的這 2011 個點中，任三點都不共線，是否一定找得到直線 M 通過 P，而且把這 2010 個點隔成個數相等的兩堆？

參考解答：

(1) 作一條平行 L，且讓所有點都在同側(假定在右側)的直線 M，讓 M 往右移，並計算右側的點個數，則點個數由 2010 變到 0，又因為沒有兩個點連線與 L 平行會重合，故移動的過程跨過 M 的點一次只能一點，所以點數的變化是連續整數，故必有一個時候，右邊的點個數是 1005，此時 M 平行或與 L 重合，且把 2010 個點隔成個數相等的兩堆

(2) 過 P 作一條不過這 2010 個點的直線 M，分別計算兩側(一邊定為右側，另一邊定為左側)的點個數，並計算右側的點個數減左邊的點個數 n，

若 n=0，則 M 即為所求，

若不是，則 n 必為偶數，令 n=2k，以 P 為中心旋轉 M 直到轉 180 度

過程中，n 從 2k 變到-2k，又含 P 後這 2011 個點中，任三點都不共線，所以每次跨過 M 的點至多一點，因此，n 的變化是連續偶數，故必有一個時候，n=0，此時 M 把 2010 個點隔成個數相等的兩堆

問題編號
8206

學校舉辦足球賽，每個參賽隊都與其它隊各賽一場，勝一場積分 2 分，平一場積分 1 分，負一場積分 0 分，已知僅有一個隊積分最多，但他勝的場數最少，問最少有幾個隊參賽才有這種可能？

參考解答：

1. 積分最多的隊為冠軍。設冠軍隊勝 n 場，平 m 場，則他共積 $2n+m$ 分。由題意其餘各隊勝的場次 $\geq n+1$，即積分 $\geq 2(n+1)$，由 $2n+m>2(n+1)$，得 $m\geq 3$，因此有隊踢過平局，他的積分 $\geq 2(n+1)+1$，由 $2n+m>2(n+1)+1$，得 $m\geq 4$，冠軍隊至少勝一場，否則他的積分 $\leq S-1$ (S 為參賽隊數)，其餘各隊的積分均少於 $S-1$，所有各隊積分之和 $<S(S-1)$，而每賽一場雙方積分之和為 2，因此各隊積分之和為 $S(S-1)$，矛盾，因此 $n\geq 1$，$m\geq 4$，冠軍隊參加比賽的的場數 ≥ 5，參賽隊數(包括冠軍隊) ≥ 6 個。
2. 以下比賽積分表有 6 個隊參賽且滿足題意，因此最少有 6 個隊參加。

	A	B	C	D	E	F	積分
A		1	1	1	1	2	6
B	1		2	0	0	2	5
C	1	0		0	2	2	5
D	1	2	2		0	0	5
E	1	2	0	2		0	5
F	0	0	0	2	2		4

解題評註：

1. 參與徵答的同學中有兩位能按題意條理說明清楚，並說明有 6 隊參賽確實滿足條件的情況，非常好！
2. 作答時應注意：除了說明至少 6 隊參賽，也要說明有 6 隊參賽確實滿足條件的情況。換句話說，『至少 6 隊，6 隊是成立的』。
3. 有同學用列舉的方法說明 2 隊、3 隊、4 隊、5 隊不合條件，應將所有比賽結果均考慮。同學作答的那一種不合條件，未必其他比賽結果均不合條件，這是有欠嚴謹的地方。
4. 有一位同學答案錯誤，這是因為冠軍隊有一勝，那麼其他隊中有一隊敗給冠軍隊，同學錯在這裡。