排容原理及應用舉例

許介彥

私立大葉大學 電機工程學系

小於 10 的正整數總共有九個，其中與 10 互質的有 1, 3, 7, 9 等四個；小於 15 的正整數中與 15 互質的整數則有 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 等八個。你能很便捷地答出所有小於 12000 的正整數中與 12000 互質的數有幾個嗎？這個問題由集合的觀點不難解決。

本文假設所討論的集合都是元素個數有限的集合（即 finite set），並且用 $|S|$ 來表示集合 S 的元素個數，因此如果 $S=\{1,3,5,7\}$，那麼 $|S|=4$，因為 S 含有四個元素。

壹、排容原理

數學上經常碰到的一種情況是需要計算兩個集合的聯集總共有多少個元素，也就是對任意兩個集合 S_1 和 S_2，我們想要計算 $|S_1\cup S_2|$ 的值；我們不能只是單純地將 $|S_1|$ 和 $|S_2|$ 相加，因為這樣一來有些元素會被算到兩次，修正的方法顯然是將兩個集合的共同元素的個數減掉（使得 S_1 和 S_2 中的每個元素都被算到正好一次），因此以下關係成立：

$$|S_1\cup S_2|=|S_1|+|S_2|-|S_1\cap S_2|$$

上式的等號右邊雖然有三項，但是對許多問題來說，計算這三項會比直接算左邊的 $|S_1\cup S_2|$ 來得容易。一般而言，計算交集的元素個數會比計算聯集的元素個數容易。

對任意三個集合 S_1,S_2,S_3，我們是否也能透過計算集合間的交集的元素個數來算出 $|S_1\cup S_2\cup S_3|$ 的值呢？由於我們可以將 $S_1\cup S_2\cup S_3$ 看成是 $(S_1\cup S_2)$ 和 S_3 這兩個集合的聯集，因此可以應用剛才的式子得

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup S_3|&=|(S_1\cup S_2)\cup S_3|\\&=|S_1\cup S_2|+|S_3|-|(S_1\cup S_2)\cap S_3|\end{aligned}$$

其中的 $|S_1\cup S_2|$ 我們已經知道如何展開了，而由恆等式

$$(S_1\cup S_2)\cap S_3=(S_1\cap S_3)\cup(S_2\cap S_3)$$

可得

$$\begin{aligned}&|(S_1\cup S_2)\cap S_3|\\&=|(S_1\cap S_3)\cup(S_2\cap S_3)|\\&=|S_1\cap S_3|+|S_2\cap S_3|-|S_1\cap S_2\cap S_3|\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup S_3|&=|S_1|+|S_2|-|S_1\cap S_2|+|S_3|\\&\quad-|S_1\cap S_3|-|S_2\cap S_3|+|S_1\cap S_2\cap S_3|\end{aligned}$$

這就是我們要的式子；將等號右邊各項的位置稍作調整可得

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup S_3|&=|S_1|+|S_2|+|S_3|-|S_1\cap S_2|\\&\quad-|S_2\cap S_3|-|S_1\cap S_3|+|S_1\cap S_2\cap S_3|\end{aligned}$$

請注意上式的等號右邊是先將個別集合的元素個數相加，但是因為有些元素

被重覆計算了，因此接著將任兩個集合的交集的元素個數減掉，但是這樣一來又減過頭了，因此又需將三個集合的交集的元素個數加回來。

觀察以上當集合數為兩個及三個時的情形，有一個模式已經慢慢顯現出來了。一般而言，對任意 n 個集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，下式恆成立：

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_i |S_i| - \sum_{i<j} |S_i \cap S_j|$$

$$+ \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|$$

上面的式子是有名的「排容原理」(the principle of inclusion and exclusion，簡稱為 PIE，也稱作 sieve principle)。當我們要根據上式算出 n 個集合的聯集的元素個數時，我們先將個別集合的元素個數相加(總共有 n 個數相加)，再減去每兩個集合的交集的元素個數（總共減去了 $C(n,2)$ 個數)，再加上每三個集合的交集的元素個數（總共加上了 $C(n,3)$ 個數)，再減去⋯⋯，直到最後加上或減去所有 n 個集合的交集的元素個數為止，這一系列「包容」與「排除」的運算就是排容原理名稱的由來，中文也稱做「容斥原理」或「取捨原理」。

如果我們令

$$A_1 = \sum_i |S_i|,\ A_2 = \sum_{i<j} |S_i \cap S_j|,$$

$$A_3 = \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k|,\ \cdots\cdots$$

等，那麼排容原理可以更簡潔地表為

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n|$$
$$= A_1 - A_2 + A_3 - \cdots + (-1)^{n-1} A_n$$

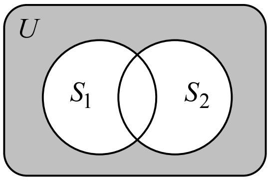
或

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} A_i$$

附帶一提，集合的聯集關係是對應到邏輯上的「或」，而交集則對應到邏輯上的「且」，因此 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 是由屬於 S_1 或屬於 S_2 或屬於 S_3 的元素所成的集合，而 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 則是由屬於 S_1 且屬於 S_2 且屬於 S_3 的元素所成的集合。

貳、另一個形式

如果集合 S_1 和 S_2 都是某個宇集 U 的部分集合，那麼集合 U 中既不屬於 S_1 也不屬於 S_2 的元素有幾個呢？如果 $|U| = N$，答案顯然是 $N - |S_1 \cup S_2|$，也就是 $S_1 \cup S_2$ 的補集的元素個數（下圖的陰影部分）。



同理，對任意 n 個集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，如果它們全都是某個宇集 U 的部分集合而且 $|U| = N$，那麼 U 中不屬於任何 S_i 的元素所成的集合就是 $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}$，也就是 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ 的補集，其元素個數為

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}|$$
$$= N - |S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n|$$
$$= N - A_1 + A_2 - \cdots + (-1)^n A_n$$

這個式子可算是排容原理的另一個形式，可用來算出「不屬於 S_1 且不屬於 S_2 且……且不屬於 S_n 」的元素個數，在解決許多問題時也很有用。

排容原理要如何推導呢？仿照我們前面由 $|S_1 \cup S_2|$ 推導出 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3|$ 的作法，讀者不難由 n 個集合的情形推導出 $n+1$ 個集合的情形，因此排容原理不難用數學歸納法來推導（雖不難但是頗「煩」，讀者可自行一試）。本文稍後還將介紹另一種推導方式，不過接下來讓我們先看排容原理的幾個應用。

參、圓桌上的夫妻

A、B、C、D、E 等五個男生的太太分別是 a、b、c、d、e 五個女生，他們 10 人即將圍著一張圓桌而坐，入座的方式是由五個男生先隨機就座，不過每兩人之間都空出一個座位，然後五個女生再隨機坐在剩下的五個座位中。請問：全部 10 個人都就座後，沒有任何一對夫婦比鄰而坐的機率是多少？

為了簡單起見，如果某種坐法可以經由另一種坐法旋轉而得，我們將這兩種坐法視為相同的坐法；因此我們不妨將 A 看成是固定坐在這 10 個座位中的某個位子上（例如最靠近門的位子），如此一來不難看出五對夫婦圍著圓桌而坐且男女相間的坐法總共有 $(4!)(5!)=2880$ 種，因為 $BCDE$ 有 $4!$ 種坐法而 $abcde$ 有 $5!$ 種坐法。我們只要知道這 2880 種坐法中有至少一對夫婦相鄰的坐法有幾種，用 2880 減去此數即為沒有任何一對夫婦相鄰的坐法數，再將結果除以 2880 即為沒有任何一對夫婦相鄰而坐的機率。

請注意「有至少一對夫婦相鄰」也就是「Aa 相鄰或 Bb 相鄰或 Cc 相鄰或 Dd 相鄰或 Ee 相鄰」，引號裡我們用了好多次的「或」，這顯然是集合的聯集關係，因此可以用排容原理來解決。

假設 S_1 為 A 與 a 相鄰的所有坐法所成的集合，S_2 為 B 與 b 相鄰的所有坐法所成的集合，……，S_5 為 E 與 e 相鄰的所有坐法所成的集合，如此一來 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5|$ 就是有至少一對夫婦相鄰的坐法數。

首先考慮 $|S_1|$ 是多少。如果我們先忽略 A 和 a，讓其他八人隨機且男女相間地坐在八個座位上，坐法總共有 $(3!)(4!)=144$ 種（仿照前面的作法，可先將 B 看成是固定坐在最靠近門的位子），接著 A 和 a 可以一起被安插到已經坐好的八人的任意兩個人之間，這總共有八種可能的選擇，因此 $|S_1| = 144 \times 8 = 1152$ 。同理，$|S_2| = |S_3| = |S_4| = |S_5| = 1152$ 。

接著考慮 $|S_1 \cap S_2|$ 是多少。同樣地，我們先讓 CDE 與 cde 就座，坐法有 $(2!)(3!)=12$ 種，接著讓 A 與 a 一起坐在已就座的六人的任意兩人之間，總共有六種選擇；接著讓 B 與 b 一起坐在已就座的八人的任意兩人之間（A 與 a 之間除外），總共有七種選擇；因此 $|S_1 \cap S_2| = 12 \times 6 \times 7 = 504$ 。同理可知 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 的任意兩個集合的交集的元素個數都是 504。

接著考慮 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3|$ 的值。我們先讓 DE 與 de 就座，坐法有 $(1!)(2!)=2$ 種；接著讓 A 與 a 一起坐在已就座的四人的任意兩人之間，總共有四種選擇；接著讓 B 與 b 一起坐在已就座的六人的任意兩人之間（A 與 a 之間除外），總共有五種選擇；接著讓 C 與 c 一起坐在已就座的八人的任意兩人之間（A 與 a 之間及 B 與 b 之間除外），總共有六種選擇；因此 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 2 \times 4 \times 5 \times 6 = 240$。同理可知 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 的任意三個集合的交集的元素個數都是 240。

透過類似的推導可知 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 的任意四個集合的交集的元素個數都是 $(0!)(1!) \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$。

接著考慮 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5|$ 的值。我們先讓所有五個男生就座，坐法有 $4! = 24$ 種；接著讓五個女生入座，此時坐法只有兩種（每個女生都坐在配偶的左邊或都坐在配偶的右邊），因此 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5| = 24 \times 2 = 48$。

最後，我們由排容原理得

$$
\begin{aligned}
&|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5| \\
&= \binom{5}{1} \cdot 1152 - \binom{5}{2} \cdot 504 + \binom{5}{3} \cdot 240 - \binom{5}{4} \cdot 120 \\
&+ \binom{5}{5} \cdot 48 \\
&= 2568
\end{aligned}
$$

因此沒有任何一對夫婦相鄰的坐法總共有 $2880 - 2568 = 312$ 種，發生的機率為

$$\frac{312}{2880} \approx 0.108$$

探討 n 對夫婦圍著圓桌男女相間而坐且夫婦皆不相鄰的坐法數的問題在數學上稱為 Ménage problem。

肆、旅客與捷運列車

一輛包含了 n 節空車廂的捷運列車進站後有 p 名旅客上了車（n 與 p 皆為正整數），每名旅客選擇車廂的方式是隨機的。請問：(a)每節車廂裡都有旅客的機率是多少？(b)所有 n 個車廂中有正好 r 個車廂裡有旅客的機率是多少？

由於 p 名旅客進入 n 個車廂的方法總共有 n^p 種（每個人都有 n 個選擇），我們只要知道其中有至少一個車廂是空車廂的乘坐方法有幾種，再用 n^p 減去此數即為每節車廂裡都有旅客的方法數，再將結果除以 n^p 即為每節車廂裡都有旅客的機率。

「有至少一個車廂是空車廂」也就是「第一個車廂是空車廂或第二個車廂是空車廂或……或第 n 個車廂是空車廂」，又用了好多次的「或」，因此又是集合的聯集，排容原理又可以派上用場。

假設 S_1 為第一個車廂是空車廂的所有乘坐方法所成的集合，S_2 為第二個車廂是空車廂的乘坐方法所成的集合，……，S_n 為第 n 個車廂是空車廂的乘坐方法所成的集合，如此一來 $|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n|$ 就是這 n 個車廂中有至少一個車廂是空車廂的乘坐方法數。

我們立即可知 $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_n| = (n-1)^p$，因為每名旅客都可以選擇進入 $n-1$ 個車廂中的任何一個。同理，對任意

兩個不同的集合 S_i 與 S_j 而言，

$$\left|S_i \cap S_j\right| = (n-2)^p,$$

因為每名旅客都可以選擇進入 $n-2$ 個車廂中的任何一個；同理可得

$$\left|S_i \cap S_j \cap S_k\right| = (n-3)^p$$

等；因此

$$\begin{aligned}&\left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\right| \\ &= \binom{n}{1}(n-1)^p - \binom{n}{2}(n-2)^p + \binom{n}{3}(n-3)^p - \cdots \\ &+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0^p \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^p\end{aligned}$$

每節車廂裡都有旅客的乘坐方法數因此等於

$$n^p - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^p$$

這可以更簡潔地表為

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^p$$

而每節車廂裡都有旅客的機率就是

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^p$$

接著我們考慮(b)小題，也就是 n 個車廂中有正好 r 個車廂裡有旅客的機率。由於從 n 個車廂中選出 r 個車廂的方法有 $C(n,r)$ 種，而由(a)小題可知 p 名旅客進入 r 個車廂而且這 r 個車廂裡都有旅客的乘坐方法有

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}(r-k)^p$$

種，因此 n 個車廂中有正好 r 個車廂裡有旅客的乘坐方法有

$$\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}(r-k)^p$$

種，發生的機率為

$$\frac{1}{n^p}\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}(r-k)^p$$

本題的(a)小題其實是(b)小題在 $r=n$ 時的特例。

由於當 $p<n$ 時顯然不可能每節車廂裡都有旅客，因此我們由(a)小題可得恆等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^p = 0 \qquad (\ p<n\ )$$

的一個組合解說；另一方面，當 $p=n$ 時，每節車廂裡都有旅客的乘坐方法顯然有 $n!$ 種，因此下式也一定成立：

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^n\ .$$

伍、字串的個數

由字母 A 和 B 各兩個總共可以排列出 $AABB$, $ABAB$, $ABBA$, $BAAB$, $BABA$, $BBAA$ 等六個不同的字串，其中相同的字母不相鄰的字串只有 $ABAB$ 與 $BABA$ 兩個。

假設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 個相異的字母，請問：利用每個字母各兩個（總共 $2n$ 個字母）總共可以排列出多少個沒有任何相同的字母相鄰的字串？

由全部 $2n$ 個字母總共可以排列出

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n}=\frac{(2n)!}{2^n}$$

個不同的字串，我們只要知道其中有至少一對相同的字母相鄰的字串有幾個，再用 $(2n)!/2^n$ 減去此數即為沒有任何相同的字母相鄰的字串數。

「有至少一對相同的字母相鄰」也就是「兩個 a_1 相鄰或兩個 a_2 相鄰或……或兩個 a_n 相鄰」，同樣是集合的聯集關係，可以用排容原理來解決。

假設 S_1 是兩個 a_1 相鄰的所有字串所成的集合，S_2 是兩個 a_2 相鄰的所有字串所成的集合，……，S_n 是兩個 a_n 相鄰的所有字串所成的集合，如此一來 $|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|$ 就是有至少一對相同的字母相鄰的字串數。

要利用排容原理，我們必須知道 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 等集合的任意 k 個（$1\le k\le n$）集合的交集的元素個數是多少；請考慮當 k 個集合為 $S_1,S_2,\ldots,S_k$ 時的情形，此時的 $|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k|$ 為字串中的兩個 a_1 相鄰且兩個 a_2 相鄰且……且兩個 a_k 相鄰的字串數，這種字串可以由下面的方法製造出來：先取 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 等字母各一個來和其他 $n-k$ 種字母各兩個組成長度為 $2n-k$ 的字串，然後再讓所得字串中的 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 等字母分別連續出現兩次即可，因此

$$|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k|=\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$$

此式對任意 k 個集合都適用，因此所求為

$$\frac{(2n)!}{2^n}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$$

看了上面的幾個例子，讀者應該可以體認到排容原理確實是處理許多計數問題時相當有力的工具。以下我們繼續介紹排容原理除了數學歸納法以外的另一種推導方式，所推導的是前述排容原理的第一種形式。

陸、排容原理的推導

假設某個元素同時屬於 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 等 n 個集合中的 t 個集合，此元素在排容原理的 $\Sigma|S_i|=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_n|$ 中被算了 t 次，在 $\Sigma|S_i\cap S_j|$ 中被算了 $C(t,2)$ 次，在 $\Sigma|S_i\cap S_j\cap S_k|$ 中被算了 $C(t,3)$ 次等，因此該元素在排容原理中總共被算了

$$t-\binom{t}{2}+\binom{t}{3}-\cdots+(-1)^{t-1}\binom{t}{t}$$

次；由二項式定理我們知道

$$-(1-1)^t=-\binom{t}{0}+\binom{t}{1}-\binom{t}{2}+\cdots+(-1)^{t-1}\binom{t}{t}$$

$$0=-1+t-\binom{t}{2}+\cdots+(-1)^{t-1}\binom{t}{t}$$

即

$$t-\binom{t}{2}+\cdots+(-1)^{t-1}\binom{t}{t}=1$$

因此該元素在排容原理中被算了不多不少正好一次，這正是我們想要的結果。

柒、尤拉函數

接下來我們考慮本文一開始所提出的問題：對任意正整數 n（假設 n 大於 1），

所有小於 n 的正整數中與 n 互質的數有幾個？

不大於 n 的正整數總共有 n 個，我們只要先求出其中與 n 不互質的數有幾個，再用 n 減去此數即為所求。

如果 n 總共有 $p_1, p_2, \ldots, p_t$ 等 t 個質因數，那麼「與 n 不互質的數」就是「p_1 的倍數或 p_2 的倍數或……或 p_t 的倍數」，顯然又是集合的聯集，可用排容原理來解決。

假設 S_i 為不大於 n 的正整數中所有 p_i 的倍數所成的集合（$1 \le i \le t$），我們可以用排容原理求出 $\left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_t\right|$，也就是不大於 n 的正整數中與 n 不互質的數的個數。

$\left|S_i\right|$ 的值很容易求得，因為就是 p_i 的倍數中不大於 n 的數的個數，因此 $\left|S_i\right| = n/p_i$。同理得

$$\left|S_i \cap S_j\right| = \frac{n}{p_i p_j},$$

$$\left|S_i \cap S_j \cap S_k\right| = \frac{n}{p_i p_j p_k}, \cdots$$

等，因此所求為

$$\begin{aligned}
&n - \left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_t\right| \\
&= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \cdots - \frac{n}{p_t} \\
&\quad + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots \\
&\quad - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_4} - \cdots \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^t \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right)
\end{aligned}$$

最後一個式子是成立的，讀者將各括號乘開即知。數學上常將小於 n 的所有正整數中與 n 互質的數的個數記作 $\phi(n)$，稱此函數為「尤拉函數」（Euler function 或 Euler's totient function）。

舉例來說，由於 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$，因此所有小於 360 的正整數中與 360 互質的數總共有

$$\phi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96 \text{ 個。}$$

捌、一般化的排容原理

對任意 n 個集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，我們前面曾經將排容原理簡潔地表為

$$\left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} A_i$$

以下我們介紹幾個更具一般性的性質（僅作描述而不予証明）。

性質一：

對任意 n 個集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，同時屬於其中的至少 r 個集合的元素的個數為

$$\sum_{i=r}^{n} (-1)^{i-r} \binom{i-1}{r-1} A_i$$

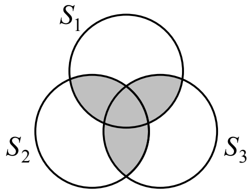
排容原理是此性質當 $r = 1$ 時的特例。

當 $n = 3$ 且 $r = 2$ 時，上式是說：同時屬於 S_1, S_2, S_3 中的至少兩個集合的元素（下圖的陰影部分）的個數為

$$\sum_{i=2}^{3} (-1)^{i-2} \binom{i-1}{1} A_i = A_2 - 2A_3$$

$=|S_1 \cap S_2|+|S_2 \cap S_3|+|S_1 \cap S_3|-2|S_1 \cap S_2 \cap S_3|$

對照下圖不難看出此關係為真。



性質二：

對任意 n 個集合 $S_1,S_2,\ldots,S_n$，同時屬於其中的正好 r 個集合的元素的個數為

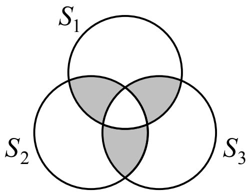
$$\sum_{i=r}^{n}(-1)^{i-r}\binom{i}{r}A_i$$

同樣以 $n=3$ 且 $r=2$ 為例，上式是說：同時屬於 S_1,S_2,S_3 中的正好兩個集合的元素（下圖的陰影部分）的個數為

$$\sum_{i=2}^{3}(-1)^{i-2}\binom{i}{2}A_i = A_2 - 3A_3$$

$=|S_1 \cap S_2|+|S_2 \cap S_3|+|S_1 \cap S_3|-3|S_1 \cap S_2 \cap S_3|$

由圖中不難看出此關係為真。



性質三：

要利用排容原理算出 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 的聯集的元素個數時，如果我們在計算 $A_1-A_2+A_3-\cdots$ 的過程中提早結束而沒有算到最後，所得雖然可能不是正確值，不過卻可以肯定所算出來的值與正確值相比是太大還是太小（即「誤差」是正數或負數）。一般而言，

$$\begin{aligned} A_1 &\ \geq\ \text{正確值} \\ A_1 - A_2 &\ \leq\ \text{正確值} \\ A_1 - A_2 + A_3 &\ \geq\ \text{正確值} \\ A_1 - A_2 + A_3 - A_4 &\ \leq\ \text{正確值} \\ \vdots\quad &\qquad \vdots \end{aligned}$$

也就是當 k 為偶數時，

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_i \leq \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}A_i$$

而當 k 為奇數時，

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_i \geq \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}A_i$$

這些不等式通稱為 Bonferroni inequalities，因義大利數學家 C. E. Bonferroni（1892–1960）而得名。

玖、結語

本文的捷運列車問題所提及的恆等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^p = 0 \quad (p<n)$$

除了文中的推導外亦不難利用生成函數導出；以恆等式

$$-(1-x)^n = -1+\binom{n}{1}x-\binom{n}{2}x^2+\cdots\pm\binom{n}{n}x^n$$

做為起點，將等號兩邊同時對 x 微分然後再同時乘以 x，並將上述步驟重複 p 次，然後將 x 以 1 代入即得。

對一個已知正整數 n 而言，是否能快速求得 $\phi(n)$ 的值在某些場合相當重要；當 n 不太大時，我們當然不難將 n 做質因數分解，然後用本文的方法順利求出 $\phi(n)$ 的值，但是當 n 很大時（例如是一個

包含了 200 位數的十進位數），要將 n 做質因數分解的工作有可能變得相當困難，困難到即使借助電腦都很難在短時間內達成。事實上，如何快速地將整數做質因數分解的問題(一般稱作 prime factorization)是數學上有名的難題，現代密碼學中有些加密法的安全性正是建立在這個問題的困難度上；如果有朝一日有人找到了能快速地將大整數質因數分解的方法，或是發明了不需做質因數分解就能快速求得 $\phi(n)$ 的方法，某些目前廣受信賴的加密法將頓時變得不堪一擊。

排容原理雖然簡單卻很有用，與鴿籠原理可並列為組合數學中的兩個最基本的定理，都是處理組合問題時應「隨身攜帶」的工具。

拾、練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1. 有 n 個人各戴著一頂帽子去參加宴會，在到達會場後他們都將帽子放到同一個櫃子裡。宴會中他們全都喝醉了，離開時都醉醺醺地從櫃子裡隨機拿了一頂帽子就走了。請問：他們當中有至少一人拿走的帽子是自己的帽子的機率是多少？
2. 將五件不同的工作分配給四個人，每個人至少須被分配到一件工作，總共有多少種分法？（答案：240 種）
3. 滿足方程式 $x_1+x_2+x_3=11$ 且 $x_1\le 3$, $x_2\le 4$, $x_3\le 6$ 的非負整數解有幾組？
4. 持續投擲一顆骰子，不超過 15 次就能擲出點數 1, 2, 3, 4, 5 至少各一次的機率是多少？（答案約為 0.698）

參考資料

許介彥（2013）：幾個恆等式的組合証明。科學教育月刊，第 354 期。

Rosen, K. H. (2007).*Discrete Mathematics and Its Applications* (6th edition).New York: McGraw-Hill.

Tomescu, I. (1985). *Problems in Combinatorics and Graph Theory*. John Wiley & Sons.