用行列式計算平面上的平行四邊形面積與空間中的平行六面體體積

張孟安

高雄市立新莊高級中學

壹、前言

在基礎數學第三冊、第三章平面向量中，學到兩個向量所張成的平行四邊形面積可用二階行列式的絕對值算出來，由此聯想到：是否也可以用二階行列式來計算兩組平行線所圍成的平行四邊形面積呢？

貳、本文

> 已知 $\begin{cases} 3 \le x+y \le 9 \\ 1 \le 2x-y \le 5 \end{cases}$ 求滿足條件的 (x,y) 所形成的平行四邊形面積

首先在坐標平面上作出圖形，令四個交點為 A、B、C、D，其中

$$A:\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \qquad B:\begin{cases} x+y=9 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

$$C:\begin{cases} x+y=9 \\ 2x-y=5 \end{cases} \qquad D:\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

（如圖 1）

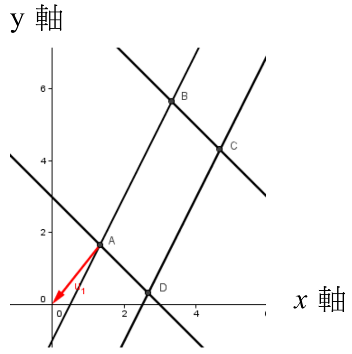

圖 1

平移圖形，其面積不會改變，所以我把平行四邊形移動到 A 點與原點 O 重合，此時四個交點座標可用二元一次方程組表示如下：

其中 $O:\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ $\quad P:\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

$$Q:\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-y=4 \end{cases} \qquad R:\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

（如圖 2）

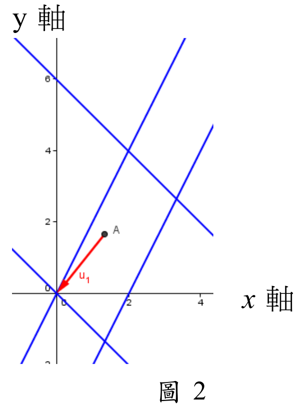

圖 2

令 P 點坐標為 $P(x_1,y_1)$，R 點座標為 $R(x_2,y_2)$，$\square OPQR$ 面積 = $\overline{OP}$ 和 $\overline{OR}$ 所張成的平行四邊形面積

$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值......(1)

在基礎數學第四冊第三章矩陣的應用，我學到利用矩陣來表示二元一次方程組，所以

$P(x_1,y_1)$ 滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R(x_2,y_2)$ 滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

亦即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots(2)$$

可令矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，矩陣 $B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，

矩陣 $C=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

由 (2) 可得 $AB=C$

$\Rightarrow \det(AB)=\det(C)\ \ldots\ldots(3)$

因為

$\det(AB)=\det(A)\times\det(B)$ 代入(3)式

所以

$\det(A)\times\det(B)=\det(C)$ ，

故

$\square OPQR$ 面積$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$=\left|\det(B)\right|=\left|\dfrac{\det(C)}{\det(A)}\right|=\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$ 的絕對值

$=\dfrac{24}{3}=8$

仿前面的計算過程，在一般情況下，用二階行列式來計算兩組平行線所圍成的平行四邊形面積

已知 $\begin{cases} t_1\le a_1x+b_1y\le t_2 \\ s_1\le a_2x+b_2y\le s_2 \end{cases}$ 求滿足條件的點 (x,y) 所形成的平行四邊形面積，先把方程組平移至 $\begin{cases} 0\le a_1x+b_1y\le t_2-t_1 \\ 0\le a_2x+b_2y\le s_2-s_1 \end{cases}$

其中

$P:\begin{cases} a_1x+b_1y=t_2-t_1 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$

$R:\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=s_1-s_2 \end{cases}\cdots\cdots\cdots(4)$

令 P 點座標為 $P(x_1,y_1)$ ，R 點座標為 $R(x_2,y_2)$

$\square OPQR$ 面積$=\overline{OP}$ 和 $\overline{OR}$ 所張成的平行四邊形面積$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值

可令矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$，矩陣

$B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，矩陣 $C=\begin{bmatrix} t_2-t_1 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 \end{bmatrix}$

由 (4) 可得

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_2-t_1 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A)\times\det(B)=\det(C)$

$\Rightarrow \det(B)=\dfrac{\det(C)}{\det(A)}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=\dfrac{\begin{vmatrix} t_2-t_1 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

故平行四邊形面積= $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$$=\frac{\begin{vmatrix} t_2-t_1 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{的絕對值}$$

$$=\frac{(t_2-t_1)(s_2-s_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{的絕對值}$$

至此可將得公式

公式一：已知 $\begin{cases} t_1 \le a_1x+b_1y \le t_2 \\ s_1 \le a_2x+b_2y \le s_2 \end{cases}$ 求滿足條件的點 (x,y) 所形成的平行四邊形面積 $=\dfrac{(t_2-t_1)(s_2-s_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ 的絕對值

再來試著將此運算方式，推演空間中平行六面體的體積，也有很好的公式，其過程如後：

在空間中求三組平行平面所圍成的平行六面體的體積

已知 $\begin{cases} t_1 \le a_1x+b_1y+c_1z \le t_2 \\ s_1 \le a_2x+b_2y+c_2z \le s_2 \\ u_1 \le a_3x+b_3y+c_3z \le u_2 \end{cases}$ 求滿足條件的 (x,y,z) 所形成的平行六面體體積

先將平行六面體平行移動到一頂點與原點 O 重合，如圖：(圖 3 平移至圖 4)

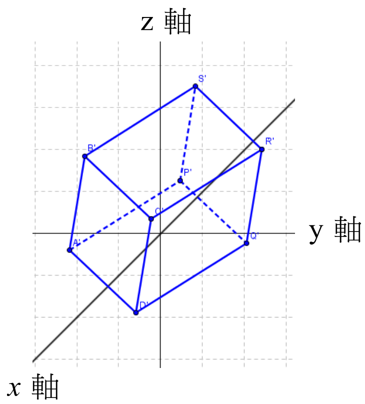

圖 3

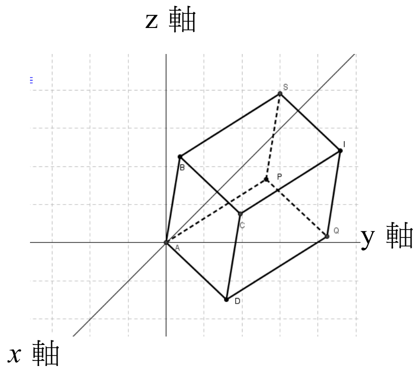

圖 4

此時方程組可寫作

$$\begin{cases} 0 \le a_1x+b_1y+c_1z \le t_2-t_1 \\ 0 \le a_2x+b_2y+c_2z \le s_2-s_1 \\ 0 \le a_3x+b_3y+c_3z \le u_2-u_1 \end{cases}$$

其中以原點為起點的三個向量，令終點座標為 $P(x_1,y_1,z_1)$ 、 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 、 $R(x_3,y_3,z_3)$ 可用三元一次方程組表示如下：

其中

$$P:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=t_2-t_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

$$Q:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=s_2-s_1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

$$R:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=u_2-u_1 \end{cases}$$

同理 $P(x_1,y_1,z_1)$ 、 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 、 $R(x_3,y_3,z_3)$ 滿足

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t_2-t_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2-u_1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots(5)$$

所求六面體的體積= $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ 所張成的

平行六面體的體積= $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值

可令矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ，

矩陣 $B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$ ，

矩陣 $C=\begin{bmatrix} t_2-t_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2-u_1 \end{bmatrix}$

由 (5) 可得

$$\det(A)\times\det(B)=\det(C) \Rightarrow \det(B)=\frac{\det(C)}{\det(A)}$$

故得

六面體的體積= $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$$=\left|\det(B)\right|=\left|\frac{\det(C)}{\det(A)}\right|$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} t_2-t_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2-s_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2-u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \text{的絕對值}$$

$$=\frac{(t_2-t_1)(s_2-s_1)(u_2-u_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \text{的絕對值}$$

至此可將得公式

> 公式二：已知 $\begin{cases} t_1\le a_1x+b_1y+c_1z\le t_2 \\ s_1\le a_2x+b_2y+c_2z\le s_2 \\ u_1\le a_3x+b_3y+c_3z\le u_2 \end{cases}$ 求滿足條件的 (x,y,z) 所形成的平行六面體
>
> 體積 $=\dfrac{(t_2-t_1)(s_2-s_1)(u_2-u_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$ 的絕對值

參、結論

由以上討論可知，

(1) 在二維空間，已知方程組 $\begin{cases} 0\le a_1x+b_1y\le k_1 \\ 0\le a_2x+b_2y\le k_2 \end{cases}$ 求滿足條件的點 (x,y) 所形成的平行四邊形面積的過程中，令張成平行四邊形的兩向量為

(x_1,y_1) (x_2,y_2)，則 x_1,y_1,x_2,y_2 滿足矩陣方程式 $AB=C$

其中，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$，矩陣

$B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，矩陣 $C=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

$\therefore$平行四邊形面積

$$=\left|\det(B)\right|=\left|\frac{\det(C)}{\det(A)}\right|=\frac{k_1k_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

的絕對值

(2) 在三維空間，已知方程組 $\begin{cases} 0\le a_1x+b_1y+c_1z\le k_1 \\ 0\le a_2x+b_2y+c_2z\le k_2 \\ 0\le a_3x+b_3y+c_3z\le k_3 \end{cases}$，求滿足條件的點 (x,y,z) 所形成的平行六面體體積的過程中，令張成平行六面體的三個向量為 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，則 $x_1,y_1,z_1,\ x_2,y_2,z_2,\ x_3,y_3,z_3$ 滿足矩陣方程式 $AB=C$

其中，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，

矩陣 $B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$

矩陣 $C=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$

$\therefore$平行六面體體積

$$=\left|\det(B)\right|=\left|\frac{\det(C)}{\det(A)}\right|$$

$$=\frac{k_1k_2k_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$ 的絕對值

所以，不論是在二維或三維空間中，方程組所圍成的平行四邊形的面積或平行六面體的體積均可用 $\left|\det(B)\right|=\left|\frac{\det(C)}{\det(A)}\right|$ 的絕對值來表示。

以上研究報告，感謝高雄市立新莊高中阮瑞泰老師和楊朝凱老師的指導。