兩外角平分線等長的三角形
是否為等腰三角形

陳昭地

國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

在 10 多年前，我們為高級中學編輯幾何學教材的時候，就很納悶的看到等腰三角形的逆定理為什麼國民中學數學教科書僅提到有兩高或兩中線相等的三角形必為等腰三角形，而未提到有兩角平分線等長的三角形是否為等腰三角形。經查原來有兩內角平分線等長必為等腰三角形的純幾何證明是遲到 1840 年才用很高難度與技巧得以證明(李虎雄、陳昭地等，2003(第 26 頁)；Posamentier & Stepelman, 1986(p.286))而且 1854 到 1864 年間，幾乎每一年的雜誌上都會出現這個聞名的萊莫斯—斯坦納(Lehmus-Steiner)定理，統計到 1965 年至少有 60 多種不同難度的直接或間接的證法，每一種證法幾乎都不適合充當國中幾何教學用；怪不得內角平分線相等的三角形是等腰，頂多被提出而不加以證明；最近大陸學者（鄭秀行、柏明元，2010）又再提出兩外角平分線等長的研究，使我想起當時我們就提出三內角分別為 12°、132°、36°的三角形，其內角 12°及 132°的兩外角的平分線等長（見下文圖 3），顯然不是等腰三角形，不過沒能繼續探究下去。只要知道外角平分線的定義(見下文定義 1)，顯然如同內角平分線一樣，等腰三角形兩底角的外角平分線是等長的，但三角形有等長的兩外角平分線是否就是等腰三角形，是值得探討的問題。最近才知道有關兩外角平分線等長是否為等腰三角形，是要受到限制的，遲至 2010 年前後才再出現這樣的問題。在 2013 年本人就用三角代數證法為有興趣的教學者，提供以平行於內角平分線一致性的不等式解決這個逆敘述的問題。

最近三年來，筆者一直為國家教育研究院課程與教學研究中心主持國民中小學數學領域原型教材編輯研發計畫。在最近的一年(2013)，重點放在幾何領域的題材，發現國民中學的幾何教材被大幅度的濃縮精簡，可能會對未來的三年高級中學的數學學習產生重大的不良影響。且由研究(朱芳儀，2013)發現國民中學學生的三角形心目中，高達八成以上認為是正三角形、等腰直角三角形或非直角的等腰三角形，於是跟研究團隊寫了一個「處處多數是等腰三角形」的單元主題，在教學注意事項中(傅淑婷、曹博盛、陳昭地，2013；Posamentier & Stepelman, 1986)要求教學者或有濃厚數學興趣的學生，應該要知道：三角形中，有等長的兩內角平分線，一定是等腰三角形的事實，並提供了較低難

度作補助線有點技巧的綜合幾何間接證法或解說法(見下文)。而經研究大陸學者鄭秀行、柏明元之純幾何與肯否法提出的兩外角平分線相等是否為等腰三角形的文章(鄭秀行，柏明元，2010)前後占 A4 版面 14 頁之多，其處理的方法比起純幾何的內角平分線問題更具有高難度與繁度，不容易掌握及閱讀，於是本人就用相當於 A4 版面 3-4 頁的三角代數法完整的證明(陳昭地，2013)。但至今我仍然不很滿意此三角代數法，因其技術仍然有些難度，不易為一般中學師生閱讀。再經回憶剛剛進入臺師大數學系任教期間(1975-2013)，參加過許多次的中學數學教師研習會，曾被提問內角平分線等長的三角形為等腰三角形之證法時，是由當時現已往生的幾何學老師邱日盛教授運用綜合幾何間接證法(見下文)，從此漸漸感受到這些問題與解法的重要性。

最近終於有戲劇性的發現，原來三角形二內角平分線等長為等腰三角形的綜合幾何間接證法，經過幾度的嘗試錯誤(作圖、觀察甚或透過參考動態幾何的實作(李政豐，2013))，有柳暗花明的時候，可僅用一條很有規律性的輔助線，就可以用來解決外角平分線等長是否為等腰三角形的問題。本文的宗旨就是提供這個有如從天上掉下來的發現，足以輕鬆地回答解決這個問題，將成果分享給有興趣的讀者參考與欣賞。

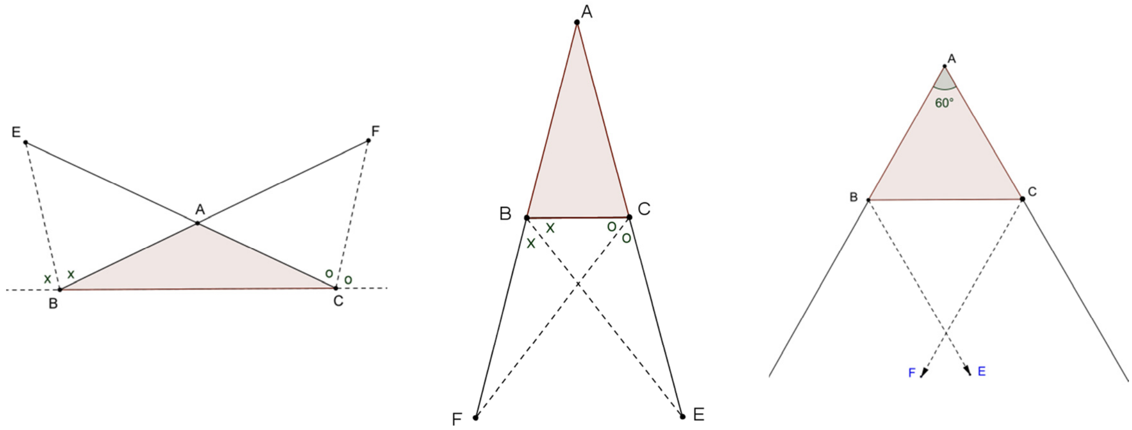
貳、定義與先備知識(溫故)

不像三角形的內角平分線及其三條平分線交於內心一樣單純明確，三角形的外角平分線及其所定出的三個傍心就顯得複雜些；本文就先給外角平分線下個正式的定義。

定義 1： ΔABC 中，$\angle A$ 的外角平分線 與對邊 $\overline{BC}$ 所決定的射線 $\overrightarrow{BC}$，或者相交或者不相交。若相交時，設其交點為 D, 則外角平分線是指 A 與 D 所決定的線段 $\overline{AD}$, 其長度就是 $\angle A$ 的外角平分線長。當它與 $\overrightarrow{BC}$ 不相交時，則以 A 為端點，$\angle A$ 的外角平分線上一點 D, 以射線 $\overrightarrow{AD}$ 為其外角平分線，其長度可視為無限長。同樣可分別定義 $\angle B$ 或 $\angle C$ 的外角平分線及其長(參考下文圖 1, 圖 2, 圖 3, 圖 6, 圖 7)。

所以 ΔABC 有 6 條外角平分線; 其中二條外角平分線頂點所連成的邊稱為此兩外角平分線的**第三邊**，它們所決定的直線有三個交點，每一個交點都稱為 ΔABC 的**傍心**。用粗略(含尺規)幾何作圖或 Geogebra 動態幾何作圖(李政豐，2013)可以觀察並發現下列的事實：

(1) 頂角不為 60° 的等腰三角形，利用 ASA 全等性質可知兩底角的外角平分線等長，並有如下兩類的長相：

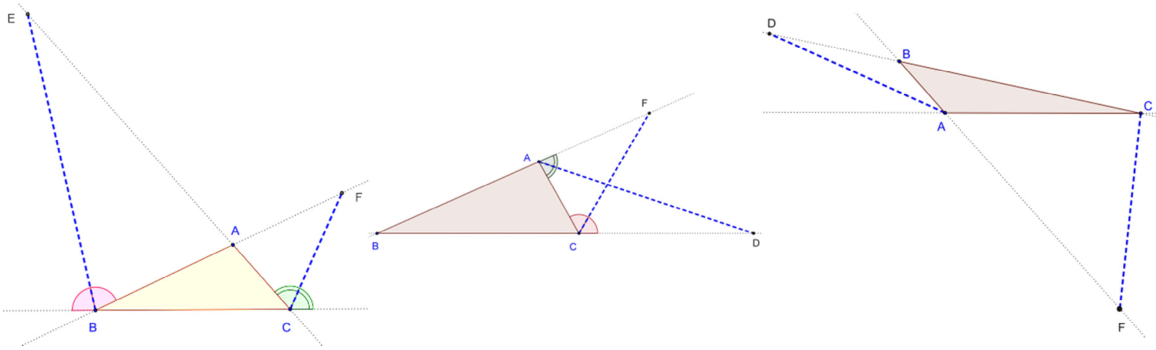


(1) 頂角 $\angle A > 60^{\circ}$　(2) 頂角 $\angle A < 60^{\circ}$　(3) 頂角 $\angle A = 60^{\circ}$

圖 1

至於頂角 60° 的等腰三角形(即正三角形)，可知二底角的一組外角平分線為過底邊頂點且平行對邊的二條射線(如圖 1-(3))。圖 1 中各情形都呈現出二底角的外角平分線都在第三邊($\overline{BC}$)的同側。

(2) 非等腰三角形的二條外角平分線，可能不等長，也可能等長，也有如下三類的長相：



(1)　(2)　(3)

圖 2

再經更仔細的觀察甚至估測，更可察覺：

(3) 非等腰三角形的二條外角平分線則有如下的特性：其二條外角平分線可能在第三邊的同側，也有可能在不同側(異側)。例如圖 2 中之(1)在 $\overline{BC}$ 邊的同側，(2)在 $\overline{AC}$ 邊的同側，而(3)則是在 $\overline{AC}$ 邊的不同側。

(4) 非等腰三角形中，小的外角之平分線長可能大於大的外角之平分線長(這跟內角平分線長的大小關係是一致的)，但也有可能小於大的外角之平分線長。

(5) 有很多非等腰三角形而具有等長的二條外角平分線。特別如 12°， 132°， 36° 的三角形

(如圖 3)就是可銘記在心的二外角平分線等長的非等腰三角形的實例。

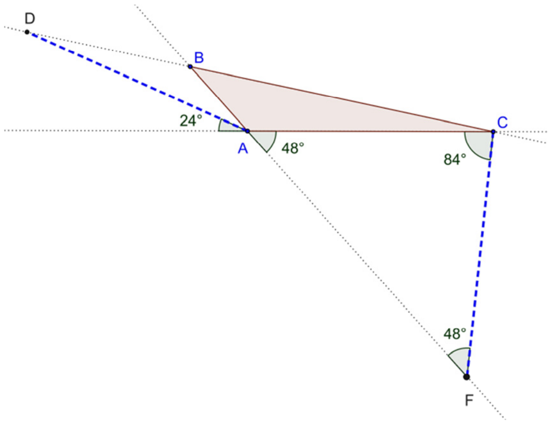


圖 3 ($\overline{AD}=\overline{AC}=\overline{CF}$)

此時等長的二條外角平分線落在第三邊的不同側。

再者，研究有兩內角平分線等長的三角形必為等腰三角形的純幾何證法，基本上是一道難題。到目前共有 60 多種幾何直接或間接證法，而在這許多證法裡，若排除有高度技巧的純幾何法，下面就提供其中一個較易接受的綜合幾何間接證法。

引理 1. 三角形中，內角大的平分線長小於內角小的平分線長。

證法(傅淑婷、曹博盛、陳昭地，2013; Posamentier & Stepelman,1986)：

ΔABC 中，$\angle A<\angle B$，$\overline{BD}$ 為 $\angle B$ 的平分線，$\overline{AE}$ 為 $\angle A$ 的平分線，如圖 4 所示。

由已知

$$\angle 1=\angle 2,\ \ \angle 3=\angle 4$$
$$\angle B=2\angle 2,\ \ \angle A=2\angle 4$$
$$\because \angle A<\angle B, \therefore \angle 4<\angle 2$$

故可作出 $\angle DBF=\angle 4$,

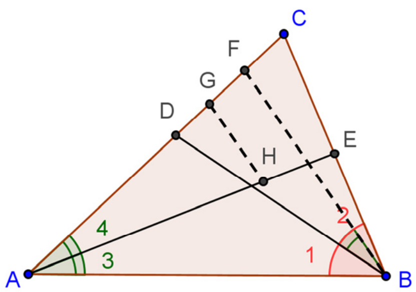


圖 4

且 $\overline{BF}$ 除了端點外都在 ΔABC 的內部。

由此作出後得到 ΔABF，進一步再由

$\angle 1 > \angle 3$, $\angle DBF = \angle 4$, 故 $\angle ABF > \angle BAF$

於是 $\overline{AF} > \overline{BF}$ (大角對大邊)

故可在 $\overline{AF}$ 上取 G 點使得 $\overline{AG} = \overline{BF}$,

再過 G 點作 $\overline{BF}$ 的平行線交 $\overline{AE}$ 於 H,

於是 $\angle AGH = \angle AFB$(二平行線所截同位角相等)

且知 H 點會落在 $\overline{AE}$ 線段的內部，

最後再利用 ASA 全等性質說明 $\Delta AGH \cong \Delta BFD$

推知 $\overline{AH} = \overline{BD}$

但由 $\overline{AE} > \overline{AH}$, 所以 $\overline{AE} > \overline{BD}$.

由引理 1, 再利用三一律，可以知道當 ΔABC 有等長的二條內角平分線 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AE}$ 時，$\angle B > \angle A$, $\angle A > \angle B$ 都不可能。故得 $\angle A = \angle B$，於是 ΔABC 為等腰三角形。

參、主要結果(溫故創新)

根據上節的觀察及引理 1, 儘量揣摩引理 1 中(參考圖 4)，其精巧技術在於作二條補助線，對於二外角平分線的問題顯然很難想像如何突破。研究發現如果利用相似性質與相似比，引理 1 的補助線 $\overline{GH}$ 是可以不必出現的。經刪除 $\overline{GH}$ 的補助線後，得到更貼切親近的圖 5, 其中令 $\overline{BF}$ 交 $\overline{AE}$ 於 K, 則 K 在 $\overline{AE}$ 的內部，$\overline{AK} < \overline{AE}$ 且 $\Delta AFK \sim \Delta BFD$ (AA 相似)。

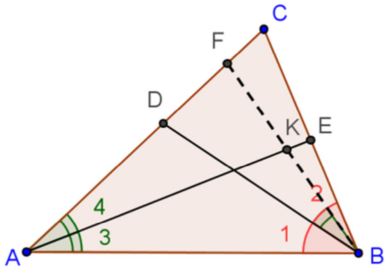


圖 5

由於 $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ 為一組對應邊，且 $\overline{AF} > \overline{BF}$, 於是利用相似比，其另一組對應邊 $\overline{AK}$, $\overline{BD}$ 就有 $\overline{AK} > \overline{BD}$ 的關係，也因而可知 $\overline{AE} > \overline{BD}$.

經過以上的改變上節末引理 1 的證法及其後的三一律，我們就可如法泡製地用列式的規律來解決下面外角平分線不等長或等長的問題了！

先看如下的引理 2.

引理 2： 非正三角形的二外角平分線相交，其交點為一傍心，都在第三邊的同側，則大

的外角平分線較短，小的外角平分線較長。

(以下為方便，ΔABC 中，$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 及 $\overline{CA}$ 之長分別記作 c, a 及 b.)

證法： 已知 ΔABC 中，$\angle A > \angle C$, $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的外角平分線，$\overline{CF}$ 為 $\angle C$ 的外角平分線，且 $\overline{CF}$ 與 $\overline{AD}$ 相交，如圖 6 所示，都在 $\overline{AC}$ 的同側：

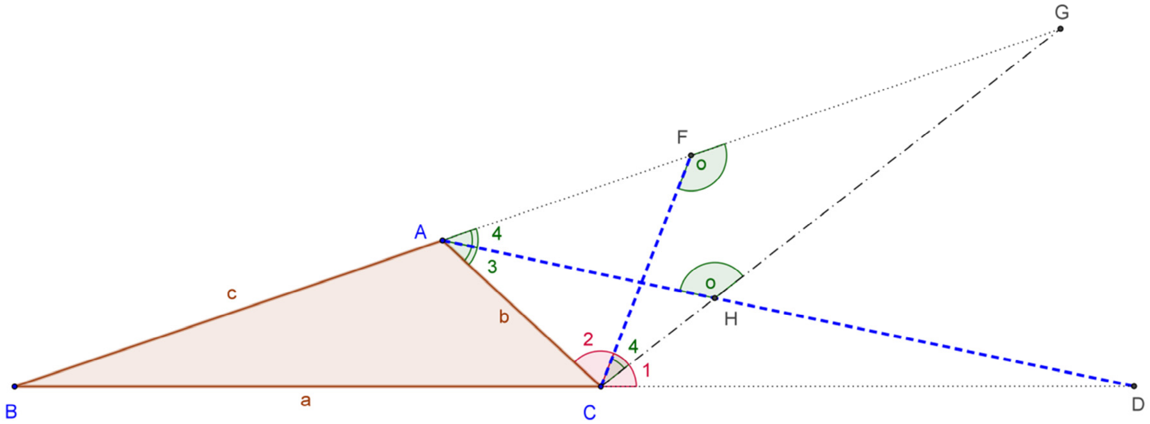


圖 6($a > c > b$)

此時 $a > c > b$，且 $\angle 1 = \angle 2$， $\angle 3 = \angle 4$， $180^{\circ} - \angle C = 2\angle 1$， $180^{\circ} - \angle A = 2\angle 4$.

$\because a > c \Leftrightarrow \angle A > \angle C \Leftrightarrow 180^{\circ} - \angle C > 180^{\circ} - \angle A$

$\therefore \angle 4 < \angle 1$

故可在 $\overline{AF}$ 的延長線上作出 G 點使 $\angle FCG = \angle 4$.

由此得到 ΔACG，再進一步知道：

$\because \angle 2 > \angle 3$， $\angle FCG = \angle 4$,

$\therefore \angle CAG < \angle ACG$,

$\therefore \overline{AG} > \overline{CG}$ (大角對大邊)

設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CG}$ 交於 H,

則 $\Delta AHG \sim \Delta CFG$ (AA 相似).

故 $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CG}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{CF}}$.

又 $\overline{AG} > \overline{CG}$， $\therefore \overline{AH} > \overline{CF}$.

而 $\overline{AD} > \overline{CH}$，故 $\overline{AD} > \overline{CF}$.

即得外角大的平分線長 $\overline{CF}$ 小於外角小的平分線長 $\overline{AD}$.

再看如下的引理 3.

引理 3： 非正三角形的二外角平分線不相交，且與其內心都在第三邊的同側，則大的外角平分線較長，小的外角平分線較短。

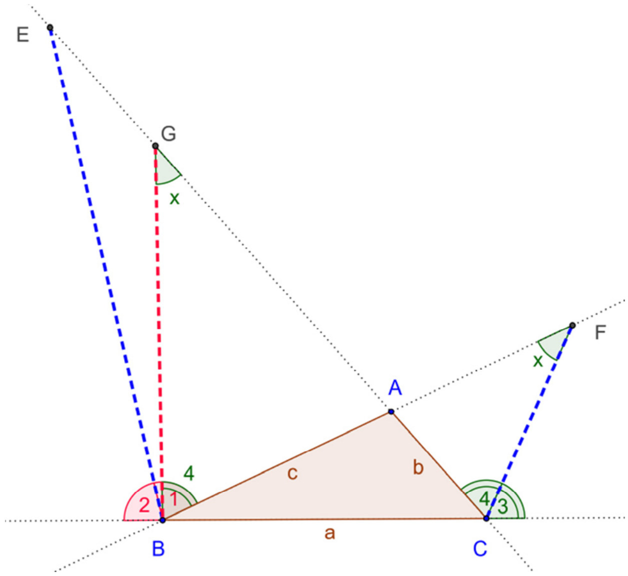


圖 7　$(a>c>b)$

證法： 已知 ΔABC 中，$\angle C>\angle B$, 且 $\overline{BE}$ 為 $\angle B$ 的外角平分線，$\overline{CF}$ 為 $\angle C$的外角平分線，且 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 不相交，且在 $\overline{BC}$ 的同側，如圖 7 所示(此時 $a>c>b$)。

由 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $180^\circ-\angle B=2\angle 1$, $180^\circ-\angle C=2\angle 4$.

$\because \angle C>\angle B \Leftrightarrow 180^\circ-\angle C<180^\circ-\angle B$,

$\therefore \angle 1>\angle 4$.

故可在 $\overline{AE}$ 上作出 G 點使 $\angle GBA=\angle 4$.

$\overline{BG}$ 除了端點外，都完全落在 ΔABE 的內部。如此得

$\angle AGB=\angle F$，且得 $\Delta ABG\sim\Delta ACF$. 而由 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, 且 $c>b\Leftrightarrow\angle C>\angle B$，故另二對應邊 $\overline{BG}$ 與 $\overline{CF}$ 有 $\overline{BG}>\overline{CF}$ 的關係。

又 $\angle F<\angle 3$, $\angle 3<90^\circ$, 故知 $\angle AGB$ 為銳角 $\Leftrightarrow$ $\angle BGE$ 為鈍角。

於是 ΔBGE 中，$\angle BGE$ 為鈍角，故知 $\overline{BE}>\overline{BG}$, 綜合得知 $\overline{BE}>\overline{CF}$. 如此完成引理 3 的證明。

利用引理 2, 3 及三一律，我們就可輕而易舉得到如下的引理 4.

引理 4： 三角形中有等長的二條外角平分線且都在第三邊的同側，則此三角形必為等腰。

證法：因為二條外角平分線有限等長，設其對應的兩邊為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ (類似圖 6)。由假設有等長的二條外角平分線，由引理 2 的結果即知，$\overline{AB}>\overline{BC}$ 與 $\overline{BC}>\overline{AB}$ 均屬不可能，故知 $\overline{AB}=\overline{BC}$；如圖 7，設其對應的兩邊為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$，由引理 3 亦知 $\overline{AB}>\overline{AC}$ 與 $\overline{AC}>\overline{AB}$ 亦屬不可能，故知 $\overline{AB}=\overline{AC}$。合併兩者得 ΔABC 一定是等腰三角形。

最後看引理 5.

引理 5： 三角形有等長的二條外角平分線且在第三邊的不同側，則此三角形必然不是等腰三角形。

<u>證法</u>：由前節對等腰三角形二底角外角平分線都等長且在第三邊同側的觀察，故由假設知，此三角形必然不是等腰三角形。

綜合以上的結果，此綜合幾何間接證法已完成鄭秀行、柏明元的定理(2010):

兩外角平分線在第三邊的同側，且兩外角平分線相等的三角形是等腰三角形；而在第三邊的兩側，且兩外角平分線相等的三角形是非等腰三角形。

肆、結語

事實上，除了觀察、實作或估側外，本文僅用 A4 版面 3-4 頁，透過改變、簡化內外角平分線大小關係之輔助線證法，得以靈巧簡潔的一條輔助線，加上三一律之綜合幾何間接證法，除了改進本人前一篇文章(陳昭地，2013)，更完成大陸學者對於有等長的二條外角平分線是否為等腰三角形，肯定及否定的答案，包括其限制條件。

在當前的中學國民數學教育中，就已熟知三角形的樞紐定理與逆樞紐定理之證法而言，僅需作一條巧妙簡潔的輔助線，易學易懂。一旦精熟掌握其訣竅，以後想忘記這個定理也就難上加難了！期盼國中幾何數學教學時，教師甚或學生能喜歡並欣賞這個幾何間接證法之美妙，進而提昇數學教學的效率或數學學習的興趣與能力。

參考文獻

朱芳儀(2013)。國中生三角形與四邊形的概念心像調查-以基隆某公立國中七至九年級學生為例。(未出版之碩士論文)。臺北市：國立臺灣師範大學。

李虎雄、陳昭地等（2003）。幾何學教師手冊上冊 2 版第 62 頁。臺中市：康熙圖書網路有限公司（2003 年 8 月出版）。

李政豐(2013)。兩外角平分線等長而非等腰三角形的動態幾何實作。國中小數學領域教材原型研討會大會手冊第 142-151 頁。新北市：國家教育研究院臺北院區(2013 年 5 月 22 日)。

陳昭地(2013)，三角形的高、中線、內角平分線及外角平分線之性質探討。國中小數學領域教材原型研討會大會手冊第 133-141 頁。新北市：國家教育研究院臺北院區(2013 年 5 月 22 日)。

傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形(單元主題 3-3)國家教育研究院國中數學領域教材原型 C 冊(下)。新北市：國家教育研究院出版。

鄭秀行、柏明元（2010）。兩外角平分線相等的三角形性質的探討，Vol. 27 No.3, 晉中學院學報（2010 年 6 月出版）。上海：滬西數學研究所。

A.S. Posamentier, J. Stepelman(1986). Unit 45: The Isosceles Triangle Revisited. (pp. 287－289.) In Posamentier, A. S. and Stepelman, J.(Eds) Teaching Secondary School Mathematics (2nd Ed.). Columbus OH: Merrill.