最大水平射程之仰角的簡易推導

黃光照* 蕭志明

臺北市立第一女子高級中學

前言

在物理教學過程中，不考慮空氣阻力下，當我們要計算將拋體距離地面高 h 處，以初速 $\vec{v_0}$ 斜向拋出，欲得最大水平射程的仰角時，有的教師手冊對此避而不談、付之闕如；有的就是藉助於電腦高速運算能力來模擬各種仰角所得的水平射程，再加以作圖分析，進而得出最佳的仰角；更有的僅列出水平射程

$$R(\theta)=(v_0\cos\theta)t$$
$$=\frac{v_0^2\cos\theta\sin\theta+v_0\cos\theta\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gh}}{g}$$

由 $\frac{dR}{d\theta}=0$，便信手寫出

$\sin\theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{v_0^2}\right)}}$，且最大水平射程

$R_m=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}$，完全交代不清。說真的，其推導過程真是繁到不行，可參考本文附錄一的詳細推導過程。因此，作者想在此提供 2 種較為簡易的方法，供國內的高中物理教師參考，其中一種方法，更早在 1985 年即由 W. M. Young 提出，僅用幾何關係便可快速得出上述結果。

*為本文通訊作者

壹、由微分極值概念得出結果

由 $h+v_0\sin\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2=0$ ……… (1)

將(1)式兩邊微分(d 表微分)

$\Rightarrow dh+v_0 d(\sin\theta\, t)-d(\frac{1}{2}gt^2)=0$

$\because h$ 為常數 $\therefore dh=0$

$\Rightarrow v_0\cos\theta\, t d\theta+v_0\sin\theta dt-gtdt=0$

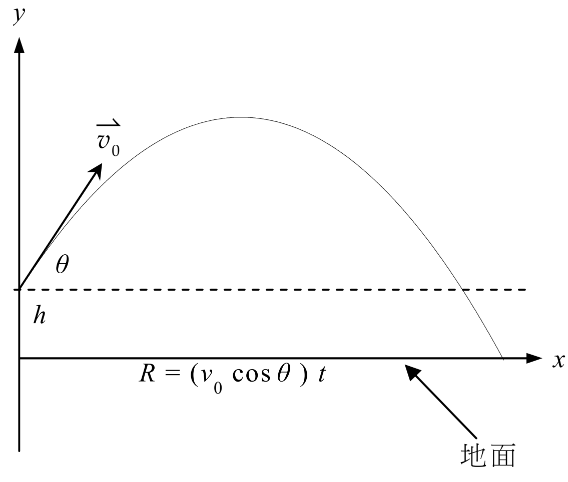
$\frac{d\theta}{dt}=\frac{gt-v_0\sin\theta}{v_0\cos\theta\, t}$ ………………(2)

因水平射程 $R=v_0\cos\theta t$，要求最大值，故

$dR=0$

$\Rightarrow dR=-v_0 t\sin\theta\, d\theta+v_0\cos\theta\, dt=0$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta\, t}$ ………………………(3)



圖一、考慮高度 h 時的斜拋

由(2)、(3)式⇨ $t=\dfrac{v_o}{g\sin\theta_m}$ …………(4)

將(4)式代入(1)式，得

$$\sin\theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{gh}{v_0^{\ 2}}\right)}}\ \text{…………..(5)}$$

推得最大水平射程

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{m}}&=v_0\cos\theta_m t\\&=v_0\cos\theta_m\times\frac{v_o}{g\sin\theta_m}\\&=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}\end{aligned}\ \text{………… (6)}$$

貳、由簡易幾何關係得出結果

不計空氣阻力下，力學能是守恆的，設落地瞬間速度為 $\vec{v}$，得知：在 v_0、h 固定下，$|\vec{v}|=v$ 亦為定值。

$$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2+2gh}\ \text{…………………(7)}$$

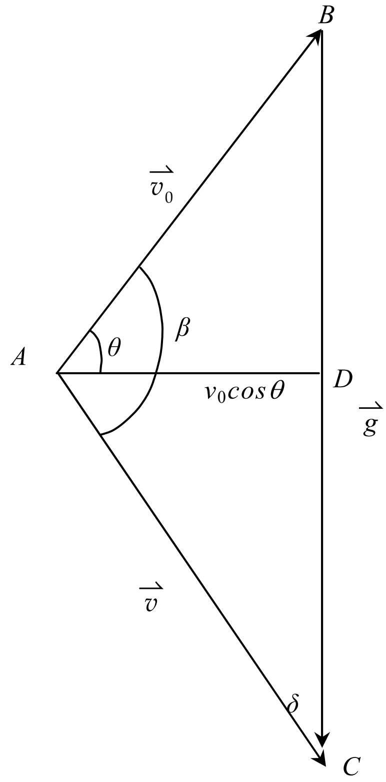
今做速度向量圖如下，注意圖中的初速 $\vec{v}_0$ 和末速 $\vec{v}$ 的量值均為確定，但是方向未定。

水平射程為

$$R=v_0\cos\theta t=\frac{2}{\mathrm{g}}(\frac{1}{2}\bullet\mathrm{gt}\bullet v_0\cos\theta)=\frac{2}{\mathrm{g}}\Delta\mathrm{ABC}$$

欲使 R 為最大值，則三角形 ABC 面積需為最大。三角形 ABC 面積又可寫為

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}vv_0\sin\beta\text{…………………(8)}$$



圖二、速度向量圖

注意到 v_0 和 v 的量值都是固定，故知當 $\beta=90°$時，ΔABC 為最大，此時$\Delta ABC=\frac{1}{2}vv_0$($\beta=90°$的意思是發射的初速度與著地的末速度兩者方向要互相垂直)。於是，得

$$R_{\mathrm{m}}=\frac{v_0v}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}\ \text{…………….(9)}$$

又由圖二，當 $\beta=90°$時，$\delta=\theta$，因而，欲得 R_{m}，拋射的最佳仰角 θ_m，其正弦值為

$$\begin{aligned}\sin\theta_m&=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+v^2}}=\frac{v_0}{\sqrt{2v_0^2+2gh}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{gh}{v_0^{\ 2}}\right)}}\end{aligned}\ \text{…….(10)}$$

參、結論

當不考慮空氣阻力且拋體離地面高 h 處，以初速 v_0 斜向拋出，欲得最大水平射程時，當落地時速度垂直於發射初速，即 $\vec{v}\perp\vec{v_0}$ 時，其水平射程為最遠，其最佳的仰角 θ_m 為

$$\sin\theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{v_0^2}\right)}}$$

最大的水平射程為

$$R_m=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}$$ 。

參考文獻

賴樹聲，大學物理學(上冊)，六版，台北，鄂圖曼出版社，ch5，民 61。

W.M.Young, Maximizing the range of the shot put using a simple geometrical approach. Am. J. Phys. 53, 84(1985).

附錄一

$$R(\theta)=\frac{v_0^2\cos\theta\sin\theta+v_0\cos\theta\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gh}}{g}$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\left[\cos\theta(\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta+\frac{2gh}{v_0^2}})\right]$$

求R的極大值。

設 $\alpha=\frac{2gh}{v_0^2}$；

$$A_0=\left[\cos\theta\,(\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta+\frac{2gh}{v_0^2}})\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dA_0}{d\theta}=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+\alpha}$$

$$+\cos\theta\,\frac{\frac{1}{2}\times2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\alpha}}$$

$$=1-2\sin^2\theta-\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+\alpha}$$

$$+\frac{\sin\theta\,(1-\sin^2\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta+\alpha}}$$ -----設 $\sin\theta=x$

$$=1-2x^2-x\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2+\alpha}}=0$$

$$\Rightarrow\frac{(1-2x^2)\sqrt{x^2+\alpha}-x(x^2+\alpha)+x(1-x^2)}{\sqrt{x^2+\alpha}}=0$$

分母 $\neq0$

$$\Rightarrow(1-2x^2)\sqrt{x^2+\alpha}=x(2x^2+\alpha-1)=x\left[(2x^2-1)+\alpha\right]$$

$$\Rightarrow\alpha(1-2x^2)^2-2\alpha x^2(2x^2-1)-\alpha^2x^2=0$$

$$\Rightarrow(\alpha+2)x^2=1$$

$$\Rightarrow x=\sin\theta_m=\sqrt{\frac{1}{\alpha+2}}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{v_0^2}\right)}}$$

此時的最大水平射程

$$R_m=\frac{v_0^2}{g}\left[\cos\theta_m\,(\sin\theta_m+\sqrt{\sin^2\theta_m+\frac{2gh}{v_0^2}})\right]$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\left[\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\,(\sqrt{\frac{1}{\alpha+2}}+\sqrt{\frac{1}{\alpha+2}+\alpha})\right]$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\frac{\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+2}=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\alpha+1}$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}$$