使用高中數學證明「三稜鏡的最小偏向角」

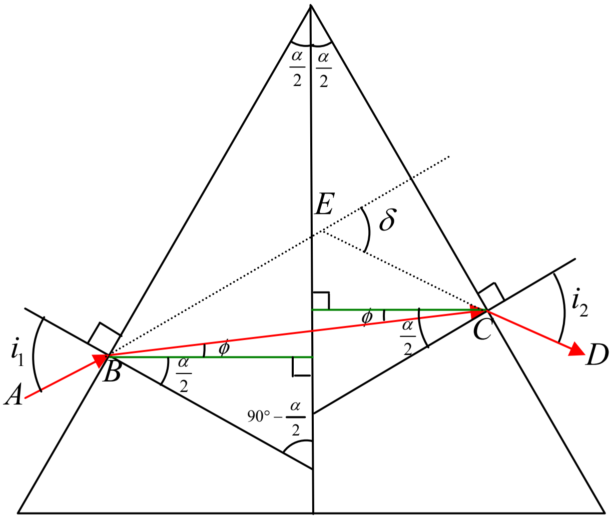
陳昊維 [1] 陳清風 [2*]
[1] 國立武陵高級中學
[2] 國立桃園高級中學

壹、前言

『三稜鏡的偏向角』是高中選修物理上冊的教學內容，學到這個單元時，很自然的會想知道：什麼條件下偏向角會最小？老師說這超過課程範圍，沒多說；查閱參考書雖有公式，但沒證明也沒說明。轉而查閱大學的普通物理，在所查到的書籍中，都是利用三角微分法來證明的，但這方法不適用於一般高中生。本文將試著用高中生可以看得懂的方法證明這個公式，希望對高中物理教材的加深加廣有些助益。

貳、最小偏向角

有一頂角為 α，折射率為 $n\left(n>1\right)$ 的三稜鏡，光線以入射角 $i_1\left(0\le i_1<90°\right)$ 射進此三稜鏡的第一個折射面，再從第二個折射面以折射角 $i_2\left(0\le i_2<90°\right)$ 射出，如下圖所示。若第二個折射光 CD 方向與原入射光 AB 方向所夾的角度稱為偏向角，以 δ 表示，則當光徑左右對稱，即入射角 i_1 與第二個折射角 i_2 相等時，偏向角 δ 有一最小值 δ_m，稱為稜鏡的最小偏向角，證明如下：



如上圖，分別過 B 與 C 兩點作頂角平分線的垂線。利用三角形三內角和為 180°，可得知這兩垂線與法線的夾角皆為 $\dfrac{\alpha}{2}$。設過 B 的垂線與光線 BC 的夾角為 $\phi\left(0\le\phi<\dfrac{\alpha}{2}\right)$，則由對頂角相等，得知過 C 的垂線與光線 BC 的夾角亦為 ϕ。因為 δ 為 ΔEBC 的外角，所以

$$\begin{aligned}\delta &= \angle EBC+\angle ECB\\ &=\left(i_1-\left(\frac{\alpha}{2}+\phi\right)\right)+\left(i_2-\left(\frac{\alpha}{2}-\phi\right)\right)\\ &=i_1+i_2-\alpha\,.\end{aligned}$$

因此，當 i_1+i_2 最小時，偏向角 δ 有最小值。那在什麼條件下，i_1+i_2 有最小值呢？

*為本文通訊作者

根據司乃耳定律（空氣的折射率為 1)，得

$$\begin{cases}\sin i_1 = n\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\phi\right)\\ \sin i_2 = n\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\phi\right)\end{cases} \quad \ldots\ldots①$$

因為 $n>1$，所以

$$\begin{cases}\sin i_1 > \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\phi\right)\\ \sin i_2 > \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\phi\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}i_1 > \dfrac{\alpha}{2}+\phi\\ i_2 > \dfrac{\alpha}{2}-\phi\end{cases}$$

兩式相加，得 $i_1+i_2>\alpha$，即

$$\frac{i_1+i_2}{2} > \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots②$$

將①式中的兩式相減，得

$$\sin i_1 - \sin i_2 = n\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\phi\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\phi\right)\right).$$

利用和差化積公式，將上式改寫為

$$2\cos\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right)\sin\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)=n\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\phi\right)\ldots.③$$

再將①式中的兩式相加，得

$$\sin i_1 + \sin i_2 = n\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\phi\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\phi\right)\right)$$

利用和差化積公式，將上式改寫為

$$2\sin\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right)\cos\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)=n\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\right)\ldots④$$

由②式，得知 $0<\cos\left(\dfrac{i_1+i_2}{2}\right)<\cos\dfrac{\alpha}{2}$。

再由③式可得，

$$\sin\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)=\frac{2n\cos\frac{\alpha}{2}\sin\phi}{2\cos\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right)}>\frac{2n\cos\frac{\alpha}{2}\sin\phi}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=n\sin\phi$$

即 $\sin\left(\dfrac{i_1-i_2}{2}\right)>n\sin\phi$。

(1) 當 $\phi\neq 0$，即 $0<\phi<\dfrac{\alpha}{2}$時，因為 $0<\sin\phi<1$，所以 $n\sin\phi>\sin\phi$。因此由上式，得

$$\sin\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)>\sin\phi,$$

於是$\dfrac{i_1-i_2}{2}>\phi$，再推得

$$0<\cos\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)<\cos\phi.$$

此時，由④式可得，

$$\sin\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right)=\frac{2n\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi}{2\cos\left(\frac{i_1-i_2}{2}\right)}>\frac{2n\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi}{2\cos\phi}$$

$$=n\sin\frac{\alpha}{2}$$

即 $\sin\left(\dfrac{i_1+i_2}{2}\right)>n\sin\dfrac{\alpha}{2}$。

(2) 當 $\phi=0$，即 $\sin\phi=0$ 時，由③式及 $\cos\left(\dfrac{i_1+i_2}{2}\right)\neq 0$，得 $\sin\left(\dfrac{i_1-i_2}{2}\right)=0$，即

$$\frac{i_1-i_2}{2}=0。$$

代入④式，得

$$2\sin\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right)\cos 0=n\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 0\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{i_1+i_2}{2}=n\sin\frac{\alpha}{2}。$$

綜合(1)(2)，得知：當 $\phi=0$時，$\sin\dfrac{i_1+i_2}{2}$ 有

最小值 $n\sin\frac{\alpha}{2}$。因為 0° 到 90° 的正弦值是遞增的，所以此時角度 i_1+i_2 也會有最小值。再由(2)得知，此時

$$i_1 = i_2 \text{ 且 } \sin i_1 = n\sin\frac{\alpha}{2}\text{。}$$

因此，當 $i_1 = i_2$ 時，偏向角 $\delta = i_1 + i_2 - \alpha$ 有最小值，且此最小值為

$$\delta_m = 2i_1 - \alpha = 2\sin^{-1}\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha\text{，}$$

我們稱這最小值為最小偏向角。

實驗上，若入射角 i_1 等於第二個折射角 i_2，則可以利用最小偏向角公式，求得頂角為 α 的三稜鏡之折射率 n：

因為此時的偏向角為最小偏向角

$\delta_m = 2i_1 - \alpha$，且 $\sin i_1 = n\sin\frac{\alpha}{2}$，所以

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m+\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\text{。}$$

參、後記

由於現行高中數學課綱簡化，有些物理上的重要特性(可能不在高中物理課綱中)，只要改變以往的證法，高中生是可以理解的。希望本文能有拋磚引玉的效果，引出更多類似的文章，減輕物理教師準備加深加廣課程時的負擔；也可提供給有興趣的高中生，延伸教材時的參考。

參考文獻

許志農主編(2012)：高中數學第三冊。新北市：龍騰文化。

傅昭銘、陳義裕主編(2012)：高中選修物理上冊。台南市：南一書局。

李佳榮、莫定山、陳宗煒編譯(2006)：物理(下)(第 7 版)。台北市：全華科技圖書。