已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式

阮瑞泰

高雄市立新莊高級中學

壹、前言

在高中教材中有「已知三角形的三邊長的面積公式」,「已知三角形三頂點的面積公式」等作法求三角形的面積，若條件為已知三角形三邊所在直線方程式，則常見的作法為先求三頂點,再利用「已知三角形三頂點的面積公式」來求面積，本文中利用高中所習的概念，討論直接利用三邊所在直線方程式的條件來求面積。

貳、「已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式」的推論過程說明：

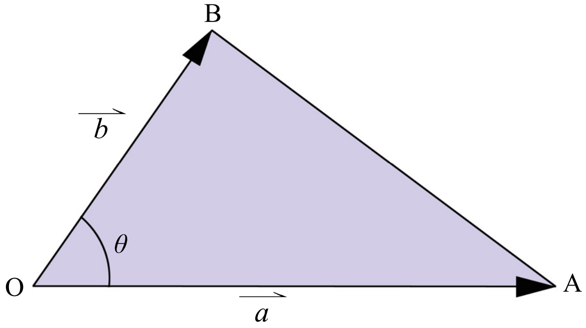
一、首先複習「已知三角形兩鄰邊向量的面積公式」，與「已知三角形三頂點坐標之面積公式」。

公式一：

已知平面上不平行的兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

則由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所展開的 ΔOAB 面積為 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 之絕對值

說明：設 ΔOAB 的面積為 S，則



$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$$ （如右圖）

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta}$$ （$\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$）

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$ （將 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 代入）

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2)-(a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2)^2-2a_1b_2a_2b_1+(a_2b_1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|。$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\text{之絕對值}$$

若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow(x_2-x_1,y_2-y_1)=(a_1,a_2)$ ，

$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(x_3-x_1,y_3-y_1)=(b_1,b_2)$ ，代入

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\text{之絕對值，}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\text{之絕對值}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{之絕對值}$$

即可得已知三角形三點之面積公式（公式如下）

公式二：

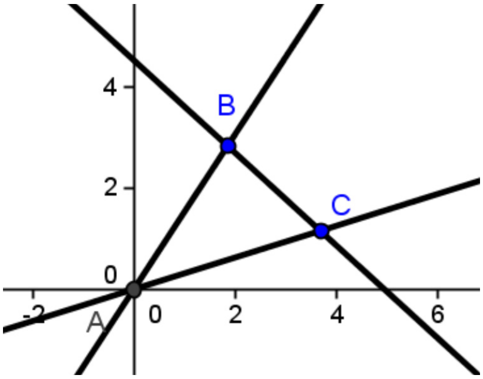
已知平面上不共線的三點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ ，

則 ΔABC的面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ 之絕對值

二、探討已知 ΔABC 三邊所在直線方程式的三角形面積

(一) 首先討論頂點 A(0,0)的情形：

已知三直線 $L_{AB}:a_1x+b_1y=0$ ， $L_{AC}:a_2x+b_2y=0$ ， $L_{BC}:a_3x+b_3y=c_3$



如上圖：此三直線分別交於 A，B，C 三點，由克拉碼公式得知

$A(0,0), B\left(\dfrac{-b_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \dfrac{a_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}\right), C\left(\dfrac{-b_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \dfrac{a_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}\right)$，利用公式一

可得 ΔABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{-b_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} & \dfrac{a_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \\ \dfrac{-b_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} & \dfrac{a_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \end{vmatrix}$ 之絕對值。

其中 $\begin{vmatrix} \dfrac{-b_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} & \dfrac{a_1c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \\ \dfrac{-b_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} & \dfrac{a_2c_3}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \end{vmatrix} = \dfrac{{c_3}^2 \bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$ （∵ 分子，分母同乘 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$），

（$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$） $= \dfrac{-\left(c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$

經運算後可得以下公式

公式三：

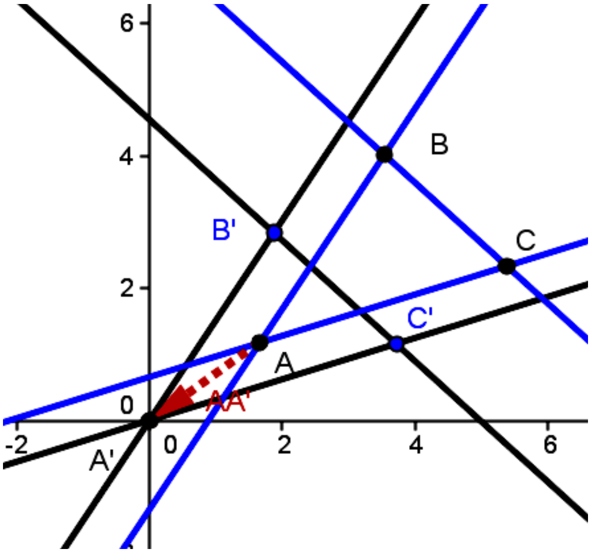
已知三直線 $L_{AB}: a_1x + b_1y = 0$， $L_{AC}: a_2x + b_2y = 0$， $L_{BC}: a_3x + b_3y = c_3$

交於 A,B,C 三點，則

ΔABC的面積為 $\frac{1}{2}\dfrac{\left(c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$ 之絕對值

（二）討論一般的情形：

已知三直線 $L_{AB}: a_1x+b_1y=c_1$ ， $L_{AC}: a_2x+b_2y=c_2$ ， $L_{BC}: a_3x+b_3y=c_3$



分別交於 A，B，C 三點，如上圖，由克拉碼公式得知 $A\left(\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right)$ ，

利用平移的概念，將點 A 平移至原點 A'，則得三直線

$L'_{AB}: a_1x+b_1y=0$ ， $L'_{AC}: a_2x+b_2y=0$ ， $L'_{BC}: a_3x+b_3y=c_3-a_3\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}-b_3\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$

與三頂點 A', B', C' ，此時 ΔA'B'C'的面積＝ΔABC的面積，利用公式三，

可得 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\frac{\{(c_3-a_3\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}-b_3\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}})\bullet\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$ 之絕對值。

其中 $\frac{\{(c_3-a_3\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}-b_3\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}})\bullet\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}=\frac{(c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}-a_3\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix})^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$

$$=\frac{(a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix})^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$$

所以得 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$ 之絕對值，

即得以下公式四

公式四：

已知 ΔABC 三邊所在的三直線 $L_{AB}: a_1x+b_1y=c_1$ ， $L_{AC}: a_2x+b_2y=c_2$ ， $L_{BC}: a_3x+b_3y=c_3$

則 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$ 之絕對值

討論公式四中的特例： $c_1=c_2=0$ 即為公式三

參、練習題

已知三直線 $L_1: x+y=1$，$L_2: x-y=1$，$L_3: x+2y=4$ 圍成一個 ΔABC，則 ΔABC 的面積為何？

解法一：

求 ΔABC 的頂點坐標為 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0)$

$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,1)$

$\begin{cases} x+2y=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-2,3)$

利用公式二可得 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 之絕對值為 3

解法二：

利用公式四

可得 ΔABC 的面積為 $=\dfrac{1}{2}\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ 之絕對值為 3

後語：提供一種不同的作法供同學們參考比較，並感謝楊朝凱老師的意見。