轉彎比較快嗎?

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

記得幾年前，在教科書（或教科書出版社的刊物、參考書等）常常看到這樣一個問題：一質點以初速 v_0 在兩個不同光滑軌道上運動，一個是直線軌道，另一個是在直線軌道的途中經過一段圓弧軌道，如圖 1 所示，則那一個軌道可以使質點比較快到達終點 C？

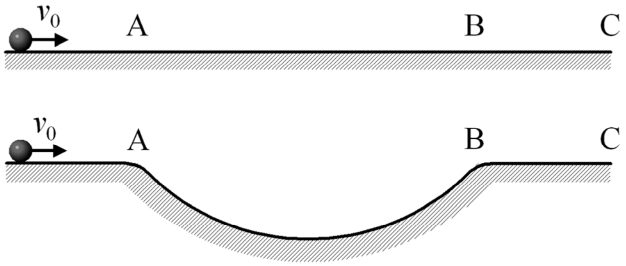


圖 1、直線軌道與圓弧軌道

聽說這個問題也是大學端在篩選高中生經由繁星推甄和申請管道時口試的熱門問題。當年那些出版品在分析這個問題時，大多是認為質點在下滑過程中，速率總是大於 v_0，且軌道上切線方向的加速度在水平方向的分量不為零，致使在整個下滑過程中，水平速率 v_x 一直大於 v_0，如圖 2 所示，所以沿著圓弧軌道的質點會比較快到達終點。

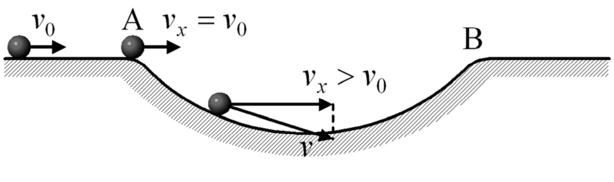


圖 2、圓弧軌道上水平方向速率的分析

乍聽之下，上述的論點似乎言之成理，但仔細想想卻又不得不懷疑這個說法的正確性。試想，質點剛從 A 點進入圓弧軌道時（假設質點不會脫離軌道），由於法線方向上的加速度使得質點運動方向大幅改變，但因為高度下降不多，所以速率變化不大，此時水平方向速率 v_x 必會小於 v_0，應該不是上述的「v_x 一直大於 v_0」。雖然質疑上述的論點，但要證明那一個軌道可以比較快到達終點卻不容易；不過我們卻可以用舉例反證的方式，推論上述分析的結論，的確是有待商榷。

如果我們給定幾個數字，再利用力學能守恆，應該就可以輕易的得到反證的例子。例如圓弧軌道恰好是半個圓，如圖 3 所示，此時沿著直線軌道和圓弧軌道的路徑長分別為 $2R$、πR，即圓弧軌道的路徑長是直線軌道的 $\frac{\pi}{2}$ 倍（約 1.57 倍）；假如初速 $v_0 = 10$ m/s、圓半徑 $R = 1$ m、重力加速度 $g = 10$ m/s^2，則質點在最低點的速率為

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + 2gR} = \sqrt{10^2 + 2 \times 10 \times 1} \approx 11\,(\text{m/s})$$

因此從 A 點下滑到最低點的平均速率必落在 10 m/s＜v＜11 m/s 的區間（因為圓弧左右兩邊速率對稱，所以從最低點上滑到 B 點的平均速率也是如此），換句話說，這個例子中沿圓弧軌道的平均速率最多只是直線軌道的 1.1 倍，然而路徑長卻是 1.57 倍，故沿著圓弧軌道的運動時間必大於沿直線軌道的運動時間。

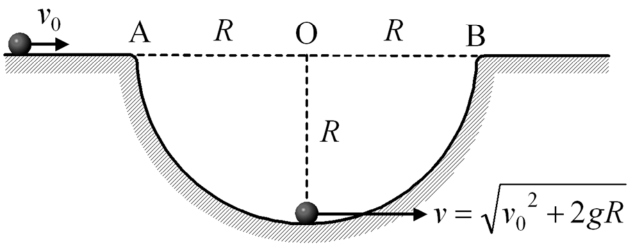


圖 3、圓弧軌道恰好是半個圓的情形

其次，我們也可以用更嚴謹的數學計算沿圓弧軌道的運動時間。如圖 4 所示，AB 圓弧的圓心為 O 點，圓弧的半徑為 R，質點初速 v_0、$\overline{AB} = 2\ell$、AB 圓弧所張開的圓心角為 $2\theta_0$，當質點的位置在軌道上任意點時，其速率 v 符合力學能守恆定律，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

上式中的 θ 為質點位置和 O 點的連線與通過 O 點的鉛直線所張開的角度。因此質點在任意點時的速率為

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + 2gR(\cos\theta - \cos\theta_0)} \qquad (1)$$

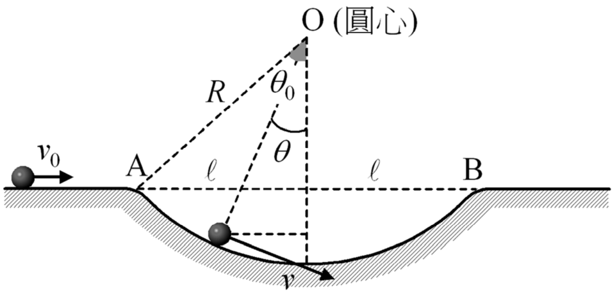


圖 4、圓弧軌道上各物理量的分析

另外，在圓周上移動一小段路徑 ds 和所需時間 dt 的關係為

$$ds = Rd\theta = \frac{\ell}{\sin\theta_0} d\theta = vdt \qquad (2)$$

將第(1)式代入第(2)式後化簡得

$$dt = \frac{\ell}{v\sin\theta_0} d\theta = \frac{\ell}{\sqrt{(v_0\sin\theta_0)^2 + 2g\ell\sin\theta_0(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta \qquad (3)$$

因此質點以初速 v_0 從 A 點滑至最低點的時間為

$$t = \int_0^{\theta_0} \frac{\ell}{\sqrt{(v_0\sin\theta_0)^2 + 2g\ell\sin\theta_0(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta = \int_0^{\theta_0} f(\theta) d\theta \qquad (4)$$

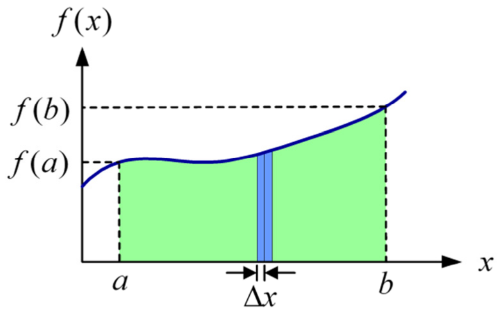


圖 5、梯形法則的數值積分

至於第(4)式該如何積分，其實在高中物理教科書中，如運動學中的位移、衝量－動量定理中的衝量計算、功的計算等，大都有提到梯形法則（Trapezoidal Rule）的方式，如圖 5 所示。函數 $f(x)$在區間 [a , b] 中積分的值 F 可利用無數多個梯形面積相加而得，即

$$F = \int_a^b f(x)dx = \left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2}\Delta x\right] + \left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Delta x\right] + \cdots + \left[\frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\Delta x\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\cdots\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right] \ldots\ldots(5)$$

其中 n 代表將積分區間 [a , b] n 等分，故 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 、 $x_i = a + i\Delta x = a + \frac{b-a}{n} i$ ，$f(a)$、$f(b)$、$f(x_i)$即為第(4)式中 $f(\theta)$函數的值。第(5)式的值和 n 值有關，n 值愈大理論上愈接近真正的積分值，為了增大 n 值，於是我們將第(5)式寫進程式裡作數值積分，利用電腦幫

我們作大量的運算。以 Visual Basic 6.0 程式語言為例，程式碼可編寫如下：

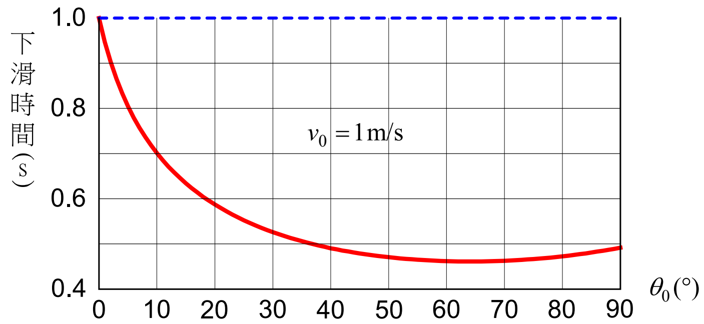
```
Private Sub Form_Click()
Dim pi As Double      'pi : π
Dim ITGL As Double      'ITGL： 積分值
pi = 4 * Atn(1#)
'底下 6 行為輸入的數據
g = 10   'g： 重力加速度
L = 1         'L : AB 直線距離的一半
v0 = 2        'v0： 初速
a0 = 0        'a0： 積分下限(0°)
b0 = 30      'b0 = thita0： 積分上限(angle)
n = 50000       'n： 積分區間共 n 等分
chan = pi / 180           'chan： 角度變弧度的常數
a = a0 * chan             'a： 積分下限(rad)
b = b0 * chan             'b = thita0： 積分上限(rad)
f0 = (b - a) / n                     'f0： 梯形法則常數
s0 = Sin(b)
c0 = Cos(b)
fx0 = IntegralS(a, L, g, v0, s0, c0)       'IntegralS(x, L, g, v0, s0, c0)： 積分函數
fxn = IntegralS(b, L, g, v0, s0, c0)
S = 0
For h = 1 To (n - 1)
x = a + f0 * h
fx = IntegralS(x, L, g, v0, s0, c0)
S = S + fx
Next h
ITGL = f0 * (0.5 * (fx0 + fxn) + S)
Print n
Print ITGL
End Sub
'副程式
Public Function IntegralS(ByVal x As Double, ByVal L As Double, ByVal g As Double, ByVal
v0 As Double, ByVal s0 As Double, ByVal c0 As Double) As Double
IntegralS = L / ((v0 * s0) ^ 2 + 2 * g * L * s0 * (Cos(x) - c0)) ^ 0.5
End Function
```

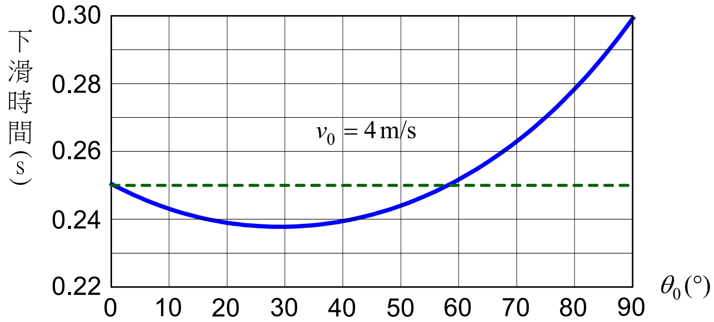
我們可以直接從程式碼檢驗底下所作的數值運算是否正確。為了要讓程式正確無誤，通常的做法是將副程式中的運算式改為大家都耳熟能詳的函數做測試，例如正弦或餘弦函數，也就是把「L / ((v0 * s0) ^ 2 + 2 * g * L * s0 * (Cos(x) - c0)) ^ 0.5」改成「Sin(x)」或「Cos(x)」，並將積分上限改為 π ，其運算結果如表 1。

表 1、正弦和餘弦函數的數值積分

n 值	$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$ 積分值	$\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta$ 積分值
50000	1.99999999934204	4.0603×10^{-16}
5000000	1.99999999999995	4.7521×10^{-17}

表 1 的數據很符合正弦和餘弦函數積分的結果，因此我們應該可以信任此數值積分程式的正確性。若要對第(4)式作數值積分，就須給定一些常數值，例如給定 $\overline{AB}=2\,\mathrm{m}$（即 $\ell=1\,\mathrm{m}$）、重力加速度 $g=10$ m/s^2，初速 $v_0=1$ m/s、4 m/s、10 m/s 的積分結果如圖 6 所示。其中縱軸為質點以初速 v_0 從 A 點下滑至最低點的時間，橫軸 θ_0 為 AB 圓弧所張開圓心角的一半，最大取至 90°。若 $\theta_0=0°$，則對應的軌跡為直線，也就是 $\theta_0=0°$所對應的數據即為質點沿直線軌跡移動 $\frac{\overline{AB}}{2}$ 的運動時間；若 $\theta_0=90°$，則圓弧軌跡為圖 3 所示的形狀。





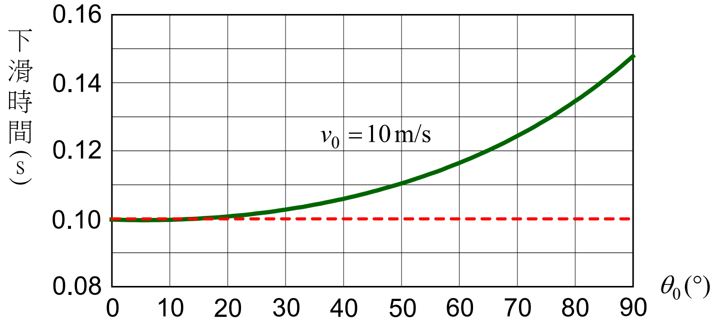
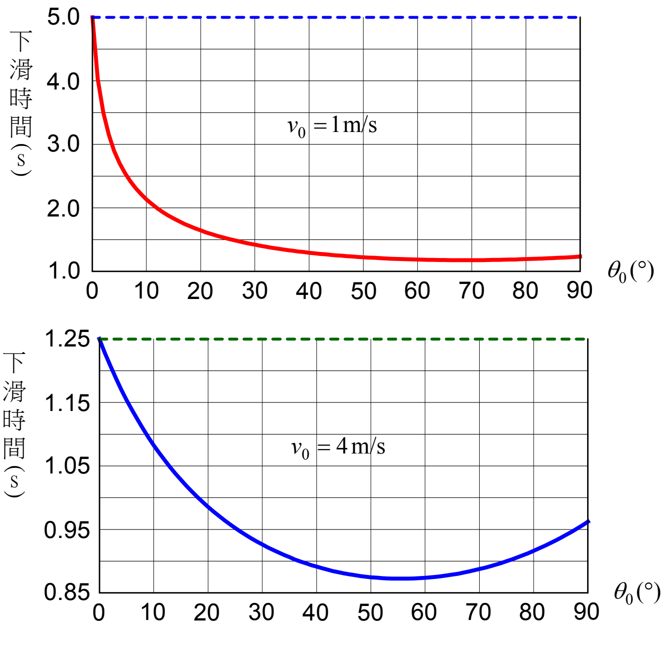


圖 6、下滑時間與 θ_0 的關係曲線（$\ell = 1$ m）

對於 $v_0 = 10$ m/s 的數據圖中，$\theta_0 = 90°$所對應的數據（$t \approx 0.148$ 秒）就是前面所提到的反證例子。在此例中所推論的下滑時間應該比直線軌跡的時間還長，且介於直線軌跡運動時間的 1.43 倍（1.57 / 1.1≒1.43）到 1.57 倍之間，而數據圖中所顯示的是 1.48 倍（0.148 / 0.10＝1.48），符合當時推論的結果。

另外我們也可以在圖 6 中發現到，當初速較小時，沿著圓弧軌跡的下滑時間就很有可能比直線軌跡的時間還短；若初速較大時，沿著圓弧軌跡的下滑時間就很有可能比直線軌跡的時間還長。為了更清楚了解其他變數對下滑時間的影響，於是我們把 ℓ 由 1 m 改成 5 m，而其他條件不變時所得的積分結果如圖 7 所示。從圖 6 和圖 7 的分析來看，在初速較小和 $\overline{AB}$ 的長度較大的情況下，沿圓弧軌道下滑時間比較短的機率會提高；反之，則機率會降低。不過，這純粹只是初步的機率性判斷，意思就是由 v_0 和 ℓ 的關係，並無法百分之一百確定沿那一種軌道的運動時間會較短。



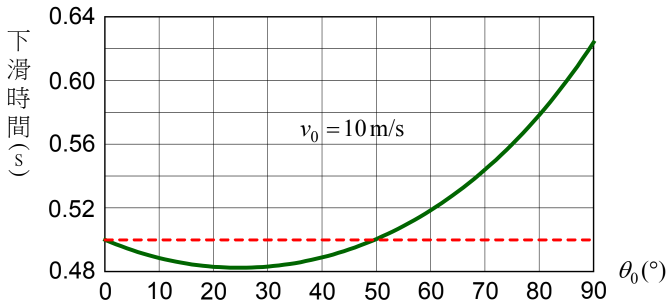


圖 7、下滑時間與 θ_0 的關係曲線（$\ell = 5\,\mathrm{m}$）

至於在甚麼條件下，沿著圓弧軌道的下滑時間確定會比沿直線運動的時間還短呢？答案就是當 θ_0 趨近於零的時候。前面我們提到過，質點剛從 A 點進入圓弧軌道時，由於運動方向的改變，使得質點在軌道上的水平方向速率 v_x 會小於 v_0，若是進入圓弧軌道時的 v_x 比 v_0 小很多時，要判斷何者先抵達終點就會很困難；但若是 θ_0 趨近於零，則進入圓弧軌道時質點的運動方向變化非常小，且 $v_x \approx v_0$，在下滑過程中 v_x 逐漸變大，如此就可以說沿著圓弧軌道的質點一定會先抵達終點。這個論點從圖 6 和圖 7 的結果也可以看得出來，不論是圖 6 或圖 7，在 θ_0 很小的時候，沿著圓弧軌道的運動時間都是比較短的，即使是圖 6 最下方的圖形，在 θ_0 很小的時候看起來並非如此，不過實際的數據顯示，在 $\theta_0 \le 11°$ 時，它的下滑時間是小於 0.10 秒。

但是我們可能想到的是，圓弧軌道的兩端點處（A 點和 B 點）曲率半徑非常小，在速度（或加速度）這個物理量可能有呈現不連續的疑慮。於是，我們採用餘弦函數的軌道，使得直線和曲線的接軌處變得很平滑，如圖 8 所示。$\overline{AB}$ 為餘弦函數的週期，大小為 2π，R 為餘弦的振幅，圖中 x' 軸為餘弦函數振動的中央軸，而 x 軸則為 x' 軸往上平移一個振幅 R 之後的坐標軸（單位為弧度），因此軌道在 xy 坐標中的方程式應為

$$y = y' - R = R\cos x' - R = R\cos x - R = R(\cos x - 1) \qquad (6)$$

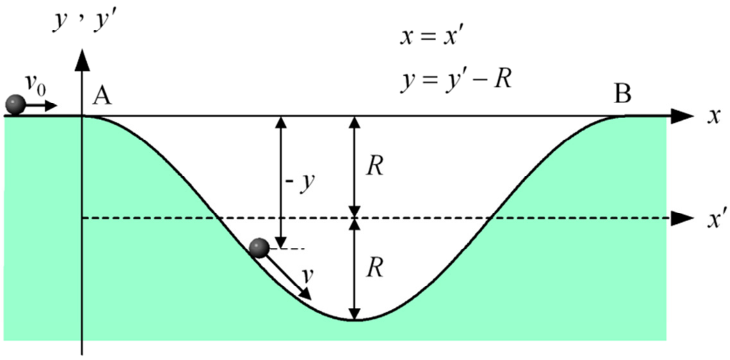


圖 8、餘弦函數軌道上各物理量的分析

當質點在 x 軸上以初速 v_0 從 A 點進入餘弦函數的軌道時，質點在軌道上任意點的速率 v 符合力學能守恆定律，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mg(-y) = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgR(1-\cos x)$$

故質點在軌道上任意點時的速率為

$$v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gR(1-\cos x)} \qquad (7)$$

由於軌道上一小段路徑長 ds 為

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (-R\sin x dx)^2} = \sqrt{(1+R^2\sin^2 x)}\ dx \qquad (8)$$

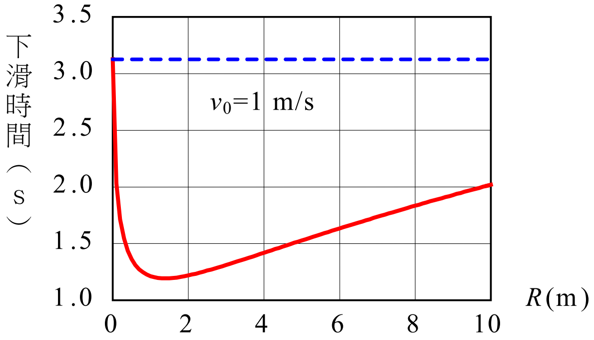
因此質點在軌道上移動一小段路徑長 ds 所需的時間為

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(1+R^2\sin^2 x)}\ dx}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gR(1-\cos x)}} = \sqrt{\frac{1+R^2\sin^2 x}{v_0{}^2 + 2gR(1-\cos x)}}\ dx \qquad (9)$$

上式可得質點以初速 v_0 從 A 點滑至最低點的時間為

$$t = \int dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+R^2\sin^2 x}{v_0{}^2 + 2gR(1-\cos x)}}\ dx \qquad (10)$$

當我們對第(10)式作數值積分時，也須給定常數值，例如重力加速度 $g = 10$ m/s^2，初速 $v_0 = 1$ m/s、4 m/s、10 m/s 的積分結果如圖 9 所示。其中縱軸為質點以初速 v_0 從 A 點下滑至最低點的時間，橫軸 R 為餘弦函數的振幅，$R = 0$ 時所對應的數據為質點沿直線軌道的運動時間。從圖 9 來看，v_0 和 R 都較小的情況下，沿著餘弦軌道下滑時間比較短的機率會相對提高；然而從圓弧軌道的運動分析來推論，v_0 並不是決定性的條件，而是餘弦軌道的振幅 R。也就是說，當 R 趨近於零的時候，質點在軌道上任意位置的水平速率 v_x 幾乎都會大於 v_0，而在這種條件之下，我們就可以很肯定地確認，沿著餘弦軌道的下滑時間一定會比沿直線運動的時間還短。



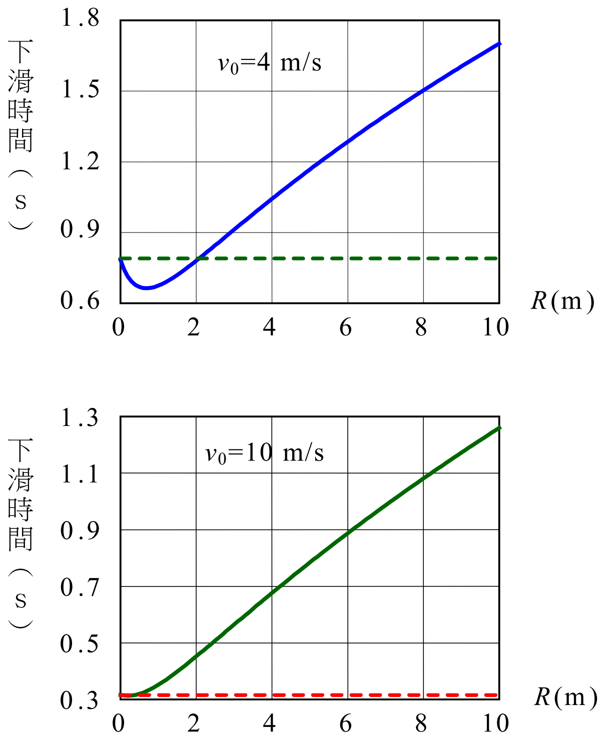


圖 9、下滑時間與振幅 R 的關係曲線

最後，我也不免俗的對學生做測試。一般來說，學生對這個問題的反應不外有四種：(一)、是沿直線軌道者先抵達終點，這是受「兩點之間最短的距離是直線」的影響；(二)、是沿圓弧軌道者先抵達終點，原因是質點的速率比較大；(三)、是兩者同時抵達終點，而且這樣回答的人不在少數，我猜想是受到力學能「守恆」的影響，只是把守恆律錯用在時間上；(四)、是不確定、懷疑，且無法下決定。雖然回答的方式和所持的理由不一，不過我倒認為怎麼回答並不那麼重要，反而是回答問題時還會抱持著強烈懷疑態度的人更令人重視，因為這些人當中，有朝一日很可能就是因為這種態度，讓他們更進一步鑽研問題並找出解決的方法，這不就是科學教育所要達成的目標嗎？