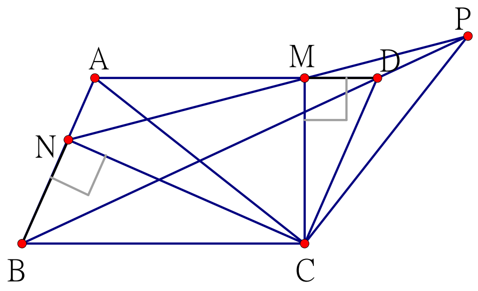
中學生通訊解題第八十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8101

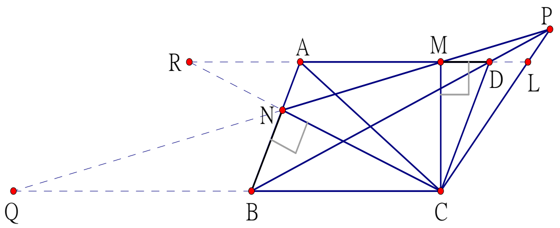
已知平行四邊形 $ABCD$，C 在 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 上的射影分別是 M、N，$\overline{MN}$ 延長後與 $\overline{BD}$ 的延長線交於 P，求證：$\overline{PC} \perp \overline{AC}$



參考解答：

延長 $\overline{AD}$，交 $\overline{PC}$ 於 L，則 $\overline{PC} \perp \overline{AC}$

$\Leftrightarrow \triangle ACM \sim \triangle CLM \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$



證明 $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$：

延長 $\overline{MN}$，交 $\overline{CB}$ 延長線於 Q，又延長 $\overline{CN}$，交 $\overline{DA}$ 延長線於 R，則

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AM}}$$

於是 $\overline{MD} \cdot \overline{RM} = \overline{ML} \cdot \overline{AM}$

$\because$ 平行四邊形 $ABCD$，$\overline{CM} \perp \overline{AD}$，$\overline{CN} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{CR}$，得 $\overline{MD} \cdot \overline{RM} = \overline{CM}^2$

故 $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$，得證。

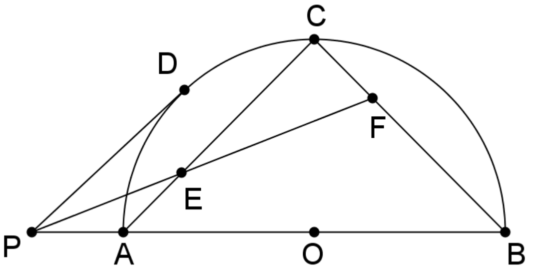
解題評註：

1. 此題利用直角三角形母子相似性質得到所要證明的一個充要條件 $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$，以及由題意得出 $\overline{CD} \perp \overline{CN}$ 性質，因此適當作出如解法中的補助線。
2. 這一題作出補助線，方能順利清楚的證明出此題。同學應學習如何從題意中抽絲剝繭作出適當的補助線。作出適當的補助線，往往是幾何題的關鍵。
3. 使用數學軟體的確可以幫助了解題意，檢驗兩幾何物件的關係，例如兩幾何物件的交點有幾個；但是在數學的證明上應將來龍去脈嚴謹說明。
4. 此題亦可用解析幾何的方法證明。

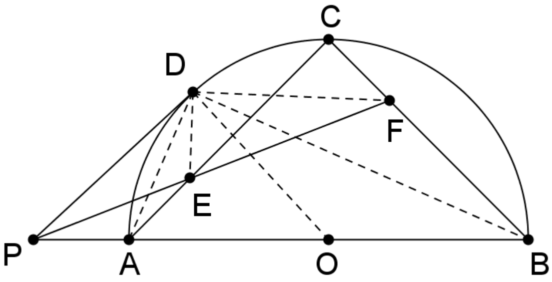
問題編號
8102

以 A、B 為直徑兩端點的半圓(如圖)，O 為

A、B 的中點，C 為半圓弧的中點，P 為直徑 AB 延長線上一點，過 P 作半圓的切線，D 為切點。$\angle DPB$ 的平分線分別交 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 於 E、F 兩點。證明：$\overline{OE}\perp\overline{OF}$。



參考解答：



連接 $\overline{DO},\overline{DA},\overline{DB},\overline{DE},\overline{DF}$

(1)　$\angle DPB = 90° - \angle DOP = \angle COD$

(2)　$\angle DPF = \dfrac{1}{2}\angle DPB = \dfrac{1}{2}\angle COD = \angle CAD$

因此 A,P,D,E 四點共圓

$\angle DPF = \angle CAD = \angle CBD$

因此 B,P,D,F 四點共圓

(3)　$\angle CED = \angle DPA$ (因為 A,P,D,E 四點共圓)

$= \angle CFD$ (因為 B,P,D,F 四點共圓)

因此 C,D,E,F 四點共圓

(4)　$\angle COD = \angle DPA = \angle DPA$

因此 C,D,O,F 四點共圓

(5)　由(3),(4)可知 C,D,E,F,O 五點共圓

因為 $\overline{CE}\perp\overline{CF}$，所以 E,F 是 C,D,E,F,O 五點共圓的直徑兩端點

因此 $\overline{OE}\perp\overline{OF}$

解題評註：

本題可以使用的幾何性質，常見的有【圓內接四邊形】。

問題編號

8103

設 n 為正整數，如果存在一個完全平方數，使得在十進制表示下此完全平方數的各位數字之和為 n，則稱 n 為好數(例如 13 是一個好數，因為 $7^2=49$ 的各位數字之和等於 13)。問：在 1,2,…,2010 中有多少個好數？

參考解答：893。

① 對 $x\equiv 0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4 \pmod 9$ 分別計算，可得 $x^2\equiv 0,1,4,0,7 \pmod 9$，利用十進制下，一個數與它的數字和 (mod 9) 同餘，可知滿足條件的 $n\equiv 0,1,4,0,7 \pmod 9$，即 $n\equiv 0 \pmod 9$ 或 $n\equiv 1 \pmod 3$

② 由 $1^2=1$，$2^2=4$，可知 $n=1$，4 是好數。當 $n=3m+7$，m 為非負整數時，由 $\underbrace{33...3}_{m個3}5^2=\underbrace{11...1}_{m個1}\underbrace{22...2}_{m個2}25$，可知 $n=3m+7$ 是好數。

③ 由 $(10^m-1)^2 = 10^{2m}-2\times10^m+1 =$

$\underbrace{99...9}_{m-1個9}8\underbrace{00...0}_{m-1個0}1$ 可知 $n\equiv 0 \pmod 9$ 是好數。

④ 由①②③可知 n 是好數$\Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod 9$ 或 $n\equiv 1 \pmod 3$ 所以在 1,2,…,2010 中好數的個數為 223＋670＝893 個

解題評註：

1. 此題利用正整數的性質『設 n 為正整數，n 除以 9 的餘數等於 n 的各位數字之和除以 9 的餘數。』，因此滿足條件的好數 n 必須 $n\equiv 0 \pmod 9$ 或 $n\equiv 1 \pmod 3$
2. 但是 $n\equiv 0 \pmod 9$ 或 $n\equiv 1 \pmod 3$ 是否為充要條件呢？是的。也就是說，要再說明 $n\equiv 0 \pmod 9$ 或 $n\equiv 1 \pmod 3$ 都能滿足條件，都是好數。參與徵答的同學中有一位在這部份有說明清楚，非常好！

問題編號
8104

已知數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1=1, |a_{2k}|=|a_{2k-1}+1|$, $|a_{2k+1}|=|a_{2k}+2|$ （k 是自然數），試求 $a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010}$ 之最小值及最大值。

參考解答：

$$\begin{cases} a_1^2=1 \\ a_{2k}^2=a_{2k-1}^2+2a_{2k-1}+1 \\ a_{2k+1}^2=a_{2k}^2+4a_{2k}+4 \end{cases}$$

將 k=1,2,…,1005 代入，以上各式相加得

$$a_{2011}^2$$
$$=1+2(a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010})+5025$$

$$a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010}$$
$$=\frac{1}{2}(a_{2011}^2-5026)$$

由各項的奇偶性可推得 a_{2011} 為偶數

$$a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010}$$
$$=\frac{1}{2}(a_{2011}^2-5026)\ge\frac{1}{2}(0^2-5026)\ge -2513$$

事實上若取

$$a_1=1, a_2=-2, a_3=0, a_{4k}=a_{4k+1}=-1,$$
$$a_{4k+2}=0, a_{4k+3}=-2 (k=1,2,...,501)$$

$a_{2008}=-1, a_{2009}=1, a_{2010}=-2, a_{2011}=0$，則

$$a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010}$$
$$=-2513$$

為最小值。另一方面 $a_1=1$，取 $a_2,a_3,\cdots,a_{2010}$ 皆為最大值，即

$$a_{2k}=3k-1, a_{2k+1}=3k+1 (k=1,2,\cdots,1005),$$
$$a_{2011}=3016$$

$$a_1+2a_2+a_3+2a_4+\cdots+a_{2009}+2a_{2010}$$
$$=\frac{1}{2}(a_{2011}^2-5026)=\frac{1}{2}(3016^2-5026)=4545615$$

為最大值。