

中學生通訊解題第八十期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

8001

撞球協會根據撞球運動員的水準給他們編號：最強的運動員排名為第 1 號，其次為第 2 號，依此類推。設在號碼之差大於 2 的兩名運動員比賽時，號碼較小的運動員得勝。現有 256 名運動員參加單打比賽。比賽按淘汰制進行：參賽者根據抽籤結果分成若干對，每對中的兩人比賽一場，勝者進入下一輪，於是每進行一輪比賽後，運動員人數減半，經過 8 輪比賽後產生冠軍。問冠軍的最大可能號碼是多少？

參考解答：

(1) 因為號碼為 k 的運動員只可能敗給號碼不超過 $k+2$ 的運動員，故在每輪比賽之後，獲勝運動員中的最小號碼至多增加 2，於是 8 輪比賽之後最強運動員的最小號碼至多為 17。

下面我們指出，第 17 號運動員不可能成為冠軍。

若不然，則第 1 輪比賽後，第 1,2 號運動員應被淘汰，但他倆只能分別輪第 3,4 號運動員；第 2 輪比賽後，第 3,4 號運動員應被淘汰，但他倆只能分別輪第 5,6 號運動員；繼續下去，

第 7 輪比賽後，最後只剩第 15,16 號這兩名運動員並在第 8 輪由二人進行決賽。故冠軍不可能是第 17 號運動員。

(2) 最後我們舉一個第 16 號運動員成為冠軍的例子。

將全體運動員分成兩組：

第一組由第 16 號及 128~256 號運動員共 128 人組成，另外的 128 人為第二組。

前 8 輪的每場比賽都在組內進行。第一組賽過 7 輪之後剩下的唯一運動員是第 16 號。

而第二組中的比賽可以這樣來設計：第 1 輪使第 3,4 名分別贏第 1,2 名，第 2 輪讓第 5,6 名分別贏第 3,4 名，...，第 6 輪中第 13,14 名分別贏第 11,12 名，第 7 輪中第 14 名贏第 13 名。

最後第 8 輪決賽中，第 16 名贏第 14 名。

綜上可知，冠軍的最大可能號碼是 16。

問題編號

8002

求使得方程組

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

有整數解的所有質數 p 。

參考解答：

不妨設 x, y 為正整數

- ① $\because p+1=2x^2 \quad \therefore p$ 是奇質數
 ② 兩式相減 $p(p-1)=2(y-x)(y+x) \dots\dots(*)$

$$\Rightarrow p|y-x \text{ 或 } p|y+x$$

- ③ $\because x > 1, y > 1$

$$\therefore p = 2x^2 - 1 > x$$

$$p^2 = 2y^2 - 1 > y^2, p > y, 2p > y+x > y-x$$

若 $p|y-x$ ，則 $p=y-x$ ，由(*)式得

$$p-1=2(y+x), \text{ 矛盾}$$

若 $p|y+x$ ，則 $p=y+x$ ，由(*)式得

$$p-1=2(y-x), \text{ 於是}$$

$$p^2 = 2y^2 - 1 = 2(p-x)^2 - 1 =$$

$$2p^2 - 4px + 2x^2 - 1 = 2p^2 - 4px + p$$

$$\text{故 } p+1=4x$$

$$\Rightarrow 4x = 2x^2$$

$$\Rightarrow x=2, p=7, y=5$$

所求的質數 $p=7$

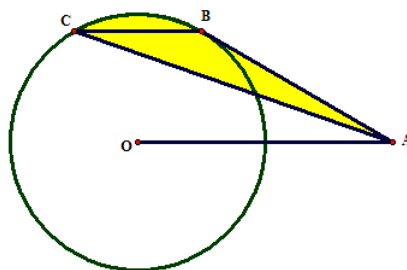
解題評註：

1. 此題首先由奇偶性得 p 是奇質數，又利用因數性質『設 a, b 為正整數， p 為質數，若 $p|ab$ ，則 $p|a$ 或 $p|b$ 』，再由方程組得 $p=y+x, p-1=2(y-x)$ ，進而得到 p 值。
2. 參與徵答的同學中有兩位在『 $p=y+x, p-1=2(y-x)$ 』這部份沒有說明清楚。

問題編號

8003

如圖， A 是半徑為 1 的圓 O 外一點， $\overline{OA}=2$ ， \overline{AB} 是圓 O 的切線， B 是切點，弦 BC 平行 \overline{OA} ，連接 \overline{AC} ，則陰影部分的面積等於多少？



參考解答：

設 \overline{OA} 與圓 O 的交點為 D 點

連 OC, BO, BD

因為 \overline{AB} 是圓 O 的切線， B 是切點， $\overline{OA}=2$

所以 $\overline{BD}=1$ ，又 $\overline{OC}=1$ ，弦 BC 平行 \overline{OA}

故 $ODBC$ 為平行四邊形，且 $\angle BOC=60^\circ$

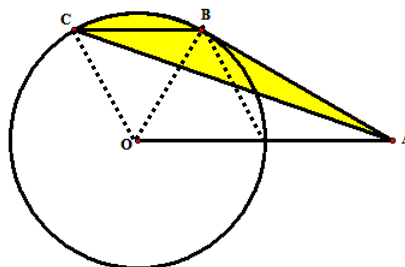
因為 $\overline{OA} // \overline{BC}$ ，所以 $\triangle BOC$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積

陰影部分的面積

$$= \text{弓形 } BC \text{ 面積} + \triangle ABC \text{ 的面積}$$

$$= \text{弓形 } BC \text{ 面積} + \triangle BOC \text{ 面積}$$

$$= \text{扇形 } BOC \text{ 的面積} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{6}$$



解題評註：

本題屬幾何的基本概念題型，關鍵在於如何適當分割一些適當的常見圖形，徵答的同學中，均能適切表達分割的方法，亦能清楚表達。

問題編號

8004

$\triangle ABC$ 的一邊長為 5，另外兩邊長恰好是方程式 $2x^2 - 12x + m = 0$ 的兩根，試求出滿足上述條件中 m 的範圍？

參考解答：

設另兩個邊長分別是 $a, b \Rightarrow a + b = 6 > 5$ ， $ab = \frac{m}{2} > 0$ 又

$$|a - b| < 5 \Rightarrow (a - b)^2 < 25 \Rightarrow (a + b)^2 - 4ab < 25$$

$$\therefore 6^2 - 4 \cdot \frac{m}{2} < 25 \Rightarrow m > \frac{11}{2}$$

而 $\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times m \geq 0 \Rightarrow m \leq 18$ ，則

$$\frac{11}{2} < m \leq 18$$

解題評註：

本題應從根與係數、三角形三邊長的關係以及配合乘法公式，最後再以實根特性導入判別式大於等於 0 即可找出 m 值的範圍。

問題編號

8005

已知自然數 n 除以 7 餘 3， n 除以 13 餘 8， n 除以 19 餘 13，則 n 之最小值為 $\frac{7 \times 13 \times 19 \times 5 - 17}{6}$ ，

- (1) 試說明或分析此推論的道理；
- (2) 並從而尋求滿足「 m 除以 11 餘 9， m 除以 13 餘 8， m 除以 15 餘 7， m 除以 17 餘 6， m 除以 19 餘 5」五條件之最小自然數 m 。(將此 m 之值以仿如 n 值之算式表示，不要乘開)

參考解答：

- (1) 依題意，根據除法原理：被除數 = 除數 \times 商 + 餘數，得 $n = 7a + 3 = 13b + 8 = 19c + 13$
 $\Rightarrow n = 7(a+1) - 4 = 13(b+1) - 5$
 $= 19(c+1) - 6$
 $\Rightarrow 6n = 7 \times 6(a+1) - 24$
 $= 13 \times 6(b+1) - 30$
 $= 19 \times 6(c+1) - 36$
 $\Rightarrow 6n = 7 \times (6a+5) - 17$
 $= 13 \times (6b+5) - 17$
 $= 19 \times (6c+5) - 17$
 $\Rightarrow 6n+17$ 是 7、13、19 之公倍式
 $\Rightarrow 6n+17 = 7 \times 13 \times 19 \times t$
 $\Rightarrow n$ 最小時， $t = 5$ ，即 n 最小時， $6n+17 = 7 \times 13 \times 19 \times 5$ ，故 n 之最小值為 $\frac{7 \times 13 \times 19 \times 5 - 17}{6}$ 。

(2) 仿如(1), 根據除法原理: 被除數 = 除數 \times 商 + 餘數, 得 $m = 11a + 9 = 13b + 8 = 15c + 7 = 17d + 6 = 19e + 5$

$$\Rightarrow 2m = 11 \times 2a + 18 = 13 \times 2b + 16 = 15 \times 2c + 14 = 17 \times 2d + 12 = 19 \times 2e + 10$$

$$\Rightarrow 2m - 29 = 11(2a - 1) = 13(2b - 1) = 15(2c - 1) = 17(2d - 1) = 19(2e - 1)$$

$\Rightarrow 2m - 29$ 是 11、13、15、17、19 之公倍式

$$\Rightarrow 2m - 29 = 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 \times t$$

$\Rightarrow m$ 最小時, $t = 1$, 故 m 之最小值為 $\frac{11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 + 29}{2}$ 。(即最小之 $m = 346432$)

解題評註：

本題解題的主要概念是「除法原理」。這一類有「韓信點兵」之稱的問題, 在各個除數成等差, 相對餘數亦成等差的條件下, 如題目所示, 有較為特殊的解法, 這種解法的著眼點在於: 藉由等差數列的性質, 將各除數下之「餘數」化為同一數, 進而以「答數」與「餘數」表示各除數的公倍數。根據中國剩餘定理, 可知韓信點兵問題中的各除數如果兩兩互質, 則無論餘數為何值該題有解; 否則餘數必須有限制才有解。以下在各除數兩兩互質的條件下, 討論此一特殊的解法。

設自然數 n 除以 a_0 餘 R_0 , 除以 a_1 餘 R_1 , 除以 a_2 餘 R_2 , ..., 除以 a_p 餘 R_p , 求 n 之最小值, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ 成等

差, 公差為 d ; $R_0, R_1, R_2, \dots, R_p$ 成等差, 公差為 D , 則根據除法原理, 存在 $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, 使得下列各式都成立:

$$n = a_0 Q_0 + R_0, n = a_1 Q_1 + R_1, n = a_2 Q_2 + R_2, \dots, n = a_p Q_p + R_p, \text{ 即}$$

$$n = a_k Q_k + R_k, n = a_{k+1} Q_{k+1} + R_{k+1}, \text{ 對於所有的 } k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \text{ 都成立, 兩式分別乘以 } a_{k+1}, a_k, \text{ 得 } a_{k+1} n = a_k a_{k+1} Q_k + a_{k+1} R_k, a_k n = a_k a_{k+1} Q_{k+1} + a_k R_{k+1}, \text{ 相減, 由 } a_{k+1} - a_k = d \text{ 且 } a_{k+1} R_k - a_k R_{k+1} = (a_k + d) R_k - a_k (R_k + D) = d R_k - a_k D = d R_0 - a_0 D,$$

得 $dn = a_k a_{k+1} (Q_k - Q_{k+1}) + dR_0 - a_0 D$, 可知 dn 除以 a_k, a_{k+1} 之餘數都是 $dR_0 - a_0 D$, 即 $dn - dR_0 + a_0 D$ 是 a_k, a_{k+1} 的公倍數, 對於所有的 $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ 都成立, 故 $dn - dR_0 + a_0 D = a_0 a_1 a_2 \dots a_p t$, 是即含有二未知數 n 與 t 之不定方程式, 利用除法原理再解此不定方程式求出 t 值, 即得

$$n = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p t + dR_0 - a_0 D}{d}.$$

本題(1)中, $dR_0 - a_0 D = 6 \times 3 - 7 \times 5 = -17$; (2)中, $dR_0 - a_0 D = 2 \times 9 - 11 \times (-1) = 29$, 此二關鍵數據皆可採取如上方法求得, 原【解答】中所用的方法不同於此, 主要是本題中之數據較為簡易, 只要把握相關的算理, 其中規律不難觀察歸納得知, 而如何探索找出相關規律, 此一發現過程應有參考價值, 寫下以供參考。