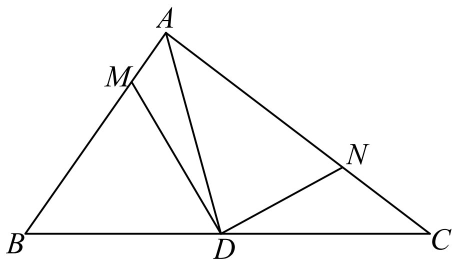
中學生通訊解題第七十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
7901

如圖：ΔABC 中，$\overline{AD}$是邊 $\overline{BC}$ 上的中線，點 M 在 $\overline{AB}$ 邊上，N 點在 $\overline{AC}$ 邊上，並且 $\angle MDN = 90°$，若 $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{DN}^2$，求證：$\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$



參考解答：

如圖，連接 $\overline{MN}$，延長 $\overline{ND}$ 至 P，

使得 $\overline{DP} = \overline{DN}$，連結 $\overline{BP}$，$\overline{MP}$

$\because\ \angle 1 = \angle 2$，$\overline{BD} = \overline{DC}$

$\therefore\ \Delta BPD \cong \Delta CND\ (SAS)$

$\therefore \overline{BP} = \overline{CN}$，且 $\angle DBP = \angle DCN$

$\therefore \overline{AC} // \overline{BP}$

而 $\overline{MP} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{DM}^2} = \sqrt{\overline{DN}^2 + \overline{DM}^2}$

$= \overline{MN} = \sqrt{\overline{DN}^2 + \overline{DM}^2}$

$\overset{\text{已知}}{=} \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2} = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{BP}^2}$

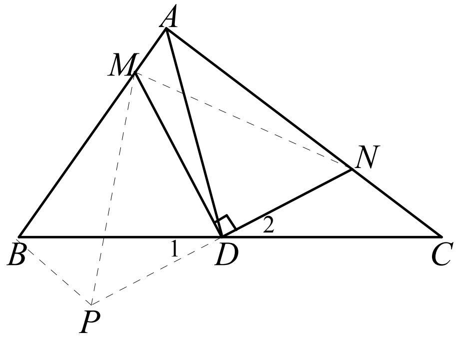
$\therefore \angle MBP = 90°$

$\because \overline{AC} // \overline{BP}$

$\therefore\ \angle BAC = 90°$ (同側內角互補)

$\Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$



解題評註：

本題作輔助線，再利用全等三角形性質與畢氏定理即可解決。大部分同學的解法相差不大。上面的解法僅供各位參考。

問題編號
7902

一袋中有紅、黃、綠三種顏色的球共 88

個，假設紅球有 x 個、黃球有 y 個、綠球有 z 個，其中 $x \geq y \geq z \geq 1$。已知袋中的球滿足「若從中任意取出 24 個球，則取出的球一定至少有 10 個是相同顏色」的條件，試問能夠滿足此條件的序對(x, y, z)有組。

參考解答：

若取出的紅、黃、綠三色球數目均為 8 個，則不符合題意，因此若 則有可能取出不合題意的結果。

$z = 1$，(x, y, z) = (86, 1, 1)、(85, 2, 1)、…、(44, 43, 1)，有 43 組

$z = 2$，(x, y, z) = (84, 2, 2)、(83, 3, 2)、…、(43, 43, 2)，有 42 組

$z = 3$，(x, y, z) = (82, 3, 3)、(81, 4, 3)、…、(43, 42, 3)，有 40 組

$z = 4$，(x, y, z) = (80, 4, 4)、(79, 5, 4)、…、(42, 42, 4)，有 39 組

$z = 5$，(x, y, z) = (78, 5, 5)、(77, 6, 5)、…、(42, 41, 5)，有 37 組

$z = 6$，則 $y \leq 8$（因為若 $y \geq 9$，則取出球的可能是(9, 9, 6)），因此(x, y, z) = (76, 6, 6)、(75, 7, 6)、(74, 8, 6)，有 3 組

$z = 7$，則 $y \leq 7$（因為若 $y \geq 8$，則取出的球有可能是(9, 8, 7)），因此(x, y, z) = (74, 7, 7)，有 1 組

能夠滿足此條件的序對(x, y, z)有 $43+42+40+39+37+3+1=205$ 組

問題編號
7903

試證明對所有正整數 n，$2n^2+1, 3n^2+1, 6n^2+1$ 等三數的乘積不是完全平方數。

參考解答：

$$(2n^2+1)(3n^2+1)(6n^2+1)$$
$$=36n^6+36n^4+11n^2+1$$
$$=(6n^3+3n)^2+(2n^2+1)$$

又因為 $0<2n^2+1<2(6n^2+3n)+1$，

所以

$$(6n^3+3n)^2<$$
$$(n^2+1)(3n^2+1)(6n^2+1)<(6n^3+3n^2+1)^2$$

由上述可得 $2n^2+1, 3n^2+1, 6n^2+1$ 等三數的乘積介在兩連續整數的平方數之間，

故 $2n^2+1, 3n^2+1, 6n^2+1$ 等三數的乘積不是完全平方數。

問題編號
7904

已知一個六位自然數 n，它以 p 為個位數。若把 n 的個位數 p 移到其餘各位數之前所得之新數是 n 的 4 倍。請問滿足此條件之 n 有那些？

參考解答：

設此數 $n=10q+p$, 6 位數，

故 $39q=(10^5-4)p=99996p$，則 $q=2564p$，但 $n=10q+p$ 為 6 位數，則 q 為 5 位數，故 $10000\le q=2564p\le 99999$，$4\le p\le 9$ 共 6 組解，

$p=4$, $n=102564$

$p=5$, $n=128205$

$p=6$, $n=153846$

$p=7$, $n=179487$

$p=8$, $n=205128$

$p=9$, $n=230769$

答案：102564，128205，153846，179487，205128，230769

解題評註：

此題屬於數論簡易題。一共有十九位同學參與此題徵答。絕大多數的同學，運用未知數的假設方式利用已知條件及運算，解出問題的結果，表現值得肯定。

問題編號 7905

某個數列 $<a_n>$ 定義如下: $a_1=a_2=a_3=1$, 且對於任意大於 3 的正整數 n，皆符合 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$ 的條件且 $S_n=a_1+a_2+a_3\cdots+a_n$，若 $a_{28}=6090307$，$a_{29}=11201821$，$a_{30}=20603361$，則試求 S_{28} 除以 1000 的餘數。

參考解答：

已知 $a_1=a_2=a_3=1$, 且對於任意正整數 n，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$。

由 $a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，

得 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+3}-a_{k+2})=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}+a_k)$

又令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_K$，由上面式子連加推導

得 $a_{n+3}-a_3=a_{n+1}+2S_n-a_1$，

即 $S_n=\frac{1}{2}(a_{n+3}-a_{n+1})=\frac{1}{2}(a_{n+2}+a_n)$

因為 $S_{28}=\frac{1}{2}(a_{30}+a_{28})=13346834$，

所以 $\sum_{k=1}^{28}a_k$ 除以 1000 的餘數為 834。

解題評註：

此題屬於數論遞迴問題。由於此類問題較少在國中課程出現，因此僅有三位同學參與此題徵答。