
對國小四年級數學低成就學童在分數學習的迷思概念／錯誤類型與其成因之探討

方文邦¹ 劉曼麗^{2*}

¹屏東縣立僑德國民小學

²國立屏東教育大學 數理教育研究所

壹、前言

美國於 2002 年推動「沒有一個落後的孩子」法案(No Child Left Behind Act, NCLB) (李孟峰、連廷嘉, 2010; 陳明印, 2002; Hess & Petrilli, 2006; McDermott & Jensen, 2005), 而我國教育部為配合十二年國教的推動, 亦將「教育優先區計畫-學習輔導」與「攜手計畫-課後扶助」整合為國中小補救教學計畫, 於 2013 年起實施, 並將所有學習成就低落學童納為必需接受補救教學的對象(教育部, 2012)。由此可見, 對於學習低成就的學童, 我們站在教育前線, 更應協助他們建立正確概念, 重拾學習自信, 進而縮短學習上的落差。「分數」在國小數學課程當中十分重要, 藉由「分數」的學習, 學童數學概念發展從「整數」擴展到「有理數」, 更是影響日後學童在小數、約分、擴分、比例等概念的學習。但國內外都有學者發現, 學童在分數的學習是困難且成效不彰的(林福來、黃敏晃、呂玉琴, 1996; 洪素敏, 2004; 林右珊, 2007; Annette, 2004; Mack, 1998)。

筆者任教於四年級, 也參與學校攜手計畫課後補救教學課程, 在教學經驗中發現學童在分數學習時常因無法理解而受挫, 令學童學習分數時十分困擾。「分數」對於國小學童而言, 是意義多樣化(林碧珍, 1990)且難以和生活經驗連結, 導致學童無法理解。四年級分數課程是學童學習五年級分數計算的基礎, 此時學童的迷思概念與錯誤類型對於學童學習分數計算影響甚大。因此, 我們藉由一份筆試試題施測於四年級數學低成就學童並分析其答題表現以及迷思概念/錯誤類型與其成因, 期能了解四年級低成就學童學習困難的原因, 以做為日後教師進行分數補救教學課程的參考。

貳、試題與受測樣本

四年級學童分數概念, 從「簡單分數」延伸為「真分數」、「假分數」、「帶分數」和「等值分數」, 並要學會同分母分數間的加減計算。教育部 2008 年的九年一貫課程綱要數學學習領域中指出, 第二學習階段的學童必須學會有關分數的能力指標有 N-2-09、N-2-10、N-2-11、N-2-12 和 N-2-16 等五項(教育部, 2008), 其內容如下表 1。

*為本文通訊作者

表 1 數學學習領域第二階段能力指標

	分段能力指標	教科書編排
N-2-10	能認識真分數、假分數與帶分數，做同分母分數的比較、加減與整數倍計算，並解決生活中的問題。	三年級、 四年級
N-2-11	能理解分數之「整數相除」的意涵。	四年級
N-2-12	能認識等值分數，並做簡單的應用。	四年級
N-2-16	能在數線上標記小數，並透過等值分數，標記簡單的分數。	四年級

因為施測對象為數學學習低成就學童，所以我們先依據 N-2-10、N-2-12 二項與分數相關且較基礎的能力指標，選定「分數的意義」(包含真分數、假分數、帶分數與等值分數)與「同分母分數的加減計算」(包含同分母假分數、帶分數與整數的加法與減法計算)二項主題。再依據這二項主題，從《國小分數與小數的教學、學習與評量》的評量試題中(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩，2009)，選題組卷。此外，Post(1988)認為學童能否在不同的表徵方式中自由轉換，表示其對概念意義的掌握程度，因此在試題中再加入「圖形與分數符號間的轉換」的題目。整份試題分為「分數的意義」14 題與「同分母分數的加減計算」12 題，而「分數的意義」試題中又包含圖形與分數符號間的轉換 4 題。受測學童為高屏地區 6 所國民小學，每校各取 5 名四年級數學低成就學童，總計 30 人。

參、四年級低成就學童在分數試題的答題表現

我們在學童筆試施測結果中所發現的主要迷思概念／錯誤類型與其成因整理

如表 2。

我們從表 2 中發現，四年級數學低成就學童在「分數的意義」與「同分母分數的加減計算」的平均答錯率將近九成，表示學童在這兩個部分的學習皆有困難。「同分母分數的加減計算」須以「分數的意義」做為基礎，而「分數的意義」又以「分數部分/整體關係」做為概念的起源。如果學童無法掌握「分數部分/整體關係」，便無法了解「分數的意義」。這樣不僅會使學童在學習其他有關分數主題的過程中產生似是而非的迷思概念或錯誤類型，也會讓學童純使用算則計算分數加減時易生錯誤。

歸納四年級數學低成就學童在本測驗的答題表現，我們發現學童主要是無法掌握分數部分/整體的關係與可能不了解算則「 $\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$ 」的原理以致無法在計算中變通。在「分數的意義」中，學童出現「錯認單位量」、「將圖形分割數視為分母」及「受分子或分母影響作答」等情形，可能是學童無法掌握「分數部分/整體關係」所造成。在「同分母分數的加減計算」中，學童出現「忽略整數部分」、「將

表 2 兩種不同主題的施測結果

題型	類型	平均答錯率	迷思概念／錯誤類型與其成因
分數的意義	真分數、假分數與帶分數的意義	310/360(86.1%)	1.受分子或分母影響作答 2.錯認單位量
	等值分數的意義	163/180(90.5%)	3.將圖形分割數視為分母
同分母分數的加減計算	同分母假分數與帶分數與整數的混合計算	648/720(90%)	1.忽略整數部分 2.整數與分子相加(減) 3.以減數分子大的數減去被減數分子小的數

註：平均答錯率為 30 份試卷中，同類型試題「總答錯數」除以「總答案數」

整數與分子相加或相減」及「減法計算時，以減數分子大的數減去被減數分子小的數」等情形，可能是學童不了解算則「 $\frac{b}{a}$

$\pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$ 」的原理而背誦口訣「分母不

變，將分子相加或相減」導致錯誤。以下就「分數的意義」以及「同分母分數的加減計算」二個主題的學童答題表現，來探討我們施測學童易犯的迷思概念/錯誤類型與其成因。

一、學童在分數意義部分的答題表現

「分數」概念源自於「分割物體」。將 1 個整體(單位量)先平分成 a 份，再取其中的 b 份，這「部分(b 份)」與「整體(a 份)」間的關係，用數學符號表示成「 $\frac{b}{a}$ 」

且 $b < a$ ，即為真分數的定義，如 $\frac{7}{10}$ 塊披薩

表示 1 塊披薩先平分成 10 份(10 片)，再取其中的 7 份(7 片)。假分數則是真分數的延

伸，符號 $\frac{c}{a}$ 是記錄了 c 個 $\frac{1}{a}$ ，且 $c \geq a$ 。帶

分數符號 $d \frac{e}{a}$ 則是記錄了 d 個整體 1 和 e

個 $\frac{1}{a}$ 。我們先從例題 1 討論學童在有關真

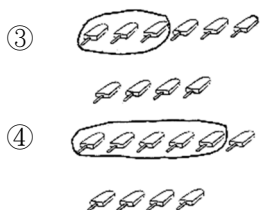
分數試題的表現：

例題 1

() 爸爸買了一些冰棒，吃掉全部冰棒的

$\frac{1}{2}$ ，請問下面哪一個圈法是對的？





答題結果				
選 項	①	②	③	*④
答 題 率	12/30 (40%)	14/30 (46%)	2/30 (7%)	2/30 (7%)

註:*為正確答案

例題 1 是離散量內容物非單一的題目，僅有 2 位學童答對。其他 28 位答錯的學童中，有 12 位學童(40%)選擇選項①。這個試題可以使用「分數部分/整體關係」、「整數除法」、或是利用「分數的乘法」(四年級學童尚未學習此方法)來解題。不論學童使用哪種方法，都須先了解題目中「全部冰棒的 $\frac{1}{2}$ 」的意義。「全部冰棒的 $\frac{1}{2}$ 」是指將所有的冰棒當成單位量，平分成 2 堆中的 1 堆。從答題結果來看，46%的學童選擇了「2 枝」，40%的學童選擇了「1 枝」。究其因，前者可能是學童純受到分數符號「 $\frac{1}{2}$ 」的分母數值影響，而後者可能是學童純受到分數符號「 $\frac{1}{2}$ 」的分子數值影響。答錯的這 26 位學童(86%)不能將題目要求的分數符號轉換成正確圖形，主因可能是

這些學童無法掌握分數部分／整體的關係，將分子與分母視為「兩個獨立並置的整數」。其中有的可能是直接依據分母數值作答，也有的可能是直接依據分子數值作答。訪談案例舉隅如下：

T：這個題目你選了哪個答案？

S：①。

T：為什麼選①呢？


S：因為這裡說「吃了全部的 $\frac{1}{2}$ 」，

就是 1 枝冰棒呀(手指著 $\frac{1}{2}$

的分子)。

接著，我們從例題 2 來看學童在假分數、帶分數上的表現：

例題 2

一盒巧克力有 4 條，如右圖，。請問下圖灰色部分是()盒巧克力。



答題結果

答 案	* $2\frac{2}{4}$ 或 $\frac{10}{4}$	$2\frac{2}{20}$	$\frac{10}{16}$	其他 (空白或 亂寫)
答 題 率	10/30 (33%)	4/30 (13%)	2/30 (7%)	14/30 (47%)

在這個圖形表徵轉換為符號表徵的例題中，僅有 10 位學童答對。其他 20 位答錯的學童當中，有 14(47%)位學童空白

或亂寫，有 4 位學童(13%)填了「 $2\frac{2}{20}$ 」，

有 2 位學童(7%)則是填「 $\frac{10}{16}$ 」。例題 2 從

圖形上來看，塗色部分包含 2 個「1 盒(4 條巧克力)」和 2 個「 $\frac{1}{4}$ 盒(1 條巧克力)」，


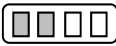
也就是 $2\frac{2}{4}$ 盒。填了「 $\frac{10}{16}$ 」的 2 位學童可

能是無法分辨題目中的「單位量」，不知道是「一盒巧克力當單位量」還是「全部巧克力當單位量」，加上其分數部份/整體的關係仍停留在「圖形等分割數即為分母」，於是將題目四盒巧克力中的 16 條巧克力數量視為分母，把塗色的 10 條巧克力數量

視為分子，得到「 $\frac{10}{16}$ 」的答案。另外填了

「 $2\frac{2}{20}$ 」的 4 位學童，也可能是無法分辨

題目中「單位量」到底為何。透過訪談得知，學童把塗色的 2 盒巧克力

 的盒數「2」視為帶分數中的整數部分，把題目全部出現的巧克力條數「20」視為帶分數中的分母，最後將塗色的 2 條巧克力  條數「2」

視為帶分數中的分子，得到「 $2\frac{2}{20}$ 」的答

案。訪談案例舉隅如下：

T：為什麼分母會是 20 呀？

S：這裡  是 4，這裡



是 16，所以全部是 20。

T：那整數的 2 呢？

S：  是 2 盒呀

T：那分子的 2 呢？

S：這裡  有 2 條巧克力，20

條裡的 2 條，就是 $\frac{2}{20}$ 。

在上述兩例題中，我們發現有些學童在處理真分數的問題時，容易單受分子或分母影響作答。在處理假分數或帶分數的問題時，學童空白作答和亂寫的人數明顯增加。而其他答錯的學童，有部分學童是錯認了單位量，有部分學童的分數概念是仍停留在「圖形等分割數即為分母」的模式中，也有部分學童是單受分子或分母影響作答。由於四年級分數課程在離散量問題中加入許多內容物非單一的情境，而帶分數與假分數也在此時上場，使得這些學童在分數概念上更是雪上加霜。

另外，在等值分數部分，學童除了要了解分數本身的多重意義，還要能理解「一個分數可以有不同的名字，同一個分數的不同名稱不會改變它的量」(Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984)，更要能將離散量或連續量中的每一份進行「再分割」或每幾份進行「再合併」。以例題 3 為例：


例題 3

() 右邊圖形中，

塗色的部分佔了全部的多少？

- ① 3 ② 6 ③ $\frac{3}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$ 。

答題結果				
選項	① 3	② 6	③ $\frac{3}{6}$	*④ $\frac{1}{3}$
答題率	18/30 (60%)	0	8/30 (27%)	4/30 (13%)

例題 3 是將圖形表徵轉換為分數符號的題目，僅有 4 位學童答對。答錯的 26 位學童中，有 18 位學童(60%)選擇選項①；有 8 位學童(27%)選擇選項③。從圖形來看，全部分成 9 塊，塗色的部分有 3 塊，是全部的 $\frac{3}{9}$ 。若將 3 塊當成 1 份，則原圖形可用  表示，全部變成 3 份，塗色部分變成 1 份，所以塗色部分是全部的 $\frac{1}{3}$ 。選擇選項①的 18 位學童(60%)，有些可能是依照圖形中塗色部分的個數來作答。而選擇選項③的 8 位學童(27%)中，可能是將塗色部分的個數當成分子，未塗色部分的個數當成分母，選了「 $\frac{3}{6}$ 」的答案。由此顯示這些學童是無法掌握分數部分/整體關係。另外，還有些學童的分數概念可能是仍停留在「圖形等分割數即為分母」的思考模式，無法對離散量情境中的數份內容物進行「再合併」。透過訪談我們發現這些學童原是想選擇 $\frac{3}{9}$ ，但無此選項，且學童又不會將 $\frac{3}{9}$ 轉成其等值分數 $\frac{1}{3}$ ，只

好依據原來所認為的分數 $\frac{3}{9}$ ，從選項中選出與其分子 3 相同的做為答案。訪談案例舉隅如下：

T：這個題目中，塗色的部分是？

S： $\frac{3}{9}$ 。

T：為什麼？

S：分成 9 個拿 3 個。

T：但選項沒有 $\frac{3}{9}$ ，怎麼辦？

S：對耶，那...選分子是 3 的答案吧

T：為什麼？

S：不知道。

這類型的迷思概念，我們也在其他形式的例題中發現，如例題 4：

例題 4

請寫出灰色圖形佔全部的幾分之幾。

$$\frac{(\quad)}{4}$$

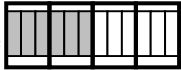


答題結果

答案	* $\frac{(2)}{4}$	$\frac{(6)}{4}$	其他 (空白或 亂寫)
答題率	6/30(20%)	16/30(53%)	8/30(27%)

例題 4 是將圖形表徵轉換為符號表徵的題目，僅有 6 位學童答對。其他答錯的 24 位學童中，有 16 位學童(53%)寫了 $\frac{(6)}{4}$ ，

有 8 位學童(27%)亂寫或是空白。從圖形來看，全部有 12 格，塗色部分有 6 格，所以塗色部分是全部的 $\frac{6}{12}$ 。如果將 3 格當成 1

份，則圖形可看成 ，全部變成 4 份，塗色部分變成 2 份，所以塗色部

分是全部的 $\frac{2}{4}$ 。填 $\frac{(6)}{4}$ 的 16 位學童

(53%)，可能是將塗色部分的數量直接當成分子，也有可能是從圖形中知道是 $\frac{6}{12}$ ，卻

無法利用「再合併」的方式將 $\frac{6}{12}$ 轉換成其

等值分數 $\frac{2}{4}$ 。透過訪談，我們發現有些學

童原是想填 $\frac{(6)}{12}$ ，但題目中的分母指定為

4，這些學童不會將 $\frac{(6)}{12}$ 轉換成其等值分

數 $\frac{(2)}{4}$ ，只好仍將分子填為 6，訪談案例

舉隅如下：

T：這個圖形，塗色的部份有幾格？

S：6 格

T：全部有幾格？

S：12 格

T：所以塗色部分是全部的幾分之幾？

S：分成 12 份拿 6 份，嗯... $\frac{(6)}{12}$

T：但是題目的分母是 4，不是 12，怎麼辦？

S：不知道，應該就是 6 吧

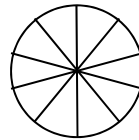
T：為什麼？

S：因為分成 12 份拿 6 份，所以分子就是 6。


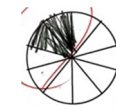
類似的情況，學童在例題 5 的答題中也出現了一些徵兆：

例題 5

請在下面畫出指定的圖形：爸爸買了一個披薩如右圖，媽媽把它平分成 5 份，再吃掉 2 份，請把媽媽吃掉的部分塗黑。



答題結果

答案	其他 (空白或 亂寫)
	

答題率	4/30(13%)	20/30(67%)	6/30(20%)
-----	-----------	------------	-----------

例題 5 是將隱藏分數意義的文字敘述轉換為圖形，且每份內容物是非單一的題目，僅有 4 位學童答對。答錯的 26 位學童(87%)中，除了空白或亂寫的 6 人外，其他 20 位學童(67%)都是塗了 2 塊披薩。例題 5 是可以使用「整數除法」或是「等值分數」來解題。不論學童使用哪種方法，都須先了解題目中「平分成 5 份，吃掉 2 份」的意義。如果學童使用整數除法，則要先將 10 塊披薩平分成 5 份，算出每份披薩是 2 塊，吃掉 2 份就是吃了 4 塊披薩。如果學童使用

等值分數解題，則要知道「平分成5份，吃掉2份」就是分數「 $\frac{2}{5}$ 」的意義，然後利用對每一份進行「再平分」的想法得到其等值分數「 $\frac{4}{10}$ 」，也就是10塊披薩中的4塊披薩被吃掉。大部分答錯的學童可能是看到題目「吃掉2份」，就將圖形中的2塊塗上顏色，卻沒有發現題意中的2份和圖形中的2塊是指不同的意思，忽略題目要求先平分成5份的步驟。

從上述三個例題中，我們發現學童遇上圖形分割數和分母不等的情境時，有些學童可能會將直接將塗色部分當成分子，有些學童可能無法將單位量中的每份內容物進行「再分割」或每幾份內容物進行「再合併」以轉換成其他等值分數形式，只好遷就原來所認為的分子，仍將其當作答案，而這也顯示了這些學童面臨內容物非單一的情境時，無法掌握分數部分/整體關係。

我們發現學童在有關分數意義的試題中，不管是真分數(例題 1)、假分數與帶分數(例題 2)，或是等值分數(例題 3、例題 4、例題 5)，皆有學童單受到分子影響作答，有些甚至高達 7 成。這些學童可能是因為不懂分數意義，也可能是因為無法完全掌握分數部分/整體關係，僅以「圖形等分割數即為分母」的思考模式進行解題。學童之所以使用「圖形等分割數即為分母」的思考模式解題，主要是三年級的分數教材皆為「圖形等分割數即為分母」情境。學童雖然不理解分數部分/整體關係，還是

能順利解題。但到了四年級，當學童遇上圖形分割數和分母數值不等的情境時，也就是單位分數表示的內容物不再是單一，在無法完全掌握分數部分/整體的關係下，作答時就極易受到分子數值或分母數值的影響。

二、學童在同分母分數的加減計算部分的答題表現

學童最早學習分數的加減是在三年級「真分數」的課程，大部分老師在授課

時，總是會教導學童算則「 $\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$ 」。

因為分母不變，所以有些老師常會以口訣「分母不變，將分子相加或相減」來教學。低成就學童常因無法理解算則的原理，就轉而背誦口訣解題。但是在四年級的分數課程中，同分母分數的加減計算除了真分數外，還多了帶分數與假分數，有時甚至整數也來湊一角。此時學童如果仍靠背誦口訣來解題，遇有題型變化時，就會不知如何變通而錯誤百出了。這份試題的計算部分，分成同分母分數的加法與減法兩種計算，而每一種計算的一組對象可為整數、假分數與帶分數三類中的兩兩組合計有六種情形，因此共有 12 題。經筆者歸納，學童藉由背誦口訣來解題，容易出現的錯誤類型有三種，茲列項說明如下：

(一) 計算時，忽略整數部分

第一類型的錯誤為「計算時，忽略整數部分」。當同分母分數加法或減法計算問題其中一項為帶分數時，本測驗中的學童

特別容易出現此錯誤類型。學童如果只是背誦口訣「分母不變，將分子相加或相減」來解題而不明究理，當遇到口訣以外的數(如帶分數的整數部分)時，就容易出現此類型錯誤，忽略整數將分子相加或相減。以圖 1 與圖 2 為例：

$$\frac{13}{9} + 6\frac{1}{9} = \frac{(14)}{(9)}$$

$$1\frac{3}{4} + \frac{13}{4} = \frac{(16)}{(4)}$$

圖 1 學童計算帶分數與假分數的加法時犯第一類型錯誤的答題結果

$$\frac{57}{10} - 1\frac{17}{10} = \frac{(40)}{(10)}$$

$$4\frac{5}{7} - \frac{11}{7} = \frac{(6)}{(7)}$$

圖 2 學童計算帶分數與假分數的減法時犯第一類型錯誤的答題結果

圖 1 與圖 2 是學童進行假分數與帶分數的加法和減法計算的答題結果。我們從圖 1 與圖 2 中發現，學童可能利用背誦口訣來解題，但口訣中並未提及「帶分數的整數部分」該如何處理。學童只好忽略整數部分，直接將分子相加或相減。特別是圖 2 中的下方試題，學童忽略整數的部分後，又發現被減數的分子小於減數的分子，於是反過來將減數的分子減去被減數的分子，此處將於第三類型的錯誤中說明。

(二) 計算時，整數與分子相加(減)

第二類的錯誤為「計算時，整數與分子相加(減)」。當同分母分數加法或減法計算問題其中一項為整數時，本測驗中的學童特別容易出現此錯誤類型。學童如果只是背誦口訣「分母不變，分子相加或相減」來解題而不知變通，當其中一項未出現分子時，便容易抓整數遞補而與另一分數的分子相加或相減。以圖 3 與圖 4 為例：

$$\frac{40}{11} + 2 = \frac{(42)}{(11)}$$

$$8 + \frac{11}{5} = \frac{(19)}{(5)}$$

圖 3 學童計算整數與假分數相加時犯第二類型錯誤的答題結果

$$\frac{44}{12} - 2 = \frac{(42)}{(12)}$$

$$6 - \frac{14}{5} = \frac{(8)}{(5)}$$

圖 4 學童計算整數與假分數相減時犯第二類型錯誤的答題結果

圖 3 與圖 4 是學童進行假分數與整數的加法和減法時的答題結果。我們從圖 3 與圖 4 中推測學童可能同是依賴口訣來解題，但口訣並未提到其中一項沒有分子該

如何處理。學童為能順利套用口訣，只好將沒有分子的「整數」視為「分子」，拿來與另一分數的分子相加或相減。另外特別注意的是圖 4 中的下方試題，由於被減數缺少分子部分，學童為了套用口訣，只好拿被減數的整數「6」減去減數的分子「14」。又遇到不夠減，只好反過來將減數的分子「14」減去被減數的整數「6」，此處將於第三類型的錯誤中說明。

(三) 減法計算時，以減數分子大的數減去被減數分子小的數

第三類的錯誤為「減法計算時，以大的數字減去小的數字」。當同分母分數減法計算問題中被減數的分子小於減數的分子時，本測驗中的學童特別容易出現此錯誤類型。當學童遇到被減數為整數且其數字比減數的分子小，或是被減數的分子數值比減數的分子數值小的情形時，學童可能因為不會借位或無法將整數轉換成分數，就用減數減去被減數。以圖 5 為例：

圖 5 學童計算時犯第三類型錯誤的答題結果

圖 5 左邊是同分母帶分數與假分數的減法計算，圖 5 右邊是整數與假分數的減法計算。在圖 5 左邊試題中，學童先犯了上述第一種類型的錯誤(忽略整數部分)，又由於分子部分「5-11」不夠減，學童只好改以「11-5」而得到「 $\frac{6}{7}$ 」的答案。另

外，在圖 5 右邊試題中，學童先犯了上述第二類型的錯誤(整數與分子相加減)，又因為分子部分「6-14」不夠減，學童只好改以「14-6」而得到「 $\frac{8}{5}$ 」的答案。

同分母分數的加減計算是最簡單的分數計算，在三年級的分數計算中，就算學童沒有分數概念、不明白分數部分/整體的關係、不懂計算原理，往往只要背誦口訣「分母不變，將分子相加或相減」就能得到答案。但到了四年級，如果學童缺乏概念做為算則背後的支撐，一旦遇到題型中多了整數或少了分子，計算就不再只是單純的「分子相加減」而已。學童為了將題目套用到口訣中，就容易忽略整數部分、將整數與分子直接加減，有的甚至不會借位只好改以「減數分子大的數」減去「被減數分子小的數」。這一連串的錯誤，就是因為學童缺乏用概念去支撐算則的使用所造成。或許當下解題沒有問題，當學童進行更高階的分數學習或計算時，這樣的一知半解所造成的錯誤將會完全顯露無疑。

肆、個案舉隅

這次施測結果，我們發現學童在概念題型常因「無法掌握分數部分/整體關係」而出現許多迷思；在計算題型常因背誦缺乏理解的口訣「分母不變，將分子相加或相減」，遇有題型變化，就不知變通而產生許多錯誤。不論是概念試題或計算試題，都顯現出我們的施測學童對於分數概念薄弱，特別是這些學童無法掌握分數部分/

整體關係，以致於學習其他分數概念或算則時，就不易理解而偏向記憶。在此分別以學童 S1 與 S2 為例，學童 S1 是「受分子影響作答」，而學童 S2 是「背誦口訣缺乏理解導致錯誤」。這兩位學童答題結果見下表 3。

由於學童無法理解分數符號中兩數並置所擁有的含意，以致作答時就容易受到題目中的分子或分母所影響。本測驗中的學童 S1 就是屬於受到分子影響而作答的例子，S1 的部份答題表現如圖 6。

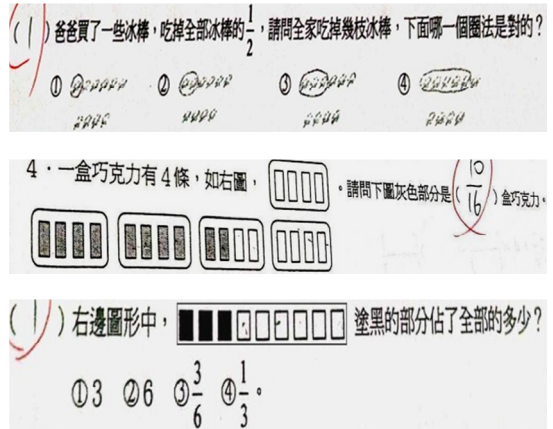


圖 6 S1 在概念主題中的答題表現

表 3 學童 S1 與 S2 在各題型中的答題表現

題型	學童		
	答題表現		
		S1(受分子影響作答)	S2(背誦口訣缺乏理解導致錯誤)
概念性試題	例題 1	×	○
	例題 2	○	×
	例題 3	×	×
	例題 4	○	×
	例題 5	×	×
計算性試題	例題 1	×	×
	例題 2	×	×
	例題 3	×	×
	例題 4	×	○
	例題 5	×	×
	例題 6	×	×
	例題 7	×	×
	例題 8	×	×
	例題 9	×	×
	例題 10	○	×
	例題 11	×	×
	例題 12	×	×

圖 6 是概念性的試題，包含了真分數、假帶分數與等值分數三種情境。在真分數情境中(圖 6 上方試題)，S1 可能將題目的分數符號「 $\frac{1}{2}$ 」的「1」與「2」視為兩個獨立並置的整數，並在答題時受到分子「1」的影響。在假分數與帶分數情境中(圖 6 中間試題)，S1 可能錯認了單位量，也有可能是其分數部份/整體的關係仍停留在「圖形等分割數即為分母」，將題目中 16 條巧克力的條數當作分母，把 10 條塗色的巧克力條數當成分子。在等值分數情境中(圖 6 下方試題)，塗色部分是全部的「 $\frac{3}{9}$ 」，S1 可能同樣將分子與分母視為獨立並置的整數，受到分子「3」的影響而選擇了選項①。以上種種，都顯現 S1 在分數意義上產生了許多迷思概念，不論是錯認單位量、將分數視為兩獨立並置的數、或是概念停留「圖形等分割數即為分母」的模式，都可能是因為 S1 無法掌握分數部分/整體的關係所導致。

由於學童背誦口訣而缺乏理解時，將會為了套用口訣而產生許多錯誤。本測驗中的學童 S2 就是屬於此種情形。S2 的部分答題表現如圖 7、圖 8 與圖 9。

圖 7 中，顯示 S2 不知該如何處理口訣中並未提及的整數，只好忽略整數，直接進行「分子相加或相減」以得出答案。

在圖 8 中，S2 又遇到了另一種狀況「其中一項缺乏分子」。為了要能套入算則，S2 只好將整數視為分子以便進行相加或

相減。特別是在圖 8 中的第二題中，我們可以從 S2 的解題痕跡中發現。S2 確實將減數的「2」視為「 $\frac{2}{12}$ 」來進行計算。

$$\frac{13}{9} + 6\frac{1}{9} = \frac{(14)}{(9)}$$

$$1\frac{3}{4} + \frac{13}{4} = \frac{(16)}{(4)}$$

$$\frac{57}{10} - 1\frac{17}{10} = \frac{(40)}{(10)}$$

$$7\frac{5}{9} + 4 = \frac{(9)}{(9)}$$

$$3 + 3\frac{3}{6} = \frac{(6)}{(6)}$$

圖 7 S2 在計算主題中所犯的第一類型錯誤

$$8 + \frac{11}{5} = \frac{(19)}{(5)} = (8)$$

$$\frac{44}{12} - 2 = \frac{(40)}{(12)}$$

$$\frac{40}{11} + 2 = \frac{(42)}{(11)}$$

圖 8 S2 在計算主題中所犯的第二類型錯誤

$$6 - \frac{14}{5} = \frac{(8)}{(5)}$$

圖 9 S2 在計算主題中所犯的第三類型錯誤

在圖 9 中，S2 亦是如此。只是「6-14」不通，只好反過來，以減數分子大的數減去被減數分子小的數。綜觀上述例子，更加印證了 S2 因為沒有理解算則，在遭遇計算問題與所背誦的口訣有所出入時，就容易衍生出「學童法」而錯誤百出。

學童學習分數時很容易產生迷思概念或錯誤類型。如果我們從學童的答題中去交互比對，就可發現造成學童迷思的原因。如上述學童 S1 易受分子的影響作答，其因可能是 S1 無法掌握分數部分／整體的關係。如果不及時破除這些迷思，導正概念，那麼這些迷思將會深植於學童的心中，嚴重地影響學童往後的分數學習。同樣地，我們也從學童的答題中去交互比對以了解學童是否真的學會分數計算。像上述學童 S2 僅依賴口訣計算同分母分數加減，遇有題型變化時，就不知變通而產生許多錯誤。究其原因，可能就是 S2 背誦口訣而沒有正確的概念作為基礎所導致，如果不協助學童建立正確的分數意義與理解算則原理，待日後進入約分、擴分、異分母分數的加減以及分數的乘除法時，必然會混淆口訣而錯誤百出。

伍、結語

本文透過一份試題和 30 位四年級數學學習低成就學童的答題結果來探討學童的迷思概念／錯誤類型與其成因，茲將探討結果歸納如下：

一、概念部分

在概念試題部分，學童容易出現的迷思概念與其成因主要有三：

1. 受分子或分母影響作答
2. 錯認單位量
3. 在內多情境下，將圖形分割數視為分母

二、計算部分

在計算試題部分，學童容易出現的錯誤類型與其成因主要有三：

1. 忽略整數部分
2. 整數與分子相加(減)
3. 以減數分子大的數減去被減數分子小的數

在施測學童的答題表現中，我們發現造成學童產生上述現象的背後主因，極有可能是學童無法完全掌握分數部份／整體的關係。學童無法從試題的圖形、符號或題意(文字敘述)中找出並釐清分子與分母的關係，學童便不能理解分數符號的意義。學童沒有分數的概念作為基礎時，更加不懂分數計算的原理，只能藉由背誦口訣來解題，也因此產生許多錯誤。換言之，我們要讓學童學會分數的計算，必須要先幫學童建立正確分數概念。有學者認為，學童能以不同表徵表現出同一概念，或在表徵間自由轉換，才算是真正掌握了數學概念(Lesh, Post & Behr, 1987)。針對上述發現，應先讓低成就學童學會在不同表徵間進行轉換以期能真正掌握概念，有了正確的概念後，再進行同分母分數的加減計算教學。我們對於四年級老師進行分數補救教學的建議如圖 10。

一、補救教學前

確認學童迷思概念或錯誤類型。

二、補救教學中

需要建立並穩固學童對分數的基礎概念。四年級的分數課程中不止導入了假

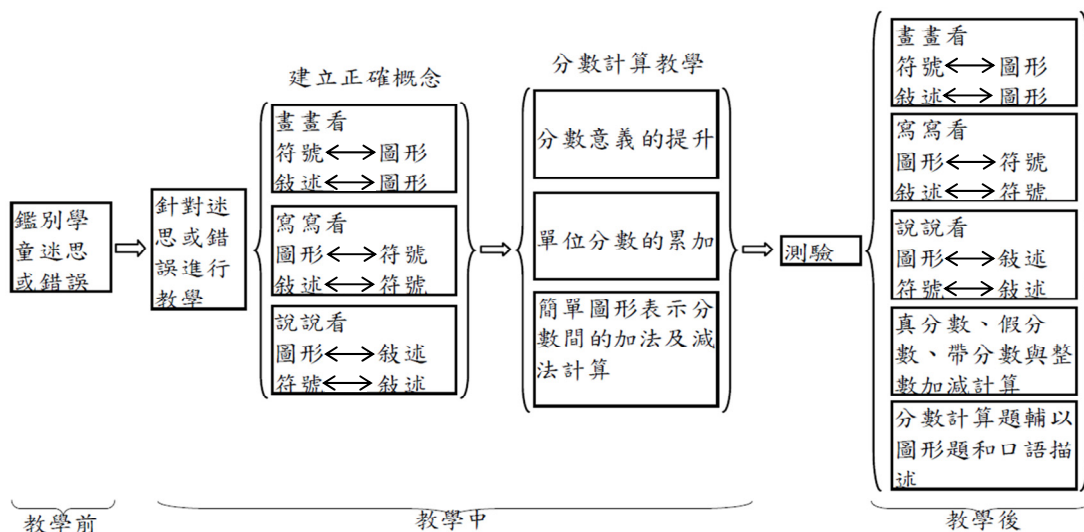






圖 10 分數補救教學建議圖


分數與帶分數的概念，在計算方面也增加了假帶分數的轉換、整數與分數的轉換以及進位與借位。此時，學童對於分數的認知「 $\frac{b}{a}$ 就是將 1 個整體先平分成 a 份，再取其中的 b 份」也應提升到「 $\frac{b}{a}$ 就是 b 個 $\frac{1}{a}$ 」的模式，並能逆向思考「b 個 $\frac{1}{a}$ 就是 $\frac{b}{a}$ 」。在此基礎下，同分母分數的加減與學童的整數加減經驗完全相同。另外，許多學者認為學童要能在不同表徵間進行轉換，才能掌握概念，因此教學時建議多利用下列方法：

(一) 建立正確概念部分：


1. 畫畫看(將符號和敘述與圖形建立連結)

例如一方面將「 $\frac{3}{4}$ 塊披薩」或「把一塊披薩平分成 4 份，取 3 份的結果」畫成圖形「」，另一方面將「3 個 $\frac{1}{4}$ 塊披薩」畫成「」。同時讓學童了解「」和「」是一樣多，所以「 $\frac{3}{4}$ 」與「3 個 $\frac{1}{4}$ 」可視為相同。

2. 寫寫看(將圖形和敘述與符號建立連結)，


例如將「」寫成「3 個 $\frac{1}{4}$ 」塊披薩，用分數表示是「 $\frac{3}{4}$ 」塊披薩。



3. 說說看(將圖形和符號與敘述建立連結)，

例如將「」以口述或文字寫成

「3 個 $\frac{1}{4}$ 塊披薩」，也就是「 $\frac{3}{4}$ 塊披薩」。



(二) 分數計算的教學部份


不可求快，須待學童從上述方法中建立「 $\frac{b}{a}$ 就是 b 個 $\frac{1}{a}$ 」與「 b 個 $\frac{1}{a}$ 就是 $\frac{b}{a}$ 」的概念後才能進行。進行分數的加法或減法教學時，應先強調「同分母的意義」，讓學童了解當分母相同時，表示等分割的份數相同，也就是有相同的單位分數。單位相同，分數才能進行加法與減法計算。如塗色部分 

表示 $\frac{1}{4}$ 塊披薩，「」是 5 個「」，也就是 5 個 $\frac{1}{4}$ 塊披薩。再加



上先前建立的概念「 b 個 $\frac{1}{a}$ 就是 $\frac{b}{a}$ 」

中，於是學童就能說出這裡有「 $\frac{5}{4}$ 塊披薩」，這也就是單位分數的累加概念。當學童有這樣的基礎時，就可以利用上述概念與圖形，讓學童進行假分數或帶分數的加法與減法計算。以

假分數相加「 $\frac{5}{4} + \frac{6}{4}$ 」為例，先以「」表示 5 個 $\frac{1}{4}$ ，「」

表示 6 個 $\frac{1}{4}$ ；當「」與

「」合起來就是「」

「」，即 11 個「」，也就是 11 個 $\frac{1}{4}$ ，從「 b 個 $\frac{1}{a}$ 就是 $\frac{b}{a}$ 」

得知為 $\frac{11}{4}$ ，所以 $\frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{11}{4}$ 。當學

童擁有上述經驗與基礎後，再利用簡單圖形，配合正確的概念，便能區別分數符號中分子部分與整數的不同，也就不容易發生文中所提及的錯誤了。以同分母為前提，讓學童明白單位分數相同的重要。從單位分數的累加開始，讓學童了解假帶分數與其互換以及假帶分數與整數三者之間的加減法是如何計算。這樣的學習，才是有意義的學習，才能避免純口訣背誦。

三、補救教學後

測驗內容設計，在概念題型方面，應將「畫畫看」、「寫寫看」、「說說看」三類題型並重，如果三類題型間能互相呼應，則更能了解學童的概念建立是否穩固。在計算題型方面，除了要有分數加減的計算題外，更可利用圖形題和口語描述以了解學童是否純以背誦口訣來解題。

如果教學者能充分運用圖形、符號與敘述來進行分數教學，並讓學童能使用不同表徵進行轉換，能畫、會寫、說得出意義，幫助學童建立正確分數概念，那麼學童在遭遇不同情境的分數加減問題時，就有能力思考解決問題的方法，而不是只能使用背誦口訣的方式來嘗試解題。國小數

學教育中，我們應優先重視概念的理解，引導學童能將圖形、符號與敘述三者產生有意義的連結，融合三者為一體。因此，對於學童分數的學習，我們應不斷的提供學童機會，將「分數的符號」、「圖形」、「敘述」三者視為一體，幫助學童建立正確概念，再加上熟練為輔，才能真正幫助學童學習分數。

參考文獻

- 李孟峰、連廷嘉(2010)。「攜手計畫--課後扶助方案」實施歷程與成效之研究。**教育實踐與研究**, 23(1), 115-144。
- 呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)。**國小分數與小數的教學、學習與評量**。台北市：五南。
- 林右珊(2007)。**國小兒童分數概念之探討**。國立屏東教育大學教育心理與輔導學系碩士論文，未出版，屏東縣。
- 林碧珍(1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。**新竹師院學報**, 4, 259-347
- 林福來、黃敏晃、呂玉琴(1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊**, 4(2), 161-196。
- 洪素敏(2004)。**國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。
- 陳明印(2002)。**美國 2001 年初等及中等教育修正法案之分析**。**教育研究資訊**, 10(1), 205-228。
- 教育部(2012)。**101 學年補救教學實施方案標準作業流程手冊**。台北：教育部。
- Annette R. Baturu (2004). Empowering Andrea to help year 5 student's construct fraction understanding. *Proceedings of the 28th conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2, 95-102.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment, *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.
- Hess, F. M., & Petrilli, M. J. (2006). *No child left behind*. NY: Peter Lang Publishing.
- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987b). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In Janvier, C(ED.), *Problems in the teaching and learning of mathematics* (pp.33-40). London: New Jersey.
- Mack, N. K.(1998). Building a Foundation for Understanding the Multiplication of Fraction. *Teaching Children Mathematic*, 5(1), 34-38.
- McDermott, A., & Jensen, S. (2005). Dubious sovereignty: Federal conditions of aid and the no child left behind act. *Peabody Journal of Education*, 80(2), 39-56.