
從變化量與對稱性探索 等差數列與等差級數

陳梅仙

屏東縣立琉球國民中學

壹、前言

以往進行等差數列教學時，總是會特別找尋具備各種規律的數列，讓學生進行探索並發現其中規律，再特別將等差數列抽離出來進行討論，這是以前進行教學的主要模式，教師教學的腦海中早已建構著等差數列公式，教學目的很單純的就只是希望學生學會操弄等差數列的公式，可以快速正確的進行解題，這次，大不相同，教學過程中刻意閃開等差數列公式，只帶領學生看到等差數列項次彼此之間的關係，讓學生自己利用關係解題，老師不特別將公式點出，更不會特別使用公式解題，只是一再的強調數列項次之間的關係，這是一次嶄新的嘗試，並且是在課堂中所發展出來的教學方法，茲詳細說明分享如下。

貳、認識數列

在課堂中，請學生任意選一個數字並說出來，老師依序將該數字寫於黑板上，這會出現兩種情形，其中一種情形是，學生是任意給數字，因此不會有特別的規律性，另外一種情形，在後面提出數字的學生會很自然想參考前面已給定的數字，以

等差數列或是其它數列規律的方式將數字給出，不論是哪一種情形，均可以很清楚的讓學生知道，所謂的數列，很簡單的就是將一群數字按照順序排成一列，而數列本身若有規律性，我們將可以利用其規律性寫出該數列後面的數字。

參、從變化量來看等差數列

一、寫出具有規律性的數列

請學生各自寫出一個具有規律性(可以依照規律寫出下一個數字)的數列，慢慢的和學生討論不同規律性的數列，最後抽離具有等差數列規律的數列進行討論。

二、等差數列的命名

(一)觀察等差數列的規律

等差數列名稱的介紹是讓學生透過觀察數列特性，老師與學生討論之後命名出來，老師不直接進行數列名稱的命名，也就是說，老師先利用學生前述恰為等差數列的舉例進行討論，讓學生知道清楚知道數列規則，弄清楚數列中數字與數字之間的關係之後，再從其中關係進行數列名稱的命名。

(二) 等差數列的命名教學

在研究數學的過程中，我們喜歡討論從不變中看變化，詢問學生如何透過數學表達出數列的變化，而看變化時我們習慣拿後面的結果與前面的結果做比較，例如：做生意的盈虧、今日與昨日的溫差、身高體重的變化……等等，因此，要寫出已知數列的變化，我們喜歡將後面的數字減去前面的數字來觀察其變化量，而我們所觀察的數列恰為變化量均相同的數列，這個變化量是經過相減獲得，而兩數相減在數學上我們稱之為差，因此，我們將該數列命名為等差數列，而數列中相鄰數字之間相等的變化量，我們則稱之為公差。

(三) 等差數列的項次的命名

教學中發現學生對於透過 a_n 來表示數列中不同的數字產生困惑，在進行計算時會將 a_n 的下標數字直接進行運算，對於 a_n 符號的接受度很勉強，因此，這個部分的教學，老師可以利用班級名稱的不同當作符號，班級名稱的下標則採用學生座號來與學生討論，班級名稱的不同是代表不同的班級，而透過班級名稱加上下標數字則可以很簡便的表示班級中不同的學生，用這樣的舉例，並多舉實例來說明 a_n 符號的使用在於區分不同的數列與數列中不同位置的數字，在這裡必須多花些時間讓學生對於 a_n 符號的使用產生感覺，因為，這對於學生日後

在數列上的學習相當重要。

(四) 從變化量來看等差數列

在黑板上寫出下列數列，直接請學生依照數列的規律計算出 $a_7, a_8, a_9, a_{20}, a_{2013}$ ，學生先進行運算後，老師再根據學生的寫法與學生進行討論，並討論出計算的想法。

5	a_1
8	a_2
11	a_3
14	a_4
17	a_5
20	a_6
	a_7
	a_8
	a_9
⋮	⋮
	a_{20}
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	a_{2013}

老師提問：

1. 我們若說從數列的第 1 個數字 5 到第 2 個數字 8 稱為 1 次的變化，請計算出其中的變化量。
2. 我們若說從數列的第 1 個數字 5 到第 2 個數字 8 稱為 1 次的變化，請計算出第 2 個數字 5 到第 6 個數字 20 會經過幾次的變化？
3. 我們若說從數列的第 1 個數字 5

到第 2 個數字 8 稱為 1 次的變化，請計算出第 6 個數字 5 到第 20 個數字會經過幾次的變化？請利用數列的變化量與變化次數計算出數列的第 20 個數字。

4. 我們若說從數列的第 1 個數字 5 到第 2 個數字 8 稱為 1 次的變化，請計算出第 3 個數字 5 到第 2013 個數字會經過幾次的變化？請利用數列的變化量與變化次數計算出數列的第 2013 個數字。
5. 當等差數列的變化量是正數時，會讓數列上的數字進行什麼樣的變化？
6. 當等差數列的變化量是負數時，會讓數列上的數字進行什麼樣的變化？
7. 當等差數列的變化量是零時，會讓數列上的數字進行什麼樣的變化？
8. 當我們掌握等差數列的什麼訊息時，我們就可以計算出該等差數列中的每一個數字？
9. 已知等差數列中的第 5 個數字 27 和第 12 個數字 97，請計算出等差數列中的第 103 個數字
10. 已知等差數列中的第 5 個數字 27 和公差 4，請計算出等差數列中的第 2013 個數字。

透過以上的從等差數列變化的角度與學生進行討論與探索，學生將會因為從等差數列中的變化量與變化次數來計算出數列的變化量(公差)而對

於等差數列擁有屬於自己的感覺，甚至也可以自己撰寫出屬於自己可以有感覺的數學關係式，也將能更彈性的看出等差數列如何因為公差是正數、負數或零可以看出該數列是遞增數列、遞減數列或是沒有任何變化，更能從公差或任何兩個數字之間的關係確實的掌握住等差數列的規律性與內涵，以上的討論與探索，沒有一定的方式或內容，老師進行教學時的節奏只要能配合著學生學習的節奏，學生應該都會很有機會自己找出等差數列的數學內涵，進而能體會到數學學習本身應具有的成就感與趣味性。

肆、從對稱性來看等差級數

一、認識等差中項

在等差數列中任取連續的三個數字，其中正中間的項，我們就稱之為其它兩項的等差中項。

二、利用等差中項的概念將等差數列中的每一項幻化為等差中項

利用下列表項中等差中項與其他兩項之間的變化，探索出任意兩項等差中項的兩倍恰為旁邊對稱的兩項的和，再利用下表說明如何利用等差數列的對稱性求出等差級數的和，也就是說，只要我們能找出等差數列的對稱中心的數字，我們就可以利用(對稱中心的數字) \times (數列項數)求出等差級數的和。

a_1	5	17-3 -3 -3 -3
a_2	8	17-3 -3 -3
a_3	11	17-3 -3
a_4	14	17-3
a_5	17	17
a_6	20	17+3
a_7	23	17+3 +3
a_8	26	17+3 +3 +3
a_9	29	17+3 +3 +3 +3
這 9 項 的和	5+8+11+14 +17+20+23 +26+29	7+17+17+17+17 +17+17+17+17 =17*9 17 是真實的 等差中項

a_1	8	29-3 -6 -6 -6
-------	---	------------------------

a_2	14	29-3 -6 -6
a_3	20	29-3 -6
a_4	26	29-3
$a_{4.5}$	29	29
a_5	32	29+3
a_6	38	29+3 +6
a_7	44	29+3 +6 +6
a_8	50	29+3 +6 +6 +6
這 8 項 的和	8+14+20+26 +32+38+44 +50	29+29+29+29+29 +29+29+29 =29*8 29 是虛擬的 等差中項 不屬於等差數列

三、從對稱性看等差級數的解題功力舉例

這次八年級段考命題命了一道常見的難題如下，老師希望可以看看學生將會以什麼樣的方式解題，也希望透過這次题目的命題讓學生看到數學想法的重要性，希望可以讓學生察覺到數學並不僅是

公式的解題運算，只要有想法，就可以讓看似複雜的題目找到直接運用數學內涵本身就可以解題的想法，而這樣的解法更能感受到數學學習的樂趣。

題目：

一等差級數前 30 項的和為 600，第 21 項至第 50 項的和為 2400；則該級數第 21 項至第 30 項的和為何？

1. 傳統一般解法：代公式列出二元一次方程式

假設等差數列首項為 a 、公差為 d

$$\begin{cases} \frac{(a+(a+29d)) \times 30}{2} = 600 \\ \frac{((a+20d)+(a+49d)) \times 30}{2} = 2400 \end{cases} \text{ 解出 } a \text{ 和 } d.$$

再帶入等差級數求和公式

$$\frac{((a+20d)+(a+29d)) \times 10}{2}, \text{ 求出第 21 項至}$$

第 30 項的和

2. 掌握等差數列變化量：先掌握公差的解法

利用等差級數前 30 項的和，以及第

21 項至第 50 項的和之間均是計算連續 30 項的和，求出公差

$$a_{21} - a_1 = 20d$$

$$a_{22} - a_2 = 20d$$

...

$$a_{50} - a_{30} = 20d$$

因此， $(a_{21} + a_{22} + \dots + a_{50}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{30}) = 20d \times 30$ ，解出 d

3. 利用等差數列對稱性：掌握等差中項解法

透過等差級數的對稱性，求出前 30 項的對稱中心(虛位等差中項)

$$a_{15.5} = 600/30 = 20$$

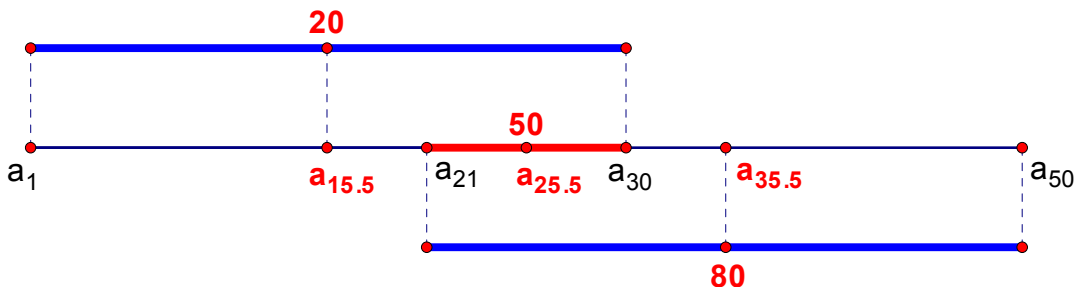
透過等差級數的對稱性，求出第 21 項至第 50 項的對稱中心(虛位等差中項)

$$a_{35.5} = 2400/30 = 80$$

透過等差級數的對稱性，求出第 21 項至第 30 項的對稱中心(虛位等差中項)

$$a_{25.5} = (20+80)/2 = 50$$

再利用虛位等差中項 50，求出第 21 項至第 30 項的和 $= 50 \times 10 = 500$



伍、結語

從老師預設立場預計教導學生操作並熟練等差數列和等差級數的公式運算方法，到轉變為在課堂中製造機會讓學生進行探索討論，希望能讓學生對於等差數列有所感覺，整個教學過程中，公式的引導變成是次要的甚至是幾乎不會提及，因為學生當對於等差數列有所感覺時，自然會在等差數列中數字與數字之間的變化量與對稱性中找到其規律性，當學生對於所學習的數學知識有足夠的時間進行體驗時，在學習的過程中，學生不只可以體會數學學習的樂趣所在，學生將不容易遺忘曾經學會的數學概念，更可以發展出屬於自己

理解的解法，數學知識只有學生有所感覺，並能使用自己的話語寫下來了，這樣的數學知識才能內化為學生真正獲得的知識，前述難題的最後一個解法是來自一位數學成績在班級相當落後的學生，其解法之巧妙令人讚嘆，而且該班班上僅有這位同學解出來，這帶給這位同學相當大的成就感，也證實了數學的學習不在乎如何熟練的操作數學公式，而在乎如何讓學生對於所學的數學知識能有所感覺，這是一次蠻有趣的教學嚐試，老師只要能繼續掌握學生學習的節奏讓學生體驗數學知識，將可以繼續發展出不一樣的教學方法，就像這次的嘗試一樣。