國中數學解題能力量表編製之理念

陳怡靜 [1] 劉祥通 [2*]

[1] 嘉義市立大業國民中學

[2] 國立嘉義大學 數理教育所

鑒於數學解題能力的重要卻缺乏相關的解題能力量表，研究者身為一名國中教師，想探討學生學習國中三年的課程，其數學解題能力為何，因此乃嘗試編製一份國中數學解題能力量表量表(陳怡靜，2012)，此量表以 Polya 的解題歷程模式，並參考 NAEP 的評量架構，並以九年一貫數學能力指標的國中三年教材內容為範圍，完成數學解題能力量表及複本的編製。為了分享編製此量表的部分成果，特別撰寫本文，分成緒論、編製理念與實作(編製量表)後的反思三大部分來論述。

壹、緒論

黃敏晃(1990)認為學習數學最好的方法就是培養解題能力。在國民中小學的學生其數學能力發展是始於流利的基礎運算與對數學概念的理解，懂得利用推論去解決數學的問題，並且在不熟悉解答的方式時，能尋求解題的途徑(教育部，2008)。

但在教學現場中，教師常以答案的正確來判斷學生的學習，較不重視學生的解題歷程，而忽略了學生學習解題歷程的重要性。解題就是解決問題(黃敏晃，1991)，對於解題者而言，只有在面對非例行性問題時，解題才會發生。所以當學生遇到開放性或結構不明確的非例行性題目時，能否真的運用到其所習得的數學知識來解題呢？

劉秋木(1996)指出解題即為問題表徵的建構與再建構，要先找到這問題的知識結構，題目的敘述給了哪些資訊，然後思考答案可能的性質,是否合乎問題的條件,根據這些觀點所形成的初步問題表徵，經過不斷地修正和改進，最後發現問題的結構。

在數學解題的思考歷程中，許多數學教育研究者所提出的思考模式大同小異。在現有的理論架構中，研究者探討最先被提出的數學解題歷程，為 Polya 的數學解題四個階段：

Polya(1945)將數學解題歷程區分為四個階段：

一. 了解問題(understanding the problem)：根據題目所給定的訊息,了解所能運用的已知條件是什麼？條件是否充足？並尋求未知數以及弄清解題目標。

*為本文通訊作者

二. 擬定計畫(devising a plan)：了解題意後，從自我的先備知識中，可思考是否有類似的解題經驗，找出已知與未知條件的關聯，有助於進行規畫解決問題的計畫。

三. 執行計畫(carrying out the plan)：實行所擬定的計畫，採用可行的解題策略，進行解題工作直到問題解決，若未能完成解題，則選擇另外較好的計畫取代目前的方法。

四. 驗算與回顧(looking back)：學生統整相關解題經驗來檢驗所得到的結果其正確性。

Polya(1945/2006)在書中舉了個例子，說明上述要點，例如:「已知某長方體之長、寬、高，求其對角線之長度？」在了解題意階段，讓學生了解到有長、寬、高這些已知數，並且這些已知條件足以決定未知數；在擬定計畫階段，透過曾經解過類似問題，例如知道兩股長，求直角三角形的斜邊長運用到此題上；在執行計畫階段，根據解題計畫，執行並檢驗每一步驟；最後在驗算與回顧階段，吾人可以延伸此題設計類似問題給學生解如下的問題：若長方體三邊長等比例放大，對角線是否會等比例放大？以判斷學生是否能加以應用。

研究者認為 Polya 的解題歷程步驟分明，適合設計選擇題的方式來分析學生解題活動的歷程。但「驗算與回顧」的步驟是檢驗答案的正確性，較難設計測驗題來得知，因此本研究以 Polya 的解題歷程「了解題意」、「擬定計畫」及「執行計畫」三步驟以分析學生的數學解題能力。

貳、編製理念

一、強調解題歷程的重要性

林碧珍(2001)指出目前數學課程主張數學學習是兒童建構知識的過程，所以評量必須是教師了解學生理解的過程，能反映出學習者在社會情境下的全面學習。因此研究者認為學生在解數學問題時，從題目到答案之間，個人會使用到解題歷程的階段性數學知識，例如：語言(linguistic)、語意(semantic)及基模(schematic)知識(Mayer, 1992)，因此當學生解題遇到困難的地方，教師可以透過大部分學生作答的的錯誤類型，找出其迷思概念，因此教師才能適時地了解學生的解題歷程以及診斷學生在過程中遇到困難的所在，所以，研究者認為教師不應只看學生答案結果的對或錯，更應注重學生解題歷程的重要性，唯有兼顧「過程」及「結果」的評量才能有效地評鑑學生的解題能力，以及知道如何幫助學生發展解題能力。

為了設計兼具解題歷程與結果的數學解題能力測驗，研究者先介紹數學解題行為評量表(劉秋木，1996)，將其歷程及架構簡述如下：

此套數學解題行為評量表主要在測驗學生解題時所使用的認知策略及能力，適用對象為小學五年級到國中二年級。以 Polya 的解題歷程為基礎，並按其解題順序，每一題都以文字題為題幹，再編製三至五個子題(選擇題)，每一子題分別是測

驗兒童某一解題策略向度之能力，以理解題意開始，其次是擬定計畫、執行計畫，最後是回顧答案。

研究者認為此套測驗雖然比一般算術推理測驗更能評量學生的解題能力，且能與數學成就測驗的題型有所區分。但其題型分布不均，大部分為數與量以及代數的應用問題。再者，有些題目的問題內子問題的調配仍不太恰當，舉例如下：

題目：有一長方形周長是 48 公尺，長是寬的兩倍，求長方形的面積。

子題一：看到這問題，你們想到什麼？

甲：假如能求出長、寬各是多少就有辦法解答了。

乙：題目沒有說出寬是多少，這個題目沒有解答。

丙：周長是 48 公尺，所以一邊是 12 公尺。

丁：周長是長的四倍長。

子題二：老師把這長方形畫出，大家想想看有什麼重要資料可用？

甲：長是寬的 2 倍。

乙：周長是寬的 6 倍。

丙：所有的長和寬加起來等於周長。

丁：這是一個比較狹長的長方形。

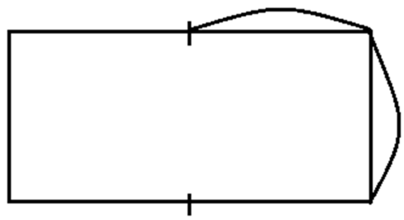
子題三：怎麼算才能求得長方形的寬？

甲：48÷4=12

乙：48÷6=8

丙：48÷8=6

丁：48÷16=3



研究者認為此量表是一種很有開創性的量表，但是也有部分值得再斟酌，舉例來說，此題的子問題一與二皆測驗到理解問題，但子問題三也就是測驗制定及執行計畫僅求得長方形的寬，在分析問題結構後，只求得子目標寬是多少，卻沒有設計另外的子問題求得最後的解答- 長方形面積，也未設計題目以測驗解答的合理性。

二、著重非例行性問題的設計

美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)強調問題解決是學校數學的重心(problem solving is the focus of school mathematics)(NCTM, 1989)。根據 Barba (1990) 的主張，解題者在解決問題的途中，遇到了暫時性的障礙，而解題即是解決此障礙的過程，因此解題(problem solving)，不僅僅是回答知識層面的問題，本身牽涉到高層思考的技能。解題是一種複雜的結構，需要表徵的知識、問題的轉換以及一個控制的系統以指引知識與程序的選擇。由此可見，解題是解前所未見的難題。

在數學問題的分類中，黃敏晃(1991)分成例行性問題(routine problem)與非例

行性問題(non-routine problem)，例行性問題像是課本的隨堂練習，我們利用已學會的知識與例題的解法，做同類型的問題，熟練其固定的技巧；而非例行性問題則是我們在面對題目時，無法立即想到求解途徑的題目，需要融會貫通原有的知識，並運用策略以求得解答，因此，對解題者而言，只有當問題為非例行性問題時，解題才會發生。

Kilpatrick(1985)也對問題做了以下的分類：

(一) 例行性問題將正在學的或討論的規則，拿來做機械式的應用即能解決的問題。

(二) 有選擇的應用題要應用以前學過的規則才能解決，但學過的方法不只一種，解題者需要做判斷以選擇適用的規則。

(三) 選擇一種組合要求解題者把兩個以上學過的規則組合才能解出來的題目。

(四) 接近研究級的問題，要求解題者把兩個以上規則或例子做有創意的組合才能解題，且要求高層次的獨立思考，以及使用到擬真推理(plausible reasoning)。

由此可知，例行性的問題像是段考大多數題目其目的是測得學生的成就能力；學生在面對非例行性問題時，需要運用到其所學過的數學知識與技能，適當地使用到新的問題情境上，可以透過解題訓練與培養學生有能力和自信解決非例行性問題。

例如：TIMSS 2003 數學評量試題 M032046：

若 $y = 3x + 2$，則 x 可以如何用 y 來表達？(選項後有*表示為正確選項。)

A. $x=\frac{y-2}{3}$ *

B. $x=\frac{y+2}{3}$

C. $x=\frac{y}{3}-2$

D. $x=\frac{y}{3}+2$

此題為培養學生逆向思考與運算的能力，李源順等人(2009)的研究指出此題要求學生利用逆運算用 y 表示 x 的式子，這對常使用 x 來表示 y 的學生是比較不熟練的，或是不易了解題意而無法作答，因此答對率只有 47.7%，有些偏低。由此可知，教師在教學或是出題時，應多提供非例行性問題給學生鍛練解題的機會,但是，非例行性問題經常出現後，解題者熟練了後也就不再是非例行性問題了，所以研究者認為例行性與非例行性問題是相對的，不是絕對的。

因此，研究者所設計的數學解題能力量表題目以非例行性題目為主，均是學生不熟悉的問題情境，也就是看到題目時，無法立刻知道解題途徑，須花較多的時間思考,題目雖然在所學的教材中較為陌生，但其所需要的數學概念，卻是學生已經具備的。

三、題目訊息多元，設計複選題以判斷學生對題意與結構的掌握

Moses, Bjork 和 Goldenberg (1990)建議解題者，問題的題意是甚麼? 哪些是已

知的訊息?那些是未知的訊息？哪些是答案中的限制？改變題目中的已知、未知、或限制，是否會產生不一樣的結果？這些多元的訊息要正確掌握，才有助於解題成功。

再者，因為在非例行性題目中，是學生不熟悉的問題情境，需要統整並運用已有的數學知識，將題目的訊息與既有的概念融會貫通，因此題目會透露出較多的解題訊息,也因為學生較不熟悉此類型問題,才能引發學生一連串的解題歷程，例如重組資料、發現關係、簡化問題以及歸納推理等等。所以在「了解題意」階段，研究者設計複選題讓學生思考題目的解題關鍵。

研究者舉例來說明(選項前有*表示為正確選項)：

例題：爸爸有一筆錢一共 y 元，分給兒子甲、乙、丙三兄弟，甲先拿了全部的一半又 30 元，乙拿剩下的三分之一多 5 元後，最後剩下的給丙，則丙拿多少元？

※根據題意，下列描述何者正確？(複選)

(A) 甲所拿的錢用 y 來表示為 $(\frac{1}{2}y-30)$ 元。

(B) 乙所拿的錢用 y 來表示為 $(\frac{1}{3}y+5)$ 元。

*(C) 甲將錢拿走後，所剩的錢為 $(\frac{1}{2}y-30)$ 元。

*(D) 由「乙拿走剩下的 $\frac{1}{3}$ 多 5 元」這句話可知，丙拿剩下的 $\frac{2}{3}$ 少 5 元。

此例題關於「了解題意」階段的設計，在於分別判斷甲乙兩人所拿走的錢數，以及乙拿走剩下的錢後，且又判斷丙可以拿到剩下多少錢，有了上述的關鍵才能進行解題。因此，在非例行性問題中，題目訊息多元，設計合適的選擇題可以考驗學生判讀題意的能力。

四、避免學生解已熟習的非例行性問題，以對等的同構試題為複本試題

對於數學文字題，Reed(1987)指出與某一試題故事情境相同，解題程序也相同的試題，則此兩題互為等價(equivalent)試題；與某一題故事情境不同，但解題程序相同的試題，此兩題互為同構(isomorphic)試題。

並且舉例如下，A 題：一個小型管子可在 12 小時內注滿油罐,一個大型的管子可以 8 個小時注滿，如果同時使用兩個管子加滿油箱，需要多久的時間？

B 題為：一個小型水管可以 6 個小時內注滿游泳池，一個大型的水管可以 3 個小時注滿，如果同時使用兩個水管注水，需要多久時間？

因 A 題與 B 題故事情境相同且解題程序也相同，故此兩題互為等價試題。

C題為：湯姆開車至比爾家需4小時，而比爾開車至湯姆家需 3 個小時，若他們同一時間離開自己家，開往對方家，則他們需要多久時間才能相會？

因 A 題與 C 題故事情境不同，但解題程序相同，故此兩題互為同構試題。透過上述題目的設計概念，研究者建議盡量嘗試以對等的同構試題為複本試題。在教師施測正本試題作為評量，可以由測驗的結果，了解學生的學習程度，然後再經由複本試題的評量，測驗學生學習的成果來判斷教學目標是否達成，亦能檢視教師的教學成效是否需要做調整。

五、評估「了解題意」與「擬定計畫」對「執行計畫」的重要性

Lester 和 Kroll (1996)主張，學習的評量的內容理應傳達甚麼是重要的訊息。又，既然 Polya 強調「了解題意」、「擬定計畫」、對成功解題的影響，因此，為了探討「了解題意」與「擬定計畫」階段的重要性，研究者設計以下題目為例：

例題：爸爸有一筆錢一共 y 元，分給兒子甲、乙、丙三兄弟，甲先拿了全部的一半又 30 元，乙拿剩下的三分之一多 5 元後，最後剩下的給丙，則丙拿多少元？

※(1) 根據題意，下列描述何者正確？(複選)

(A) 甲所拿的錢用 y 來表示為 $(\frac{1}{2}y-30)$ 元。

(B) 乙所拿的錢用 y 來表示為 $(\frac{1}{3}y+5)$ 元。

*(C) 甲將錢拿走後，所剩的錢為 $(\frac{1}{2}y-30)$ 元。

*(D) 由「乙拿走剩下的 $\frac{1}{3}$ 多 5 元」這句話可知，丙拿剩下的 $\frac{2}{3}$ 少 5 元。

(2) 下列算式何者能表示丙所拿的錢？

(A) $y-(\frac{1}{2}y-30)-(\frac{1}{3}y+5)$ 元。

(B) $y-(\frac{1}{2}y+30)-(\frac{1}{3}y+5)$ 元。

* (C) $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}y-30)-5$ 元。

(D) $(\frac{1}{2}y-30)-(\frac{1}{3}y+5)$ 元。

(3) 根據題意，請問丙拿多少元？

(A) $\frac{1}{6}y-35$

* (B) $\frac{1}{3}y-25$

(C) $\frac{1}{3}y+25$

(D) $\frac{1}{6}y-25$

第(1)題「了解題意」階段，所設計的選項是以試題內容中學生概念容易混淆或能否正確掌握題意為主，測驗學生能否完

全了解題意，且設計為複選題，學生須全對才算完全了解題意；第(2)題「擬定計畫」階段，將各種解題策略算式以選擇題呈現，讓學生判斷哪個列式是正確的，以測驗學生擬定計畫的能力；第(3)題「執行計畫」階段是對應到第(2)題所選的答案計算出的結果，所以第(3)題的設計是評估學生執行計算的能力。三個子題選項對錯分布如表1(施測樣本是選自嘉義縣市公私立國中三年級學生 372 位)。

表 1、各子題選項對錯分布人數表

			人數	合計
第(1)題全對	第(2)題對	第(3)題對	141	242
		第(3)題錯	19	
	第(2)題錯	第(3)題對	12	
		第(3)題錯	70	
第(1)題錯	第(2)題對	第(3)題對	11	130
		第(3)題錯	17	
	第(2)題錯	第(3)題對	21	
		第(3)題錯	81	

由表中數據可知道，第(1)題全對且第(2)、(3)題對共 141 人，第(1)題錯且第(2)、(3)題對共 11 人，可得知若第(1)題全對(即能完全了解題目敘述的人)，則第(2)、(3)題能答對的能力會比第(1)題無法全對的同學較佳，因此第(1)題全對影響到整題得分的關鍵；雖然如此，值得深究的是第(1)題全對，而第(2)題錯誤及第(3)題也錯誤的學生竟然有 70 人，表示此類型的學生在判讀題意時，觀念是正確的，但是在「擬定計畫」階段，也就是解題策略的規劃上，無法整合先備的數學知識於此題，因此「擬定計畫」亦是學生解題歷程的關鍵。

在以往只著重第(3)題「執行計畫」的正確性，但由表中可知，第(3)題正確的人，絕大多數是掌握題意且解題策略正確的，只有少部分是題意不夠清楚或策略使用不對亦或是猜測，因此，可以知道此種題目類型能深入了解學生在各階段解題歷程的表現，教師更能掌握住學生的困難，引導學生正確地學習。

參、實作(編製量表)後的反思

研究者在編製量表並實際施測後，針對實作後的結果，分成三項提出反思：

一、選項中的訊息幫助題意了解？還是造成閱讀困擾？

研究者所設計題目，以「了解題意」、「擬定計畫」及「執行計畫」三步驟來分析學生各階段性的數學解題能力。在「了解題意」階段，了解題意能力較好的學生可能利用各個選項關係，釐清解題的關鍵，而選出正確的選項；；在「擬定計畫」階段，解題能力較佳的學生可能因從題目的選項中得到若干的有用訊息，有可能因而選出正確的解題策略；相反地，閱讀有困難的學生可能受冗長題目，造成認知的負荷，分辨不清題目與選項的重要訊息，而失去耐心向問題挑戰，進而造成解題失敗。

傳統的成就評量往往只能測驗學生

的解題結果，但透過本研究所設計的試題題型可以測驗學生各階段的解題歷程，發現學生的解題困難可能在哪個階段，並透過學生的錯誤選項，教師可以推測其解題想法，做為改善教學的依據，且可再透過複本試題來評估學生學習的結果是否有所改善。

二、設計「驗算與回顧」的子題，以評量學生的監控能力

雖然研究者以 Polya 的解題歷程做為分析學生解題的向度，但研究者未設計「驗算與回顧(looking back)」階段之試題，以檢驗學生是否能應用相關解題技巧來驗證自己的答案。日後，如能設計此階段之子題，數學解題的量表將更完整，「以 Polya 的解題歷程設計的解題量表」可算是未來的研究機會。

三、設計同構試題難度很高，可以當成下個研究題材

理論上正複本的試題設計，要考慮難度是否相當。題目中故事情境相同容易喚起學生解題的舊經驗，複本中故事情境與正本類似，其實是再次解相同的問題，已不算是解題了。研究者認為難度是否相當，主要取決於問題的結構是否相同，不在於問題中的故事情境。而設計結構相同、問題情境不同的同構試題並非容易，命題者要考慮要研發這類型的試題須投入更多的資源與心力，才能使試題更臻完備。

致謝

本研究獲得國科會專題研究計畫補助，計畫編號 NSC 98-2511-S-415-003-MY3，特誌申謝。文中所提論點屬於二位研究者的意見，並不代表國科會的立場。量表施測期間蒙多所學校師生的幫忙，在此一併感謝。最後，感謝二位匿名審查委員的寶貴意見，使本文更臻完善。

參考文獻

李源順、王美娟、蘇意雯、陳怡仲(2009)。臺灣學生在 TIMSS 的數學表現及其啟示。**研習資訊，26**(6)，61-71。

林碧珍(2001)。協助教師實踐學生數學學習歷程檔案之行動研究。**新竹師院學報，14**，163-213。

陳怡靜(2012)。九年級數學解題能力量表之編製。未出版碩士論文，國立嘉義大學數理教育所，嘉義。

教育部(2008)。**97 年國民中小學九年一貫課程綱要(一百學年度實施)**。台北：教育部。線上檢索日期：2012 年 4 月 18 日。網址：*http://www.edu.tw/eje/content.aspx?site_content_sn=15326*

黃敏晃(1990)。**規律的尋求**。台北：心理出版社。

黃敏晃(1991)。淺談數學解題。**教與學，23**，2-15。

劉秋木(1996)。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。

Barba, R. H. (1990). Problem solving pointers. *Science Teacher*, 57(7), 32-35.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving : Multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K., & Kroll, D. L. (1996). Evaluation: A new vision. In D. V. Lambdin, P. E. kehle, & R. V. Preston (Eds.) Emphasis on assessment: Reading from NCTM's school-based journals (pp. 3-8). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (pp.458-460). New York: Freeman.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (pp.458-460). New York: Freeman.

Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, P. E. (1990). Beyond problem solving: Problem posing. In J. T. Cooney, R.C. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (82-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*.Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (2006)。*怎樣解題*(蔡坤憲譯)。台北：天下遠見。(原著出版於1945)。

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* **13**,124-139.