一個三角不等式的幾種證明

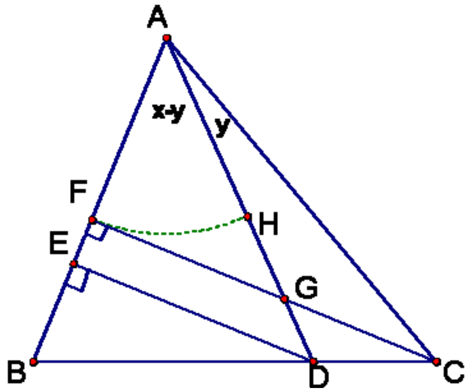
梁勇能

國立台中第一高級中學

壹、起源

筆者在偶然的情況下看到大陸數學家張景中，利用面積的方式證明下面的不等式：『當 $0 \le y \le x \le \frac{\pi}{2}$，則 $\sin x - \sin y \ge (x-y)\cos x$』，他利用面積的概念，建構了一個等腰三角形 ABD。

頂角∠BAD=x-y，腰 $\overline{AB} = \overline{AD} = c$，在 $\overline{BD}$ 的延長線上取一點 C，使得 $\overline{AC} = b$，∠CAB=x，則∠CAD=y。假設 $\overline{DE}, \overline{CF}$ 分別是△ABD、△ABC 的高，G 點是 $\overline{AD}, \overline{CF}$ 的交點，以 A 為圓心，$\overline{AF}$ 為半徑畫弧交 $\overline{AD}$ 於 H 點。



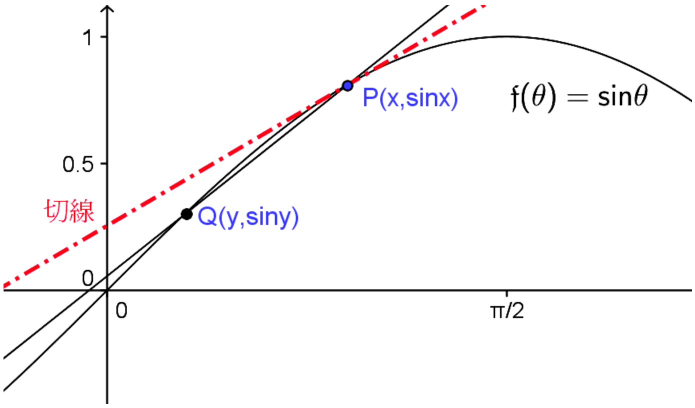
由△ABC－△ADC=△ABD，可得 $\frac{1}{2}bc\sin x - \frac{1}{2}bc\sin y = \frac{1}{2}c \cdot \overline{DE}$

$$\therefore \sin x - \sin y = \frac{\overline{DE}}{b} \ge \frac{\overline{FG}}{b} \ge \frac{\overset{\frown}{FH}}{b} = \frac{1}{b}(x-y)\cdot \overline{AF} = \frac{1}{b}(x-y)b\cos x = (x-y)\cos x$$

這種數形結合的解法，的確讓人著迷!

貳、筆者又另外從幾種不同面向來證明此題，此題真是富含寶藏！

證明一：利用導數的概念



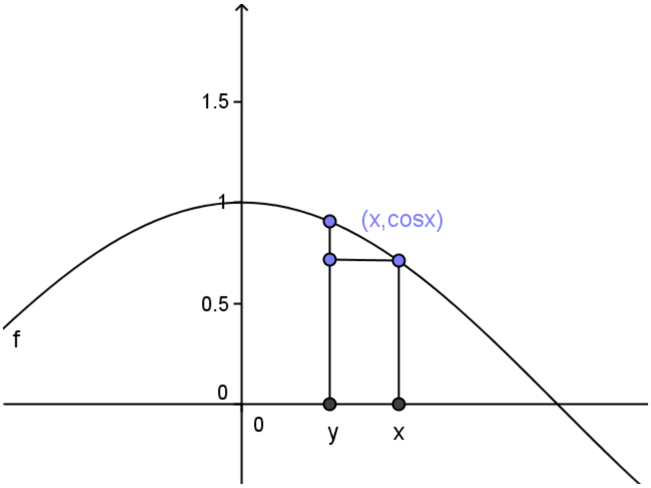
考慮函數 $f(\theta)=\sin\theta$ 在 P(x,sin$x$) ($0\le x\le\frac{\pi}{2}$)點的切線斜率為 $f'(x)=\cos x$ ，任取該曲線的其他一點 Q(y,sin$y$) (y<x))，則過 P、Q 兩點的直線斜率為 $\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$ 。

又因為 $f(\theta)=\sin\theta$ 在 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 範圍內為凹口向下的增函數，因此，$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\ge\cos x$，當 $y\to x$ 時，P(x,sin$x$)、Q(y,sin$y$) 兩點之間的斜率會慢慢逼近切線斜率。當 $y=x$ 時，$\sin x-\sin y=(x-y)\cos x=0$ ，等式成立。

證明二：利用積分的概念

$\sin x-\sin y$ 可表示 $f(\theta)=\cos\theta$ 在 $[y,x]$ 範圍內與 x 軸所圍成的面積。其值為 $\int_y^x\cos\theta d\theta=\sin\theta|_y^x=\sin x-\sin y$

而 $(x-y)\cos x$ 表示寬度 x–y，高度 cos$x$ 的長方形面積，



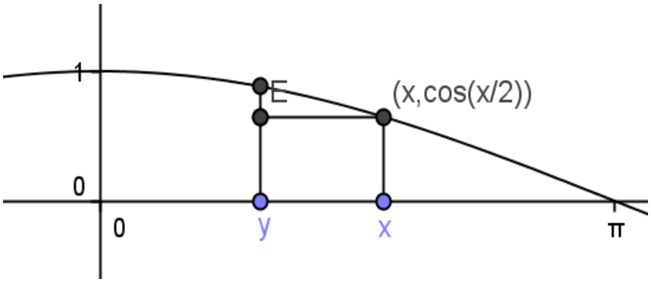
由圖可知， $\sin x - \sin y \ge (x-y)\cos x$ 。當 $y=x$ 時，等式成立。

甚至，可以將此概念推至旋轉體體積來證明。

考慮 $f(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{2}$ 在$[y,x]$範圍內繞 x 軸旋轉所圍成的旋轉體體積。其值為

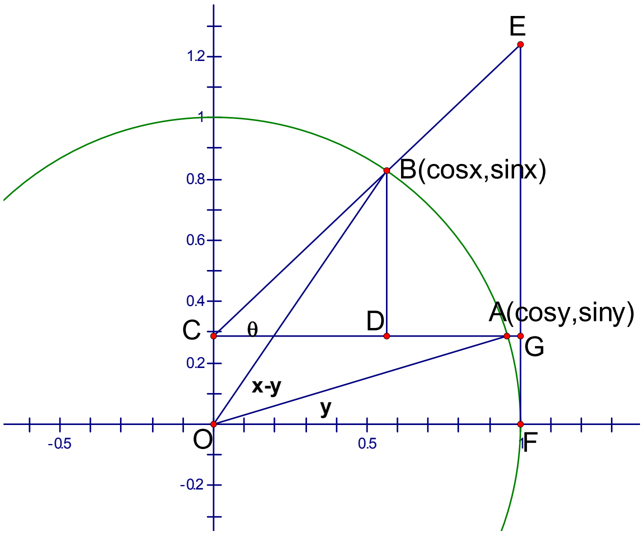
$$\int_y^x \pi[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_y^x \pi[\cos\frac{\theta}{2}]^2\,d\theta = \int_y^x \pi\frac{1+\cos\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi\theta}{2}+\frac{\pi\sin\theta}{2}\Big|_y^x = \frac{\pi}{2}(x-y)+\frac{\pi}{2}(\sin x-\sin y)$$

而由寬度 $x-y$，高度 $\cos\dfrac{x}{2}$ 的長方形繞 x 軸旋轉所形成的圓柱體體積為 $\pi\cos^2\dfrac{x}{2}(x-y)=\pi(x-y)(\dfrac{1+\cos x}{2})$，由圖可知，$\dfrac{\pi}{2}(x-y)+\dfrac{\pi}{2}(\sin x-\sin y)\ge\dfrac{\pi}{2}(x-y)(1+\cos x)$ 可化簡得 $\sin x-\sin y\ge(x-y)\cos x$



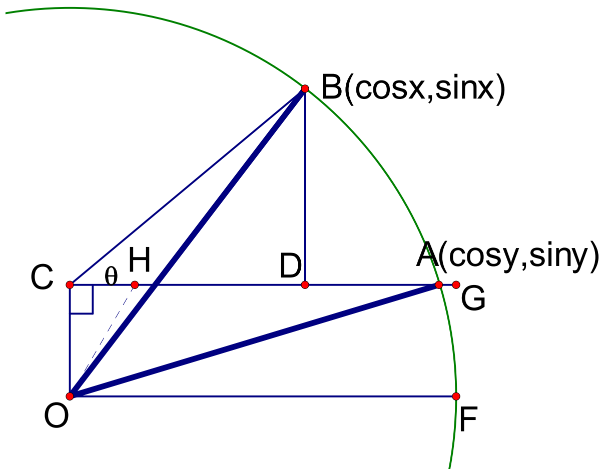
證明三：利用線段成比例的概念

原式可化為 $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x}\ge\dfrac{x-y}{1}$，考慮單位圓內圖形，$\angle AOF=y$，$\angle BOF=x$，則 $\angle AOB=x-y$

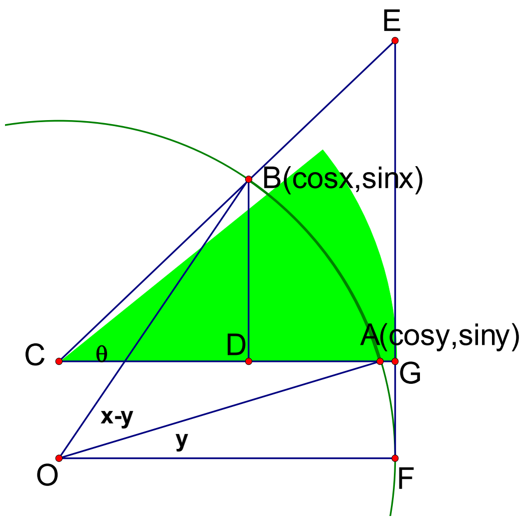


$A(\cos y，\sin y)$　$B(\cos x，\sin x)$，過 A 點做 $\overline{AC}//\overline{OF}$，交 y 軸於點 C，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ 於 D 點，$\overline{FE}$ 為過 $F(1，0)$ 的切線段且 $\overline{CG}\perp\overline{EF}$ 於 G 點。直角 $\triangle BCD$、直角 $\triangle ECG$ 中，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{CG}}\Rightarrow\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x}=\dfrac{\overline{EG}}{1}$

考慮 $\triangle ACO$，$\triangle BCO$ 中，$\because$ $\overline{AO}=\overline{BO}$, $\overline{CO}=\overline{CO}$，由樞紐定理可得 $\overline{AC}>\overline{BC}$，在 $\overline{AC}$ 上取 $\overline{AH}=\overline{BC}$。在 $\triangle AHO$，$\triangle BCO$ 中，$\overline{AO}=\overline{BO}=1, \overline{AH}=\overline{BC}$，因為 $\overline{HO}$(斜邊) $>\overline{CO}$，所以由樞鈕定理定理知，$\angle OAH>\angle CBO$，可推知 $\angle AOB=x-y<\angle ACB$



因為 $\overline{OA}=\overline{CG}=1$，$\angle AOB<\angle ACB$，因此，若將扇形 OAB 的頂點 O 移至 C 點，$\overline{OA}$ 和 $\overline{CG}$ 重合，則 $\triangle CGE$ 將蓋住扇形 OAB（如圖），即 $\triangle CGE$ 面積 $>$ 扇形 OAB 面積 $\Rightarrow\dfrac{1}{2}\times\overline{CG}\times\overline{EG}>\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times(x-y)\Rightarrow\overline{EG}>x-y$，故 $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x}=\dfrac{\overline{EG}}{1}\geq\dfrac{x-y}{1}\geq x-y$



參、結論

由證明的過程中我們可以發現，此題可以利用函數的凹口性，得到證明。基於這個理由，我們同樣可以得到其他類似的命題，例如：$\cos x - \cos y \geq (y-x)\sin x$；$\tan x - \tan y \leq (x-y)\sec^2 x$ ...，在解題的過程中，試著從不同的角度切入，往往有意想不到的收穫呢！

參考文獻

張景中，曹培生（民 85），從數學教育到教育數學，台北：九章出版社