三角形五心相關比例的探討

蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

壹、前言

三角形上面的點和線之間的關係，一直都是中學幾何題材的重點所在，中學數學已論及五心的許多性質（未談及傍心），諸如：重心 G 與頂點的連線三等分三角形、外心到三頂點等距離、內心到三邊等距離、重心將中線分成 2:1 的兩段長度…等。其中，筆者關注的點在於五心各性質的類推，例如：外心到三頂點等距離，即 1：1：1，其餘四心到三頂點的距離雖然不一定相等，但是否成比例？同樣的，內心除外的四心到三邊的距離是否也成比例關係？從源頭可溯及古希臘的「孟氏定理」出發，本文推導出由三角形五心所得出的各相關距離、長度和面積的比例關係。

如下圖 1 所示，我們考慮的三角形 ΔABC 之三邊長 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，且 P, Q, R 分別為直線 $\overleftrightarrow{BC}$，$\overleftrightarrow{AC}$，$\overleftrightarrow{AB}$ 上的點。當 $\overleftrightarrow{AP}$，$\overleftrightarrow{BQ}$，$\overleftrightarrow{CR}$ 三線相交於一點時，以 Z 點表示此交點。相關的長度、距離定義如下：令 Z 點到 A, B, C 三點的距離分別為 $\overline{ZA}=u_1$，$\overline{ZB}=v_1$，$\overline{ZC}=w_1$；Z 點到 P, Q, R 三點的距離分別為 $\overline{ZP}=u_2$，$\overline{ZQ}=v_2$，$\overline{ZR}=w_2$；Z 點到 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 三邊的距離分別為 d_1，d_2，d_3. 再令∠A、∠B 及∠C 內的傍心分別為 A',B',C'.

本文將於第二節介紹孟氏定理及推導後續討論所需的相關引、系理，並於第三節針對五心相關距離、長度、和面積的比例關係進行探討，在此先將第三節所得的結果列表如表 1 a, b 及表 2 a, b 所示。其中，因為直角三角形的外心在斜邊中點，垂心為三角形的頂點，為方便起見，本文討論外心及垂心的相關性質時，將排除直角三角形的情況。另外，表 $2a$ 中外心的 u_1/u_2，v_1/v_2，w_1/w_2，$u_2:v_2:w_2$ 之函數比僅限於銳角三角形。

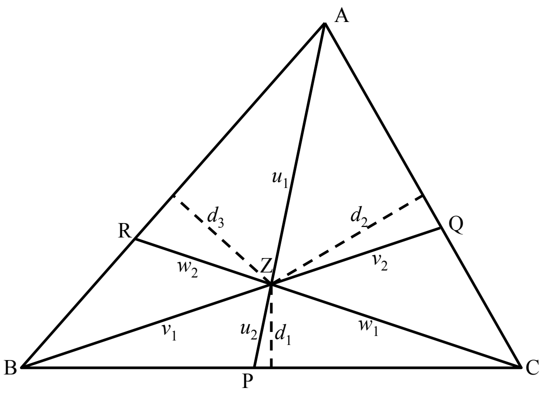

圖 1

*為本文通訊作者

表 1 a

	u_1/u_2 v_1/v_2 w_1/w_2	$u_1:v_1:w_1$	$u_2:v_2:w_2$
重心	2 2 2	$\sqrt{a^2+4bc\cos A}:\sqrt{b^2+4ac\cos B}:\sqrt{c^2+4ab\cos C}$	
外心	$\frac{\lvert b\cos B\rvert+\lvert c\cos C\rvert}{\lvert a\cos A\rvert}$ $\frac{\lvert a\cos A\rvert+\lvert c\cos C\rvert}{\lvert b\cos B\rvert}$ $\frac{\lvert a\cos A\rvert+\lvert b\cos B\rvert}{\lvert c\cos C\rvert}$	$1:1:1$	$\frac{\lvert a\cos A\rvert}{\lvert b\cos B\rvert+\lvert c\cos C\rvert}:\frac{\lvert b\cos B\rvert}{\lvert a\cos A\rvert+\lvert c\cos C\rvert}:\frac{\lvert c\cos C\rvert}{\lvert a\cos A\rvert+\lvert b\cos B\rvert}$
垂心	$\left\lvert\frac{b\sec B+c\sec C}{a\sec A}\right\rvert$ $\left\lvert\frac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\right\rvert$ $\left\lvert\frac{a\sec A+b\sec B}{c\sec C}\right\rvert$	$\lvert\cos A\rvert:\lvert\cos B\rvert:\lvert\cos C\rvert$	$\lvert\sec A\rvert:\lvert\sec B\rvert:\lvert\sec C\rvert$
傍心 A',B',C'	$\frac{b+c}{a}$ $\frac{a+c}{b}$ $\frac{a+b}{c}$	$\overline{A'A}:\overline{B'B}:\overline{C'C}=$ $\frac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)}:\frac{\cos(B/2)}{b(a-b+c)}:\frac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$	$\overline{A'P}:\overline{B'Q}:\overline{C'R}=$ $\frac{\cos(A/2)}{(b+c)(-a+b+c)}:\frac{\cos(B/2)}{(a+c)(a-b+c)}:\frac{\cos(C/2)}{(a+b)(a+b-c)}$
內心		$\frac{\cos(A/2)}{a}:\frac{\cos(B/2)}{b}:\frac{\cos(C/2)}{c}$	$\frac{\cos(A/2)}{b+c}:\frac{\cos(B/2)}{a+c}:\frac{\cos(C/2)}{a+b}$
傍心 B'	$\frac{c-b}{a}$ $\frac{a+c}{b}$ $\frac{a-b}{c}$	$\frac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)}:\frac{\cos(B/2)\cot(B/2)}{b(a-b+c)}:\frac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$	$\frac{\sin(A/2)}{c-b}:\frac{\cos(B/2)}{a+c}:\frac{\sin(C/2)}{a-b}$

表 1 b

	$d_1:d_2:d_3$	$\triangle BCZ:\triangle ACZ:\triangle ABZ$
重心	$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$	$1:1:1$
外心	$\lvert\cos A\rvert:\lvert\cos B\rvert:\lvert\cos C\rvert$	$\lvert a\cos A\rvert:\lvert b\cos B\rvert:\lvert c\cos C\rvert$
垂心	$\lvert\sec A\rvert:\lvert\sec B\rvert:\lvert\sec C\rvert$	$\lvert a\sec A\rvert:\lvert b\sec B\rvert:\lvert c\sec C\rvert$
傍心 A',B',C'	$d(A',\overline{BC}):d(B',\overline{AC}):d(C',\overline{AB})=$ $\frac{\cot(A/2)}{(-a+b+c)^2}:\frac{\cot(B/2)}{(a-b+c)^2}:\frac{\cot(C/2)}{(a+b-c)^2}$	$\Delta A'BC:\Delta AB'C:\Delta ABC'=$ $\frac{a\cot(A/2)}{(-a+b+c)^2}:\frac{b\cot(B/2)}{(a-b+c)^2}:\frac{c\cot(C/2)}{(a+b-c)^2}$
內心	$1:1:1$	$a:b:c$
傍心 B'		

表 2 a

	u_1/u_2 v_1/v_2 w_1/w_2	$u_1 : v_1 : w_1$	$u_2 : v_2 : w_2$
重心	2 2 2	$\sqrt{-a^2+2b^2+2c^2} : \sqrt{2a^2-b^2+2c^2} : \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$	
外心	$\frac{a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4}{a^2(-a^2+b^2+c^2)}$ $\frac{a^2b^2+b^2c^2+2a^2c^2-a^4-c^4}{b^2(a^2-b^2+c^2)}$ $\frac{a^2c^2+b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ （僅限銳角三角形）	$1:1:1$	$\frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4}$: $\frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{a^2b^2+b^2c^2+2a^2c^2-a^4-c^4}$: $\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2c^2+b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4}$ （僅限銳角三角形）
垂心	$\left\lvert\frac{2a^2(-a^2+b^2+c^2)}{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}\right\rvert$ $\left\lvert\frac{2b^2(a^2-b^2+c^2)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}\right\rvert$ $\left\lvert\frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}\right\rvert$	$\lvert a(-a^2+b^2+c^2)\rvert : \lvert b(a^2-b^2+c^2)\rvert : \lvert c(a^2+b^2-c^2)\rvert$	$\left\lvert\frac{1}{a(-a^2+b^2+c^2)}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{b(a^2-b^2+c^2)}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)}\right\rvert$
傍心 A',B',C'	$\frac{b+c}{a}$ $\frac{a+c}{b}$ $\frac{a+b}{c}$	$\overline{A'A} : \overline{B'B} : \overline{C'C} =$ $\frac{1}{\sqrt{a(-a+b+c)}} : \frac{1}{\sqrt{b(a-b+c)}} : \frac{1}{\sqrt{c(a+b-c)}}$	$\overline{A'P} : \overline{B'Q} : \overline{C'R} =$ $\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{-a+b+c}} : \frac{\sqrt{b}}{(a+c)\sqrt{a-b+c}} : \frac{\sqrt{c}}{(a+b)\sqrt{a+b-c}}$
內心		$\sqrt{\frac{-a+b+c}{a}} : \sqrt{\frac{a-b+c}{b}} : \sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$	$\frac{\sqrt{a(-a+b+c)}}{b+c} : \frac{\sqrt{b(a-b+c)}}{a+c} : \frac{\sqrt{c(a+b-c)}}{a+b}$
傍心 B'	$\frac{c-b}{a}$ $\frac{a+c}{b}$ $\frac{a-b}{c}$	$\sqrt{\frac{a+b-c}{a}} : \sqrt{\frac{a+b+c}{b}} : \sqrt{\frac{-a+b+c}{c}}$	$\frac{\sqrt{a(a+b-c)}}{c-b} : \frac{\sqrt{b(a+b+c)}}{a+c} : \frac{\sqrt{c(-a+b+c)}}{a-b}$

表 2 b

	$d_1 : d_2 : d_3$	△BCZ : △ACZ : △ABZ
重心	$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$	$1:1:1$
外心	$\lvert a(-a^2+b^2+c^2)\rvert : \lvert b(a^2-b^2+c^2)\rvert : \lvert c(a^2+b^2-c^2)\rvert$	$\lvert a^2(-a^2+b^2+c^2)\rvert : \lvert b^2(a^2-b^2+c^2)\rvert : \lvert c^2(a^2+b^2-c^2)\rvert$
垂心	$\left\lvert\frac{1}{a(-a^2+b^2+c^2)}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{b(a^2-b^2+c^2)}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{a^2-b^2+c^2}\right\rvert : \left\lvert\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right\rvert$
傍心 A',B',C'	$d(A',\overline{BC}) : d(B',\overline{AC}) : d(C',\overline{AB}) =$ $\frac{1}{-a+b+c} : \frac{1}{a-b+c} : \frac{1}{a+b-c}$	$\Delta A'BC : \Delta AB'C : \Delta ABC' =$ $\frac{a}{-a+b+c} : \frac{b}{a-b+c} : \frac{c}{a+b-c}$
內心	$1:1:1$	$a:b:c$
傍心 B'		

大致而言，表 1 的關係式用到長度、角度量，但其式子較為簡潔；相對的，表 2 的關係式較為複雜，但僅用了長度量。其中，特別的是僅用長度量時，傍心的 $d_1 : d_2 : d_3$ 及 $\Delta BCZ : \Delta ACZ : \Delta ABZ$ 反而得到較為簡潔、好用的表示。

貳、孟氏定理及相關引、系理

孟氏定理闡述三角形上三點共線的充要條件，如定理 1 所示，證明從略。

定理 1：

如圖 2 所示，三點 P, Q, R 共線，若且唯若 $\dfrac{\overline{AR}\times\overline{BP}\times\overline{CQ}}{\overline{RB}\times\overline{PC}\times\overline{QA}}=1$.

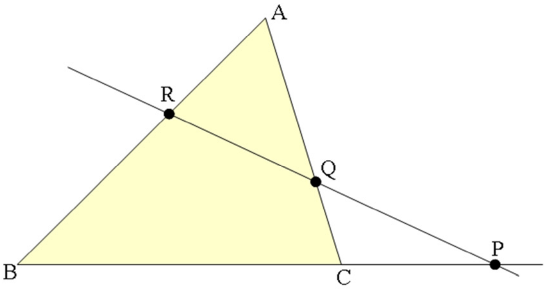

圖 2

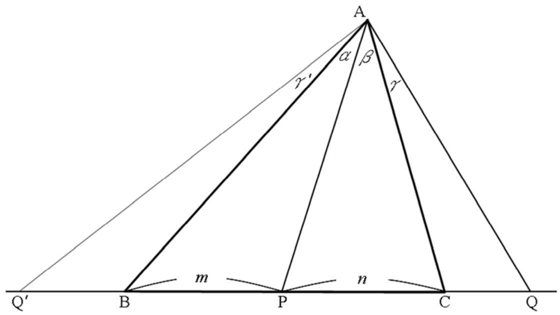

圖 3

為後續各項比例的探討，引理 2 提供了所需的若干關係式。若引理 2 中的 $\overline{AP}$、$\overline{AQ}$、$\overline{AQ'}$ 為中線或內、外角角平分線時，前述結論可進一步簡化（系理 3）。利用餘弦定理、半角公式等，可將 ΔABC 之內角的三角函數比轉換成長度比（引理 4），並從而由表 1 a, b 得出表 2 a, b。

引理 2：

如圖 3，在 ΔABC 中，直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上依序有 Q', B, P, C, Q 五點，令$(\overline{BP}, \overline{CP}) = (m, n)$, $(\angle BAP, \angle CAP) = (\alpha, \beta)$, $(\angle CAQ, \angle BAQ') = (\gamma, \gamma')$，則

1. $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\dfrac{c\sin\alpha}{b\sin\beta}$.

2. $\overline{AP}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha+b\sin\beta}$, $\overline{AP}^2=\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$.

3. $\overline{AQ}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin(\alpha+\beta+\gamma)-b\sin\gamma}$, $\overline{AQ'}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{b\sin(\alpha+\beta+\gamma')-c\sin\gamma'}$.

【證明】

設 $\overline{AP}=x$， $\overline{AQ}=y$， $\overline{AQ'}=y'$

1.　因 $\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\dfrac{(cx\sin\alpha)/2}{(bx\sin\beta)/2}$，化簡得 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\dfrac{c\sin\alpha}{b\sin\beta}$

2.(1)由 $\Delta ABC=\Delta ABP+\Delta ACP$ ，得 $\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{2}=\dfrac{cx\sin\alpha}{2}+\dfrac{bx\sin\beta}{2}$

化簡得 $\overline{AP}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha+b\sin\beta}$

(2) 設 $\angle APB=\theta,\angle APC=\pi-\theta$，由餘弦定理，在 ΔABP 中，得 $\cos\theta=\dfrac{m^2+x^2-c^2}{2mx}$，

在 ΔACP 中，得 $\cos\theta=\dfrac{b^2-n^2-x^2}{2nx}$,得 $\dfrac{m^2+x^2-c^2}{2mx}=\dfrac{b^2-n^2-x^2}{2nx}$,

化簡得 $\overline{AP}^2=\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$.

3.　由 $\Delta ABQ=\Delta ABC+\Delta ACQ$，得 $\dfrac{cy\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{2}+\dfrac{by\sin\gamma}{2}$,

化簡得 $\overline{AQ}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin(\alpha+\beta+\gamma)-b\sin\gamma}$.

同理 $1=\Delta ACQ'=\Delta ABC+\Delta ABQ'$,得 $\dfrac{by'\sin(\alpha+\beta+\gamma')}{2}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{2}+\dfrac{cy'\sin\gamma'}{2}$

化簡得 $\overline{AQ'}=\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{b\sin(\alpha+\beta+\gamma')-c\sin\gamma'}$. 證畢

系理 3： ΔABC 中：

1.　若 $\overline{AP}$ 為中線，則 $\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+4bc\cos A}}{2}$

2.　若 $\overline{AP}$ 為內角平分線，則 $\overline{AP}=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

3.　若 $c>b$，則 $\angle A$ 的外角平分線與 $\overleftrightarrow{BC}$ 相交 Q,且 $\overline{AQ}=\dfrac{2bc}{c-b}\sin\dfrac{A}{2}$， $\overline{CQ}=\dfrac{ab}{c-b}$.

【證明】

1.　由引理 2.2，得 $\overline{AP}^2=\dfrac{c^2a+b^2a}{2a}-(\dfrac{a}{2})^2=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$,

得 $\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}{2}$ 又 $b^2+c^2=a^2+2bc\cos A$，故得 $\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{a^2+4bc\cos A}}{2}$.

2. 設 $\angle BAP=\angle CAP=\alpha=\dfrac{\angle A}{2}$,

由引理 2.2，得 $\overline{AP}=\dfrac{bc\sin 2\alpha}{b\sin\alpha+c\sin\alpha}=\dfrac{2bc\sin\alpha\cos\alpha}{(b+c)\sin\alpha}=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

3.(1)將 $\angle A+2\gamma=\pi$ 代入引理 2.3，得 $\overline{AQ}=\dfrac{bc\sin(\pi-2\gamma)}{c\sin(\pi-\gamma)-b\sin\gamma}$,

化簡得 $\overline{AQ}=\dfrac{2bc\sin\gamma\cos\gamma}{c\sin\gamma-b\sin\gamma}=\dfrac{2bc}{c-b}\cos\gamma=\dfrac{2bc}{c-b}\sin\dfrac{A}{2}$.

(2) 如圖 3，由引理 2.1，得 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AB}\sin A}{\overline{AQ}\sin\gamma}$.其中 $\overline{AQ}\times\sin\gamma=\dfrac{2bc}{c-b}\sin\dfrac{A}{2}\times\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{bc}{c-b}\sin A$,

故得 $\overline{CQ}=\dfrac{ab}{c-b}$ 證畢

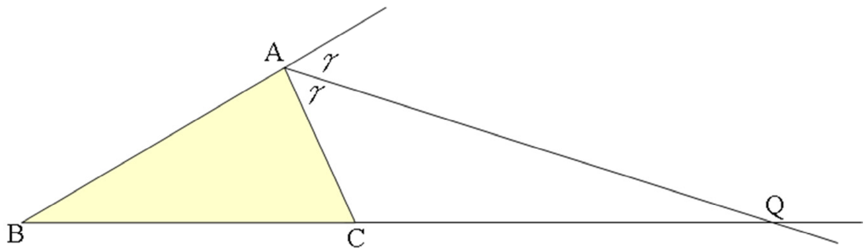

圖 3

引理 4：

在 ΔABC 中：

1. $\cos A:\cos B:\cos C=a(-a^2+b^2+c^2):b(a^2-b^2+c^2):c(a^2+b^2-c^2)$

2. $\cos\dfrac{A}{2}:\cos\dfrac{B}{2}:\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{a(-a+b+c)}:\sqrt{b(a-b+c)}:\sqrt{c(a+b-c)}$,

$\cot\dfrac{A}{2}:\cot\dfrac{B}{2}:\cot\dfrac{C}{2}=-a+b+c:a-b+c:a+b-c$

3. $\dfrac{b\sec B+c\sec C}{a\sec A}=\dfrac{2a^2(-a^2+b^2+c^2)}{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$，$\dfrac{b\cos B+c\cos C}{a\cos A}=\dfrac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-b^4-c^4}{a^2(-a^2+b^2+c^2)}$.

$\dfrac{b\sec B+c\sec C}{a}:\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b}:\dfrac{a\sec A+b\sec C}{c}=\cos A:\cos B:\cos C$

【證明】

1.　由餘弦定理得：$\cos A=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

得 $\cos A:\cos B:\cos C=a(-a^2+b^2+c^2):b(a^2-b^2+c^2):c(a^2+b^2-c^2)$

2.　因 $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{4bc}}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}}$

得 $\cot\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{(a-b+c)(a+b-c)}}$

同理　$\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac}}$，$\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$，

$\cot\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)}{(-a+b+c)(a+b-c)}}$，$\cot\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a-b+c)}}$，

得　$\cos\dfrac{A}{2}:\cos\dfrac{B}{2}:\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{a(-a+b+c)}:\sqrt{b(a-b+c)}:\sqrt{c(a+b-c)}$.

且 $\cot\dfrac{A}{2}:\cot\dfrac{B}{2}:\cot\dfrac{C}{2}=-a+b+c:a-b+c:a+b-c$.

3.　由餘弦定理得 $\sec A=\dfrac{2bc}{-a^2+b^2+c^2}$，$\sec B=\dfrac{2ac}{a^2-b^2+c^2}$，$\sec C=\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}$

依此方法，再根據一般的推演即可完成，過程省略。

參、五心的相關比例

我們在這一節裡，針對當交點 Z 為內心（I）、重心（G）、外心（O）、垂心（H）、傍心（A',B',C'）時，算出 $u_i:v_i:w_i\ (i=1,2)$，$d_1:d_2:d_3$ 等比例關係及 u_1/u_2，v_1/v_2，w_1/w_2 之值以及相關三角形面積比。其中，例行性運算或中學階段熟悉的性質的證明過程從略。

系理 5： 如圖 4，令 $Z=I$ 為 ΔABC 的內心，

1.　$u_1/u_2=(b+c)/a$，$v_1/v_2=(a+c)/b$，$w_1/w_2=(a+b)/c$.

2.　$u_1:v_1:w_1=\dfrac{1}{a}\cos\dfrac{A}{2}:\dfrac{1}{b}\cos\dfrac{B}{2}:\dfrac{1}{c}\cos\dfrac{C}{2}$，$u_2:v_2:w_2=\dfrac{1}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}:\dfrac{1}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}:\dfrac{1}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$.

3.　$d_1:d_2:d_3=1:1:1$.

4.　$\Delta BCI:\Delta ACI:\Delta ABI=a:b:c$.

【證明】

1. 由孟氏定理 $\frac{\overline{BI}}{\overline{IQ}}\times\frac{\overline{QC}}{\overline{CA}}\times\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=1$，得 $\frac{v_1}{v_2}\times\frac{a}{a+c}\times\frac{b}{a}=1$，故得 $v_1/v_2=(a+c)/b$.

   同理 $u_1/u_2=(b+c)/a$， $w_1/w_2=(a+b)/c$.

2. 由系理 3.2 得 $\overline{BQ}=v_1+v_2=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$ 且 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{a+c}{b}$，

   得 $v_1.=\frac{a+c}{a+b+c}\overline{BQ}=\frac{a+c}{a+b+c}\times\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}=\frac{2ac}{a+b+c}\cos\frac{B}{2}$，

   $v_2=\frac{b}{a+b+c}\overline{BQ}=\frac{b}{a+b+c}\times\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}=\frac{2abc}{(a+b+c)(a+c)}\cos\frac{B}{2}$

   同理 $u_1=\frac{2bc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}$， $u_2=\frac{2abc}{(a+b+c)(b+c)}\cos\frac{A}{2}$，

   $w_1=\frac{2ab}{a+b+c}\cos\frac{C}{2}$， $w_2=\frac{2abc}{(a+b+c)(a+b)}\cos\frac{C}{2}$.

   化簡後可得 $u_1:v_1:w_1=\frac{1}{a}\cos\frac{A}{2}:\frac{1}{b}\cos\frac{B}{2}:\frac{1}{c}\cos\frac{C}{2}$

   $u_2:v_2:w_2=\frac{1}{b+c}\cos\frac{A}{2}:\frac{1}{a+c}\cos\frac{B}{2}:\frac{1}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ 證畢。

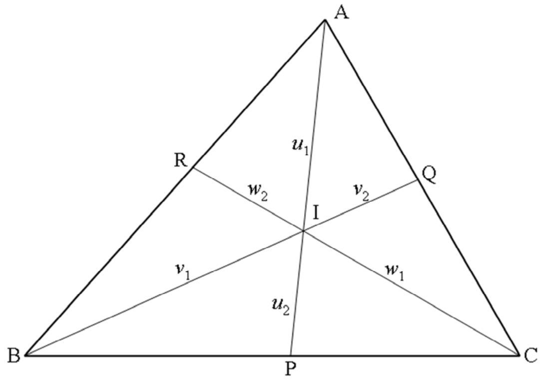

圖 4

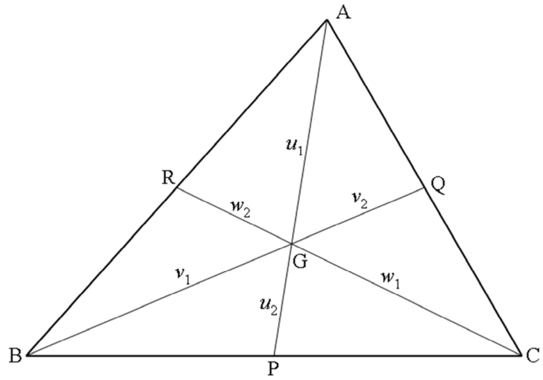

圖 5

系理 6： 如圖 5，令 $Z=G$ 為 ΔABC 的重心，

1. $u_1/u_2=v_1/v_2=w_1/w_2=2$.

2. $u_1:v_1:w_1=u_2:v_2:w_2=\sqrt{a^2+4bc\cos A}:\sqrt{b^2+4ac\cos B}:\sqrt{c^2+4ab\cos C}$

3.　$\Delta ABG:\Delta BCG:\Delta ABG=1:1:1$.

4.　$d_1:d_2:d_3=1/a:1/b:1/c$.

【證明】

1.　由孟氏定理 $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GQ}}\times\dfrac{\overline{QC}}{\overline{CA}}\times\dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=1$，得 $\dfrac{v_1}{v_2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1}=1$，故得 $v_1/v_2=2$.

同理 $u_1/u_2=w_1/w_2=2$.

2.　由系理 6.1 得 $u_1=\dfrac{2}{3}\overline{AP}$，$v_1=\dfrac{2}{3}\overline{BQ}$, $w_1=\dfrac{2}{3}\overline{CR}$, $u_2=\dfrac{1}{3}\overline{AP}$, $v_2=\dfrac{1}{3}\overline{BQ}$, $w_2=\dfrac{1}{3}\overline{CR}$.

又由系理 3.1，得 $\overline{AP}:\overline{BQ}:\overline{CR}=\sqrt{a^2+4bc\cos A}:\sqrt{b^2+4ac\cos B}:\sqrt{c^2+4ab\cos C}$

故 $u_1:v_1:w_1=u_2:v_2:w_2=\sqrt{a^2+4bc\cos A}:\sqrt{b^2+4ac\cos B}:\sqrt{c^2+4ab\cos C}$ 證畢。

系理 7：如圖 6 及圖 7，令 $Z=H$ 為 ΔABC 的垂心，

1.　$\dfrac{u_1}{u_2}=\left|\dfrac{b\sec B+c\sec C}{a\sec A}\right|$，$\dfrac{v_1}{v_2}=\left|\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\right|$，$\dfrac{w_1}{w_2}=\left|\dfrac{a\sec A+b\sec B}{c\sec C}\right|$.

2.　$u_2:v_2:w_2=d_1:d_2:d_3=|\sec A|:|\sec B|:|\sec C|$

3.　$u_1:v_1:w_1=|\cos A|:|\cos B|:|\cos C|$.

4.　$\Delta BCH:\Delta ACH:\Delta ABH=a|\sec A|:b|\sec B|:c|\sec C|$

【證明】

設 $\angle CAP=\angle CBQ=\alpha$，$\angle BAP=\angle BCR=\beta$，$\angle ABQ=\angle ACR=\gamma$，

1.　當 ΔABC 為鋭角三角形時，由孟氏定理 $\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HQ}}\times\dfrac{\overline{QC}}{\overline{CA}}\times\dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=1$

得 $\dfrac{v_1}{v_2}\times\dfrac{a\sin\alpha}{a\sin\alpha+c\sin\gamma}\times\dfrac{b\sin\gamma}{a\sin\beta}=1$. 化簡得 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta+c\sin\beta\sin\gamma}{b\sin\alpha\sin\gamma}$,

因 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\angle C$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$，$\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\angle A$，故得 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\ldots(*)$

再得 $\dfrac{\Delta ACH}{\Delta ABC}=\dfrac{v_2}{v_1+v_2}=\dfrac{b\sec B}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}$

同理 $\dfrac{\Delta BCH}{\Delta ABC}=\dfrac{a\sec A}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}$，$\dfrac{\Delta ABH}{\Delta ABC}=\dfrac{c\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}$,

得證 $\Delta BCH:\Delta ACH:\Delta ABH=a\sec A:b\sec B:c\sec C$

因此 $d_1:d_2:d_3=\Delta BCH/a:\Delta ACH/b:\Delta ABH/c=\sec A:\sec B:\sec C\ \ldots(**)$

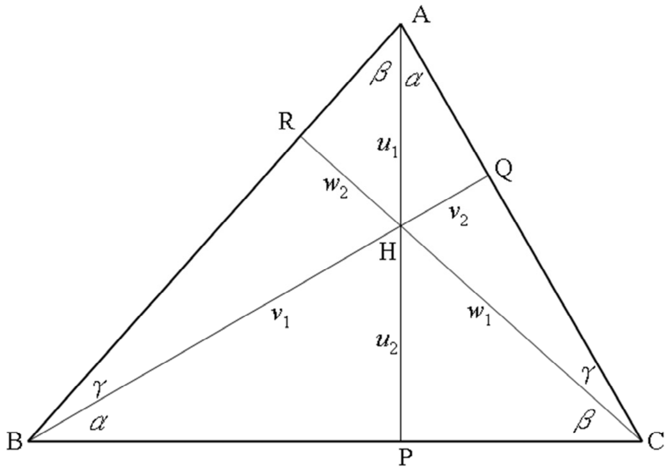

圖 6

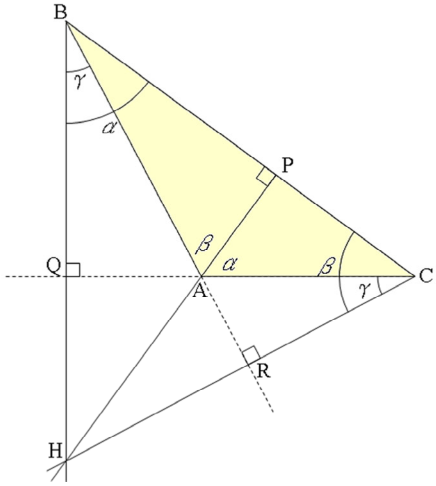

圖 7

當 ΔABC 為鈍角三角形時（設 $\angle A > 90°$ ），由孟氏定理 $\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HQ}}\times\dfrac{\overline{QA}}{\overline{AC}}\times\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=1$

得 $\dfrac{v_1}{v_2}\times\dfrac{c\sin\gamma}{a\sin\alpha-c\sin\gamma}\times\dfrac{b\sin\alpha}{c\sin\beta}=1$. 化簡得 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta-c\sin\beta\sin\gamma}{b\sin\alpha\sin\gamma}$

因 $\alpha=\pi/2-\angle C$, $\beta=\pi/2-\angle B$, $\gamma=\angle A-\pi/2$,

得 $\dfrac{v_1}{v_2}=-\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\ldots(***)$

接下來，透過計算 u_2， v_2， w_2 來求 $u_2:v_2:w_2$ 。

由 $u_2=\overline{HP}=\overline{BP}\cot\angle BHP$, 又 $\overline{BP}=c\sin\beta$, $\angle BHP=\pi/2-\angle HBP=\pi/2-\alpha$,

代入上式得 $u_2=c\sin\beta\cot(\pi/2-\alpha)\ldots$①

由 $v_2=\overline{HQ}=\overline{AQ}\cot\angle AHQ$, 又 $\overline{AQ}=c\sin\gamma$, $\angle AHQ=\pi/2-\angle QAH=\pi/2-\alpha$,

代入上式得 $v_2=\overline{HQ}=c\sin\gamma\cot(\pi/2-\alpha)\ldots$②

由 $w_2=\overline{HR}=\overline{AH}\cos\angle AHR$ 又 $\overline{AH}=\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\angle AHQ}=\dfrac{c\sin\gamma}{\sin(\pi/2-\alpha)}$,

$\angle AHR=\pi/2-\angle HCP=\pi/2-\beta$,

代入上式得 $w_2=\overline{HR}=\dfrac{c\sin\gamma\cos(\pi/2-\beta)}{\sin(\pi/2-\alpha)}\ldots$③

由①②③得

$$u_2:v_2:w_2=c\sin\beta\cot(\pi/2-\alpha):c\sin\gamma\cot(\pi/2-\alpha):\frac{c\sin\gamma\cos(\pi/2-\beta)}{\sin(\pi/2-\alpha)}$$

$$=\sin\beta\tan\alpha:\sin\gamma\tan\alpha:\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\cos\alpha}=\sin\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}:\sin\gamma\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}:\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\gamma}:\frac{1}{\sin\beta}:\frac{1}{\sin\alpha}=-\sec A:\sec B:\sec C\ \ldots(****)$$

由(*)(***)得 $\dfrac{v_1}{v_2}=\left|\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\right|$,

同理 $\dfrac{u_1}{u_2}=\left|\dfrac{b\sec B+c\sec C}{a\sec A}\right|$, $\dfrac{w_1}{w_2}=\left|\dfrac{a\sec A+b\sec B}{c\sec C}\right|$.

由(**)(****)得 $u_2:v_2:w_2=d_1:d_2:d_3=|\sec A|:|\sec B|:|\sec C|$ 證畢。

2. 由 $u_1=\left|\dfrac{b\sec B+c\sec C}{a\sec A}\right|u_2$, $v_1=\left|\dfrac{a\sec A+c\sec C}{b\sec B}\right|v_2$, $w_1=\left|\dfrac{a\sec A+b\sec B}{c\sec C}\right|w_2$.

又 $u_2:v_2:w_2=|\sec A|:|\sec B|:|\sec C|$,

故得 $u_1:v_1:w_1=\dfrac{|b\sec B+c\sec C|}{a}:\dfrac{|a\sec A+c\sec C|}{b}:\dfrac{|a\sec A+b\sec B|}{c}$ （引理 4.3）

$=|\cos A|:|\cos B|:|\cos C|$. 證畢。

系理 8：如圖 8 及圖 9，令 $Z=O$ 為 ΔABC 的外心，

1. $d_1:d_2:d_3=|\cos A|:|\cos B|:|\cos C|$.
2. $\Delta BCO:\Delta CAO:\Delta ABO=a|\cos A|:b|\cos B|:c|\cos C|$
3. $\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{b|\cos B|+c|\cos C|}{a|\cos A|}$, $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{a|\cos A|+c|\cos C|}{b|\cos B|}$, $\dfrac{w_1}{w_2}=\dfrac{a|\cos A|+b|\cos B|}{c|\cos C|}$.
4. $u_1:v_1:w_1=1:1:1$, $u_2:v_2:w_2=\dfrac{a|\cos A|}{b|\cos B|+c|\cos C|}:\dfrac{b|\cos B|}{a|\cos A|+c|\cos C|}:\dfrac{c|\cos C|}{a|\cos A|+b|\cos B|}$

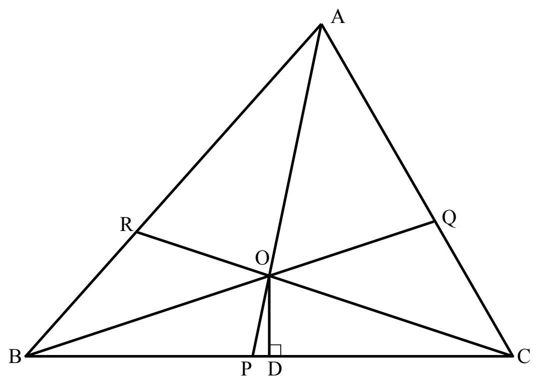

圖 8

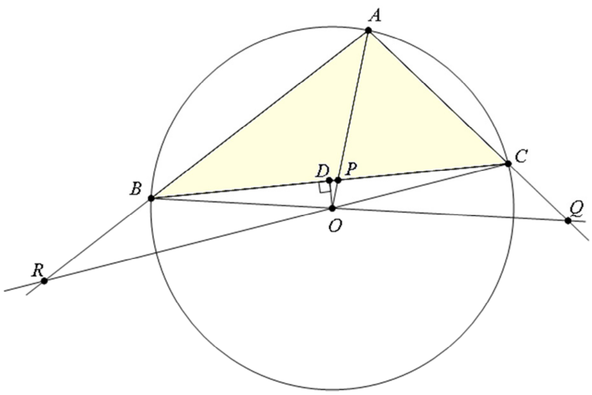

圖 9

【證明】

圓 O 為 ΔABC 之外接圓，半徑為 R，做 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$：

1. 當 ΔABC 為銳角三角形，得 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A$,

   在 ΔBOD 中， $d_1=R\cos\angle BOD=R\cos A$, 同理 $d_2=R\cos B$ 、 $d_3=R\cos C$

   得證 $d_1:d_2:d_3=\cos A:\cos B:\cos C\ldots(*)$

   當 ΔABC 為鈍角三角形($\angle A>90°$), 因 $\angle BOD=\pi-\angle A$, 在 ΔBOD 中，

   $d_1=R\cos\angle BOD=-R\cos A$, 另 $d_2=R\cos B$ 、 $d_3=R\cos C$,

   得證 $d_1:d_2:d_3=-\cos A:\cos B:\cos C\ldots(**)$

   由(*)(**)得 $d_1:d_2:d_3=|\cos A|:|\cos B|:|\cos C|$

2. 假設 $\overline{BC}$ 邊上的高為 d, 當 ΔABC 為銳角三角形時：得 $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}=\frac{u_1+u_2}{u_2}=\frac{d}{d_1}$,

   又 $\frac{d}{d_1}=\frac{\Delta ABC}{\Delta BOC}=\frac{\Delta BOC+\Delta AOC+\Delta AOB}{\Delta BOC}=\frac{ad_1+bd_2+cd_3}{ad_1}$, 得 $\frac{u_1+u_2}{u_2}=\frac{ad_1+bd_2+cd_3}{ad_1}$,

   故 $\frac{u_1}{u_2}=\frac{bd_2+cd_3}{ad_1}\ldots(*)$

   當 ΔABC 為鈍角三角形（ $\angle A>90°$ ）: 得 $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}=\frac{u_1-u_2}{u_2}=\frac{d}{d_1}$,

   又 $\frac{d}{d_1}=\frac{\Delta ABC}{\Delta BOC}=\frac{-\Delta BOC+\Delta AOC+\Delta AOB}{\Delta BOC}=\frac{-ad_1+bd_2+cd_3}{ad_1}$,

   得 $\frac{u_1-u_2}{u_2}=\frac{-ad_1+bd_2+cd_3}{ad_1}$, 故 $\frac{u_1}{u_2}=\frac{bd_2+cd_3}{ad_1}\ldots(**)$

   由(*)(**)及 $d_1:d_2:d_3=|\cos A|:|\cos B|:|\cos C|$, 得 $\frac{u_1}{u_2}=\frac{b|\cos B|+c|\cos C|}{a|\cos A|}$,

   同理 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{a|\cos A|+c|\cos C|}{b|\cos B|}$, $\frac{w_1}{w_2}=\frac{a|\cos A|+b|\cos B|}{c|\cos C|}$.

3. 由 $u_2=\frac{a|\cos A|}{b|\cos B|+c|\cos C|}u_1$, $v_2=\frac{b|\cos B|}{a|\cos A|+c|\cos C|}v_1$, $w_2=\frac{c|\cos C|}{a|\cos A|+b|\cos B|}w_1$

   又 $u_1=v_1=w_1=R$, 得 $u_2:v_2:w_2=\frac{a|\cos A|}{b|\cos B|+c|\cos C|}:\frac{b|\cos B|}{a|\cos A|+c|\cos C|}:\frac{c|\cos C|}{a|\cos A|+b|\cos B|}$

   證畢。

系理 9：

如圖 10，ΔABC 中，$a>c>b$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 內的傍心分別為 A', B' 及 C'，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的內角平分線與對邊分別相交於 P，Q，R 且外角平分線與對邊分別相交於 P'，Q'，R'，則：

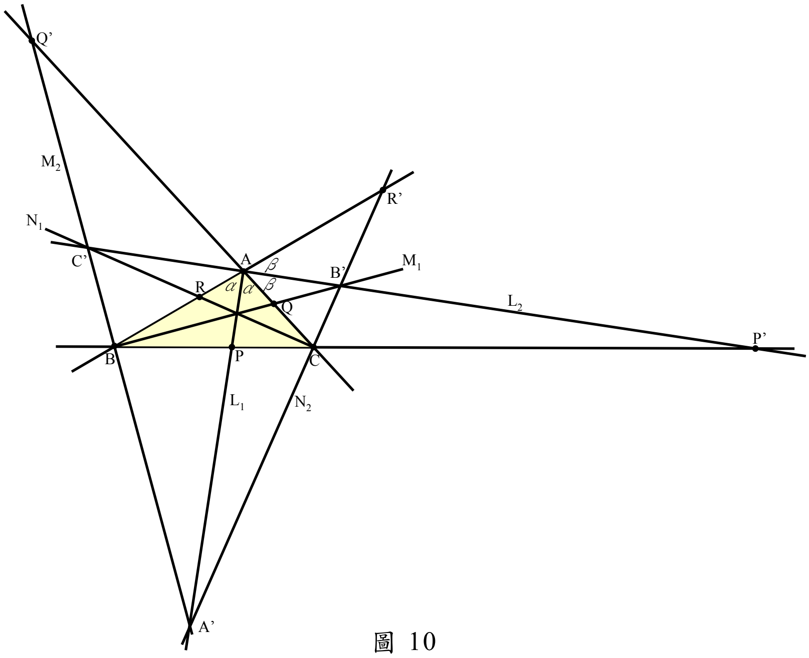

圖 10

1. 對於三傍心 A', B' 及 C' 有，

(1) $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}}=\dfrac{b+c}{a}$，$\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}}=\dfrac{a+c}{b}$，$\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{RC'}}=\dfrac{a+b}{c}$，

(2) $\overline{AA'}:\overline{BB'}:\overline{CC'}=\dfrac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)}:\dfrac{\cos(B/2)}{b(a-b+c)}:\dfrac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$，

$\overline{PA'}:\overline{QB'}:\overline{RC'}=\dfrac{\cos(A/2)}{(b+c)(-a+b+c)}:\dfrac{\cos(B/2)}{(a+c)(a-b+c)}:\dfrac{\cos(C/2)}{(a+b)(a+b-c)}$

(3) $\Delta A'BC:\Delta AB'C:\Delta ABC'=\dfrac{a\cot(A/2)}{(-a+b+c)^2}:\dfrac{b\cot(B/2)}{(a-b+c)^2}:\dfrac{c\cot(C/2)}{(a+b-c)^2}$，

(4) $d(A',\overline{BC}):d(B',\overline{AC}):d(C',\overline{AB})=\dfrac{\cot(A/2)}{(-a+b+c)^2}:\dfrac{\cot(B/2)}{(a-b+c)^2}:\dfrac{\cot(C/2)}{(a+b-c)^2}$.

2. 對於傍心 B' 有，

(1) $\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{c-b}{a}$，$\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{a+c}{b}$，$\dfrac{w_1}{w_2}=\dfrac{a-b}{c}$，

(2) $u_1 : v_1 : w_1 = \dfrac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)} : \dfrac{\cos(B/2)\cot(B/2)}{b(a-b+c)} : \dfrac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$

(3) $u_2 : v_2 : w_2 = \dfrac{\sin(A/2)}{c-b} : \dfrac{\cos(B/2)}{a+c} : \dfrac{\sin(C/2)}{a-b}$

(4) $d_1 : d_2 : d_3 = 1:1:1$,

(5) $\Delta B'BC : \Delta B'AC : \Delta B'AB = a:b:c$.

【證明】

1.(1) 設 $\angle A = 2\alpha°$，$\angle A$ 外角為 $2\beta°$，$\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} = \dfrac{\Delta ABB'}{\Delta AQB'} = \dfrac{\overline{AB}\times\overline{AB'}\times\sin\angle BAB'}{\overline{AQ}\times\overline{AB'}\times\sin\angle QAB'}$,

其中 $\sin\angle BAB' = \sin(2\pi-\beta) = \sin\beta$，$\sin\angle QAB' = \sin\beta$，又 $\overline{AQ} = \dfrac{c}{a+c}\overline{AC} = \dfrac{bc}{a+c}$,

得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} = \dfrac{c}{bc/(a+c)} = \dfrac{a+c}{b}$，故得 $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} = \dfrac{a+c}{b}$，同理 $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} = \dfrac{b+c}{a}$，$\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{RC'}} = \dfrac{a+b}{c}$.

(2) 由 $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} = \dfrac{a+c}{b}$，得 $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB}} = \dfrac{a+c}{a-b+c}$，得 $\overline{BB'} = \dfrac{a+c}{a-b+c}\overline{QB}$,

其中 $\overline{QB}$ 為角平分線，由系理 3.2 得 $\overline{QB} = \dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}$，代入上式

得 $\overline{BB'} = \dfrac{a+c}{a-b+c}\times\dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{2ac}{a-b+c}\cos\dfrac{B}{2}$

同理得 $\overline{AA'} = \dfrac{2bc}{-a+b+c}\cos\dfrac{A}{2}$，$\overline{CC'} = \dfrac{2ab}{a+b-c}\cos\dfrac{C}{2}$.

化簡得 $\overline{AA'} : \overline{BB'} : \overline{CC'} = \dfrac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)} : \dfrac{\cos(B/2)}{b(a-b+c)} : \dfrac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$

故得 $\overline{PA'} : \overline{QB'} : \overline{RC'} = \dfrac{a}{b+c}\overline{AA'} : \dfrac{b}{a+c}\overline{BB'} : \dfrac{\mathrm{c}}{a+b}\overline{CC'}$

$= \dfrac{\cos(A/2)}{(b+c)(-a+b+c)} : \dfrac{\cos(B/2)}{(a+c)(a-b+c)} : \dfrac{\cos(C/2)}{(a+b)(a+b-c)}$

(3) $\Delta AB'C = \dfrac{1}{2}\overline{AB'}\,\overline{CB'}\sin B'$，由系理 9.2(1)得 $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{P'B'}} = \dfrac{c-b}{a}$，得 $\overline{AB'} = \dfrac{c-b}{a-b+c}\overline{AP'}$,

同理 $\overline{CB'} = \dfrac{a-b}{a-b+c}\overline{CR'}$，又 $\angle AB'C = \pi - \dfrac{\pi-\angle A}{2} - \dfrac{\pi-\angle C}{2} = \dfrac{\angle A+\angle C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\angle B}{2}$

得　$\sin B' = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}) = \cos\frac{B}{2}$，故得　$\Delta AB'C = \frac{1}{2} \times \frac{c-b}{a-b+c}\overline{AP'} \times \frac{a-b}{a-b+c}\overline{CR'} \times \cos\frac{B}{2}$

又由系理 3.3 得 $\overline{AP'} = \frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}$，$\overline{CR'} = \frac{2ab}{a-b}\sin\frac{C}{2}$，

故得　$\Delta AB'C = \frac{1}{2} \times \frac{c-b}{a-b+c}\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2} \times \frac{a-b}{a-b+c}\frac{2ab}{a-b}\sin\frac{C}{2} \times \cos\frac{B}{2}$

$$= \frac{2ab^2c}{(a-b+c)^2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

同理　$\Delta A'BC = \frac{2a^2bc}{(-a+b+c)^2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，$\Delta ABC' = \frac{2abc^2}{(a+b-c)^2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

化簡得　$\Delta A'BC : \Delta AB'C : \Delta ABC' = \frac{a\cot(A/2)}{(-a+b+c)^2} : \frac{b\cot(B/2)}{(a-b+c)^2} : \frac{c\cot(C/2)}{(a+b-c)^2}$ 2.

2.(1) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'P'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP'}}$，由系理 3.3 得 $\overline{CP'} = ab/(c-b)$，

得　$\overline{BP'} = \overline{CP'} + \overline{BC} = ab/(c-b) + a = ac/(c-b)$　故得　$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP'}} = \frac{c}{ac/(c-b)} = \frac{c-b}{a}$.

同理　$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a-b}{c}$，又由系理 9.1(1) 得　$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} = \frac{a+c}{b}$.

(2) $\overline{AB'} : \overline{BB'} : \overline{CB'} = \overline{AA'}\cot B' : \overline{BB'} : \overline{CC'}\cot B' = \overline{AA'} : \overline{BB'}\tan B' : \overline{CC'}$

由系理 9.1(2)及 $\angle AB'C = \pi/2 - \angle B/2$，

得 $\overline{AB'} : \overline{BB'} : \overline{CB'} = \frac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)} : \frac{\cos(B/2)}{b(a-b+c)}\tan(\pi/2 - B/2) : \frac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$

$$= \frac{\cos(A/2)}{a(-a+b+c)} : \frac{\cos(B/2)\cot(B/2)}{b(a-b+c)} : \frac{\cos(C/2)}{c(a+b-c)}$$

(3) 由 $\frac{\overline{AB'}}{\overline{P'B'}} = \frac{c-b}{a}$，得 $\overline{P'B'} = \frac{a}{a-b+c}\overline{AP'}$，同理 $\overline{R'B'} = \frac{c}{a-b+c}\overline{CR'}$，

又由 9.1(1)之 $\frac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} = \frac{a+c}{b}$，得　$\overline{QB'} = \frac{b}{a+c}\overline{BB'}$，

則　$\overline{P'B'} : \overline{QB'} : \overline{R'B'} = \frac{a}{a-b+c}\overline{AP'} : \frac{b}{a+c}\overline{BB'} : \frac{c}{a-b+c}\overline{CR'}$

$$= \frac{a}{a-b+c}\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2} : \frac{b}{a+c}\frac{2ac}{a-b+c}\cos\frac{B}{2} : \frac{c}{a-b+c}\frac{2ab}{a-b}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{\sin(A/2)}{c-b} : \frac{\cos(B/2)}{a+c} : \frac{\sin(C/2)}{a-b}$$　證畢。

肆、後記

筆者曾從西瓦、孟氏定理推導出另一種判別三線共點的充要條件(載於參考文獻 1)，並藉此探討重心、內心、外心及垂心的部分性質。其後，偶然看到討論四心相關比例的文章（如參考文獻 2)，因而促使筆者更深入思考。上述兩篇文章的討論僅限於銳角三角形，本文則擴及鈍角三角形及傍心，先從角度、長度量併用的方式切入探討三角形五心相關各距離、長度、和面積的比例關係（如表 1 *a, b*)，再利用引理 4 將內角的三角函數比轉為長度比，從而得到僅有長度量的比例（如表 2*a, b*)。

參考文獻

蘇柏奇（2005)，三角形上共點三線段分割圖形的比例，萬腦奔騰數學網（三）－數學科學與資訊科技共舞，交通大學。

劉俊傑（2006)，換個觀點看三角形的四心，數學傳播，第 30 卷第 2 期。