
探討國小五年級數學低成就學生 在分數部分的迷思概念-- 以異分母分數的比較與加減為例

李國家¹ 劉曼麗^{2*}

¹屏東縣立豐田國民小學

²國立屏東教育大學 數理教育研究所

壹、前言

為了配合十二年國教的推動，教育部規畫從 101 年起，學校應對於未達基本學習標準的學生進行補救教學（林志成，2012）。而分數概念的學習一直是國小數學教育階段中的主要課程之一。尤其是在九年一貫課程數學學習領域第三階段（五、六年級）的 25 個能力指標中，分數就佔了 8 個（教育部，2008），由此顯示分數課程的重要性。但國內外都有研究報告指出，學生在分數的學習是困難且成效不彰的（林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996；洪素敏，2004；林右珊，2007；Annette R Baturu, 2004；Mack, 1998）。筆者之一任教於國小五年級，也曾參與國小學生課後的補救教學，深感數學常困擾著許多學生，其中分數概念的學習更是令學生感到挫折。有感於補救教學對低成就學生的重要性，而分數又是造成學生學習困難的原因之一，我們特別針對五年級數學低成就學生進行有關分數部分的筆試，希望能收集到五年級

數學低成就學生在學習有關分數部分的迷思概念以及犯錯的原因，藉此瞭解數學低成就學生學習分數困難之所在，以作為教師進行分數補救教學的參考。

貳、筆試簡介

在九年一貫課程綱要數學學習領域中（2008），第三學習階段（五年級）的學生必須學會有關分數的能力指標包括 N-3-06、N-3-07、N-3-09、N-3-10、N-3-13 以及 N-3-14 等 6 條，內容見下表 1。

為承續國小四年級所學的等值分數概念，坊間版本在教科書編輯上多將 N-3-06 與 N-3-07 這兩條能力指標編排在五年級上學期的分數學習課程中。而筆者所施測的時間點正為五年級上學期期末，故針對學生學習完五上分數課程須具備的 N-3-06 與 N-3-07 這兩條能力指標，選定「對分數的概念（含等值分數）」、「對異分母分數比大小」以及「對異分母分數的加減」等三個主題作為筆試試題內容。試題內容參考《國小分數與小數的教學、學習與評量》（呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓

*為本文通訊作者

瑩，2009）一書中所編製之試題，並針對每個主題選題組卷，其中包括分數的概念（含等值分數）3題、異分母分數比大小7題、同分母分數的加減2題以及異分母分數的加減8題，合計20題，除了分數概念的3題外，其餘皆為課本中常出現之題目。筆試樣本選自高屏地區6所學校的五年級數學低成就學生各5名，總計30名。這些數學低成就學生對數學的學習態度並不積極，有些學生抱著逃避的態度，甚至有放棄數學的念頭。

表 1 數學學習領域第三階段五年級的能力指標（教育部，2008）

分段能力指標	
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。
N-3-09	能理解分數(含小數)乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-10	能理解分數(含小數)除法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-13	能做分數與小數的互換，並標記在數線上。
N-3-14	能認識比率及其在生活中的應用。

參、學生在分數迷思概念的成因與分析


由筆試的結果發現，學生在分數概念題型平均答錯率約 44/90（約 49%）；在異

分母分數比大小題型平均答錯率約 94/210（約 45%）；在同分母分數的加減題型平均答錯率約 20/60（約 33%）；在異分母分數的加減題型平均答錯率則約 152/240（約 63%）。由於分數概念是異分母分數比大小和異分母分數加減的基礎，而學生對於分數概念的理解有問題（平均答錯率約 49%），就會連帶的影響其在異分母分數比大小與異分母分數加減的解題表現，進而產生一連串相關的迷思概念。歸納五年級數學低成就學生在分數的概念主要常犯的迷思概念為「將分母和分子視為兩個分別獨立的整數」；在異分母分數比大小常犯的迷思概念主要是「只以分母或分子的大小做比較」；而在異分母分數加減常犯的迷思概念則主要有「分母加分母，分子加分子」與「分母減分母，分子減分子」等兩種錯誤類型。以下就學生在各主題中常犯的錯誤類型，選取具代表性的題型，包括分數概念3題、異分母分數比大小2題、異分母分數加減2題等共7題，來探討五年級數學低成就學生易犯的迷思概念與成因。

一、對分數的概念（包含等值分數）

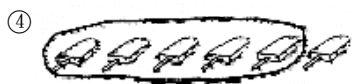
分數概念是一種部分與整體關係。不論是連續量或是離散量的分數概念都可以不同的「表徵」形式呈現。國外學者（Lesh, Post & Behr, 1987）曾經以有理數為主題，探討學生在不同表徵間轉換的能力，認為學生能以不同表徵表現出同一概念，或在表徵間自由轉換，才算是真正掌握了數學概念。換句話說，學生對分數概念的

理解，在於其是否能以不同的表徵來呈現分數的概念。例如：分數符號 $\frac{1}{3}$ 、圖形表

徵  和文字敘述（平分成 3 份，取其

中的 1 份）皆可用來表徵同一分數概念。以下我們針對學生在文字敘述（分數的意義）、半具體表徵（圖形）及抽象符號表徵（分數符號）間的轉換，來探討低成就學生對分數概念的理解，以試題 1 為例：

試題 1：爸爸買了一些冰棒，全家吃掉全部冰棒的 $\frac{1}{2}$ ，請問全家吃掉幾枝冰棒，下面哪一個圖法是對的？



結果：

選項	①	②	③	* ④
選答率	5/30 (17%)	2/30 (7%)	1/30 (3%)	22/30 (73%)

(*：為正確答案)

試題 1 為將分數符號轉換為圖形表徵的概念題型，且圖形的單位量內容物個數

(10 枝) 與分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分母 2 不同。

由結果顯示，有 8/30 (27%) 的學生選錯了答案。其中，有 5/30 (17%) 的學生，可能因受到分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分子影響，選了 1 枝 (選項①)。訪談案例舉隅如下

T：全家吃掉幾枝冰棒？

S：1 枝。

T：你是如何知道的？

S：因為 $\frac{1}{2}$ 的分子是 1，所以是 1 枝。

有 2/30(7%) 的學生，可能因受到分數符號中的分母影響，而選了 2 枝 (選項②)。訪談案例舉隅如下：

T：全家吃掉幾枝冰棒？

S：2 枝。

T：你是如何知道的？

S： $\frac{1}{2}$ 的下面是 2，所以是吃掉 2 枝。

由此可知，學生可能不理解分數 $\frac{1}{2}$ 是要將整體單位量 (10 枝) 平分為 2 份，取其中的 1 份 (5 枝) 的部分與整體關係，未能

將分數符號 $\frac{1}{2}$ 正確的轉換為圖形表徵，造成答題時因受分子或分母的影響，而以分數符號中的分子或分母來回答。另外，試題 1 也可以利用等值分數的概念來解題。在試題 1 中，圖形的單位量內容物個數(10 枝)與分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分母 2 不同，但兩者之間有倍數關係。學生未能應用等值分數的概念，將圖形表徵中的單位量內容物個數與分數符號中的分母做一轉換及結合(通分)，如利用擴分， $\frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$ ，將分數 $\frac{1}{2}$ 轉換成分母為 10 的分數，再連結到圖形表徵上。我們發現，學生在圖形表徵轉換為分數符號的題型中也會有類似的迷思概念，以試題 2 為例：

試題 2：右邊圖形中，



塗黑的部分佔了全部的多少？

- ① 3 ② 6 ③ $\frac{3}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$

結果：

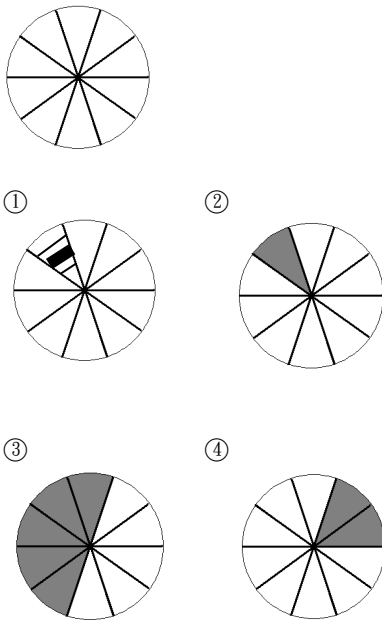
選項	①	②	③	*④
選答率	5/30 (17%)	2/30 (7%)	3/30 (10%)	20/30 (66%)

試題 2 為將圖形表徵轉換為分數符號的概念題型，且圖形中的單位量內容物個數(9 個)與正確選項 $\frac{1}{3}$ 中的分母 3 不同。

由答題結果顯示，有 3/30(10%) 的學生只以分子和分母的數字去思考，將整個圖形二分為塗黑部分和空白部分，並以塗黑部分的個數當分子，以空白部分的個數當分母而選擇了 $\frac{3}{6}$ 的錯誤答案。另有 5/30(17%) 的學生就直接以圖中塗黑部份的個數(3 個)來選取答案，而得到錯誤的答案 3 (選項①)。這些學生可能未理解分數是要考慮部分與整體的關係，而無法將圖形表徵正確的轉換為分數符號。試題 2 也可以利用等值分數的概念來解題。在試題 2 中，圖形的單位量內容物個數(9 個)與分數符號 $\frac{1}{3}$ 中的分母 3 不同，但兩者之間有倍數關係。學生未能應用等值分數的概念，將圖形表徵中的單位量內容物個數與分數符號中的分母做一轉換及結合(通分)，如利用約分， $\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$ ，將分數 $\frac{3}{9}$ 轉換成分母為 3 的分數，再連結到圖形表徵上。

由學生在試題 1 和試題 2 的答題表現，我們發現，不論是分數符號表徵轉換為圖形表徵，或是將圖形表徵轉換為分數符號表徵，皆有 2 到 3 成的學生可能因未理解分數概念是要考慮部分與整體的關係，而無法正確的做表徵間的轉換。另外，在由文字敘述轉換為圖形表徵的題型中，學生可能因未能理解題意，而無法正確的將題目中代表分數意義的文字敘述轉換為圖形表徵，以試題 3 為例：

試題 3：爸爸買了 1 個像下圖已經切成 10 塊的披薩，媽媽再把這 10 塊披薩平分成 5 份，吃掉 1 份，把媽媽吃掉的披薩塗上黑色，下面哪一個圖的塗法是對的？



結果：

選項	①	②	③	*④
選答率	4/30 (13%)	6/30 (20%)	14/30 (47%)	6/30 (20%)

試題 3 為將文字敘述轉換為圖形表徵的概念題型，與前面兩題不同的是，此題不論是題目或選項中皆未出現分數符號，學生必須先理解題目中代表分數意義的文字敘述，才能進一步的將其轉換為圖形表徵。由學生的答題結果發現，其答錯率高達 24/30(80%)，答錯率遠高於前面兩題，其中有 20/30(67%)的學生選擇了 1 塊(選項②)或 5 塊(選項③)的答案。透過訪

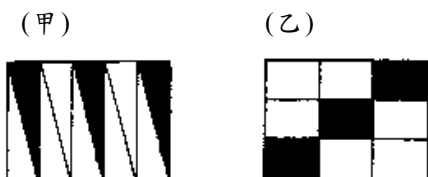
談與分析的結果發現，學生主要犯錯的原因可能是因題目中缺乏分數符號或者是學生不理解題目中「平分成 5 份，吃掉 1 份」所敘述的分數意義，而無法依題意正確的轉換為圖形表徵，於答題時就直接從題目出現過的整數值中尋找答案，如題目中說明了吃掉 1 份而選擇了 1 塊(選項②)，或是因為題目出現 5 份而選擇了 5 塊(選項③)。

由學生在對分數概念的答題表現，我們發現當題目或選項中有出現分數符號時，不論是將分數符號轉換為圖形(如試題 1)或是將圖形轉換為分數符號(如試題 2)，都有 2 到 3 成的學生於解題時易受分數中的分母或分子影響，而選擇了與分母或與分子相同的來作為答案。另外，當題目中缺乏分數符號時(如試題 3)，更有近 7 成的學生可能未能理解代表分數意義的文字敘述(平分成 5 份，吃掉 1 份)，而以題目中出現過的整數值尋找答案。整體而言，學生在對分數概念之解題過程中，有近 5 成(約 48%)的學生無法在文字敘述(分數的意義)、圖形及分數符號表徵間做正確的轉換。這些學生可能是無法掌握分數是部份與整體的關係，或者是無法把分數 a/b 看做一個數，以至於將組成分數的分母和分子視為兩個分別獨立的整數，而在解題時選擇和分母或分子一樣的數值為答案。因此，部份的學生在處理分數問題時，只考慮到分數中的分母或分子，解題過程深受分母或分子的影響(洪素敏、楊德清，2002)。

二、對異分母分數比大小

由學生在試題 1 到試題 3 的答題發現，學生在處理表徵轉換的分數概念題型時，可能未理解分數部分與整體的關係，且未把分數 a/b 看成一個數，而將分母 b 和分子 a 視為兩個獨立的數而產生迷思概念。我們發現，類似的情形也會出現在對異分母分數比大小時，以試題 4 為例：

試題 4：下列 2 個相同的長方形，哪一個長方形的黑色部分面積比較多？



- ① 甲較多，因為看起來比較大
 ② 甲較多，因為 $\frac{3}{10} > \frac{3}{9}$
 ③ 一樣多，因為黑的部分都是 3 塊
 ④ 乙較多，因為 $\frac{3}{10} < \frac{3}{9}$
 ⑤ 其他 _____

結果：

選項	①	②	③	* ④	⑤
選答率	7/30 (23%)	6/30 (20%)	5/30 (17%)	10/30 (33%)	2/30 (7%)

有 6/30(20%)的學生可能是受分母的影響，在比較異分母分數大小時，只比較分母的大小，認為分母越大分數就越大，

選了選項② ($\frac{3}{10} > \frac{3}{9}$) 為答案。訪談案例

舉隅如下：

T：哪一個圖形的黑色部分面積比較多？

S：甲比較多。

T：你是如何知道的？

S：因為甲分比較多塊。

T：可以說得更清楚一點嗎？

S：甲分 10 塊，乙分 9 塊，10 比 9 大，所以甲比較大

也有 5/30(17%)的學生可能是受分子的影響，認為分子相同 ($3=3$)，分數也會相同，而以選項③ (一樣多) 為答案。訪談案例舉隅如下：

T：哪一個圖形的黑色部分面積比較多？

S：一樣多。

T：你是如何知道的？

S：兩個圖形裡面都有三個黑色的啊！

由此可知，學生在比較分數的大小時，可能未考慮圖形的分割數(分母)是否相同，就直接進行份數(分子)的比較。楊壬孝(1989)指出，在分數比大小的排序中，分子相同而以分母做比較的題目，使學生感到困難，不易接受。為了更確認學生比較分數大小時，真的只受分母或分子單一因素的影響，我們特別挑選了帶分數比大小的題型，希望能再一次檢驗學生在異分母分數比大小的迷思概念，以試題 5 為例：

試題 5： $3\frac{25}{52}$ 和 $5\frac{25}{39}$ 誰比較大？

- ① $3\frac{25}{52}$ 比較大 ② $5\frac{25}{39}$ 比較大
 ③ 一樣大 ④ 不能比較大小

結果：

選項	①	* ②	③	④
答題率	8/30 (27%)	20/30 (66%)	0/30 (0%)	2/30 (7%)

學生在比較 $3\frac{25}{52}$ 和 $5\frac{25}{39}$ 的大小時，即

便 $5\frac{25}{39}$ 的整數部分較大 ($5 > 3$)，且兩個

分數的分子也相同 ($25 = 25$)，卻還是有 8/30(27%) 的學生可能單受分母的影響

($52 > 39$)，而認為 $3\frac{25}{52}$ 比較大(選項①)。

值得注意的是，在試題 5 中沒有學生單受分子影響 ($25 = 25$)，而認為兩數一樣大。

比較學生在試題 4 與試題 5 的解題表現發現，不論是試題 4 或試題 5，在比較異分母分數的大小時皆有兩到三成左右的學生會單受分母的影響，而只以分母的大小做比較。在試題 4 中，有 5/30(17%) 的學生單受分子的影響，只以分子的大小做比較，而認為分子相同時，其分數值也會相同。但在試題 5 中，學生單受分子影響的比率竟大幅降為 0%，箇中差異可能是試題 5 為帶分數比大小，其中多了整數部分的變項，以致於學生可能轉而受整數部分的影響，這樣的結果反而大幅降低了學

生在試題 5 的答錯率。

分數概念是異分母分數比大小的基礎，學生對分數概念的不理解，可能會影響其在異分母分數比大小的解題表現，如學生在試題 1~3 處理表徵轉換的分數概念題型中，因未理解分數部分與整體的關係或將分母和分子視為兩個分別獨立的整數，於答題時選擇與分母或分子一樣的數值為答案。在試題 4 與試題 5 的異分母分數比大小題型中，學生即可能因為不理解分數的概念，而產生類似的迷思概念如「只以分母或分子的大小做比較」。

三、對異分母分數的加減

異分母分數的加減是分數概念在運算上的應用，學生必須利用通分先將不同分母的分數化為相同分母的分數，才能進行分數的加減。然而，學生在異分母分數的加減題型平均答錯率竟達 63%，是所有題型中最糟糕的，顯示學生遇到異分母分數的加減時，可能因對分數的概念不理解，無法利用通分將不同分母的分數化為相同分母的分數，再進行分數的加減運算。以試題 6 為例：

試題 6： $\frac{5}{8} + \frac{7}{12} =$

結果：

答案	$\frac{35}{96}$	* $1\frac{5}{24}$	$\frac{12}{20}$	其他 (含空白)
答題率	2/30 (7%)	11/30 (37%)	10/30 (33%)	7/30 (23%)

約有 10/30(33%)的學生在做異分母分數的加法運算時，未將分母先行通分，就直接進行分數的相加，並以分數中的分母加分母、分子加分子來進行分數的加法運算，而得到 $\frac{12}{20}$ 的錯誤答案。

$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{12}{20}$ (請寫出計算過程)

$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{12}{20}$

訪談案例舉隅如下：

T：這個題目請你念一遍。

S：八分之五加十二分之七。

T：你可不可以告訴老師你是怎麼算的？

S：上面的加上面的，下面的加下面的。

T：能在這張紙上再算一次給老師看嗎？

(S 在紙上寫出 $\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{5+7}{8+12} = \frac{12}{20}$)

由此可知，有些學童在處理分數運算時會像處理整數時一樣，而不會考慮分數的意義，因此在處理分數的加法時，常將分母相加，且分子也相加 (Behr et al., 1983)。

另外，學生在異分母分數的減法運算也有類似的情形發生，以試題 7 為例：

試題 7：家裡有 $\frac{5}{8}$ 瓶牛奶，小華喝了 $\frac{1}{4}$ 瓶，請問家裡剩下幾瓶牛奶？

結果：

答案	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{4}$ (或 1)	$\frac{3}{8}$	其他 (含空白)
答題率	4/30 (13%)	4/30 (13%)	11/30 (37%)	10/30 (33%)

學生雖然理解題意，且知道此題是分數的減法題，同時也正確的列出了算式 ($\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$)，但在進行運算時，有 4/30 (13%) 的學生犯了與試題 6 類似的錯誤。這些學生在沒有事先通分的情形下，即進行了分數的減法運算，並將分數中的分母減分母、分子減分子而得到 1(或 4/4)的錯誤答案。

家裏有 $\frac{5}{8}$ 瓶牛奶，小華喝了 $\frac{1}{4}$ 瓶，請問家裏剩下多少瓶牛奶？(請寫出計算過程)

答： $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

A: 1瓶

由試題 6 及試題 7 我們發現，有許多學生可能因不理解分數的概念，於解題時將分數中的分母與分子視為個別獨立的整數，在未將分母先行通分的情形下，就直接將分數中的分母加分母、分子加分子或分母減分母、分子減分子，而得到錯誤的答案。另外，我們也發現有部分的學生會受到新經驗(分數乘法)的影響，在試題 6 中(如圖 1)有 2/30(7%)的學生因將分數中的分母乘以分母、分子乘以分子 ($\frac{5 \times 7}{8 \times 12}$)，得到錯誤的答案 $\frac{35}{96}$ 。

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{35}{96} \quad (\text{請寫出計算過程})$$

圖 1 學生答題結果示例

肆、個案舉隅

分數概念是異分母分數比大小與異分母分數加減的基礎，我們發現，學生對分數的概念不理解，確實有可能會連帶的影響其在異分母分數比大小與異分母分數加減的解題表現，進而產生一連串相關的錯誤及迷思概念。我們將其錯誤類型歸納為兩大類，第一類是受分母影響而產生的迷思概念，第二類則是受分子影響而產生的迷思概念。以下我們分別以學生 S1 與 S2 為例來探討這兩類迷思概念對學生可能造成的影響。下表 2 為學生 S1 與 S2 在各題型中的答題表現。

表 2 學生 S1 與 S2 在各題型中的答題表現

題型	S1		S2	
	答錯題數	答錯比率	答錯題數	答錯比率
分數概念(3)	3	3/3	2	2/3
異分母分數比大小(7)	5	5/7	5	5/7
同分母分數加減(2)	2	2/2	2	2/2
異分母分數加減(8)	8	8/8	8	8/8

由表 2 中我們發現，S1 在各種題型的答錯率都非常的高，而其主要的迷思概念屬於第一類型的錯誤，以下我們就 S1 在各種題型的答題表現做進一步的分析，其部份的答題結果見下圖 2~圖 4。

(2) (Z) 爸爸買了一些冰棒，吃掉全部冰棒的 $\frac{1}{2}$ ，請問全家吃掉幾枝冰棒，下面哪一個圖法是對的？

(1) (2) (3) (4)

圖 2 學生答題結果示例

7. () 下列 2 個相同的長方形，哪一個長方形的黑色部分面積比較多？

(甲) (乙)

(1) (甲) 較多。因為看起來比較大
 (2) (甲) 較多。因為 $\frac{3}{10} > \frac{3}{9}$
 (3) 一樣多。因為黑的部分都是 3 塊
 (4) (乙) 較多。因為 $\frac{3}{10} < \frac{3}{9}$
 (5) 其他 _____

圖 3 學生答題結果示例

$$(2) \frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{12}{20}$$

圖 4 學生答題結果示例

在分數概念的表徵轉換題型中（如圖 2），S1 可能受分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分母數值 2 影響，於答題時選擇了與分母數值相同的整數來代表分數值，而無法將分數符號正

確的轉換為圖形表徵。S1 可能未能理解分數的概念，而將組成分數的分母和分子視為兩個分別獨立的整數，於解題時深受分母的影響。受到這個迷思的影響，S1 在比較異分母分數的大小時（如圖 3），就可能只比較分母的整數值，認為分母越大（ $10 > 9$ ）其分數值就越大，而選擇了（ $\frac{3}{10} > \frac{3}{9}$ ）的答案。有如此迷思概念的學生在進行異分母分數的加法運算時，就可能未將分母先行通分，而直接進行分數的相加（如圖 4），並以分數中的分母加分母、分子加分子來進行分數的加法運算，而得到 $\frac{12}{20}$ 的錯誤答案。

S2 的主要迷思概念屬於第二類型的錯誤，以下我們就 S2 在各種題型的答題表現做進一步的分析，其部份的答題結果見下圖 5~圖 7。

在分數概念的表徵轉換題型中（如圖 5），S2 可能受分數符號 $\frac{1}{2}$ 中分子數值 1 的影響，於答題時選擇了與分子數值相同的整數來代表分數值，而無法將分數符號正確的轉換為圖形表徵。S2 可能未能理解分數的概念，而將組成分數的分母和分子視為兩個分別獨立的整數，於解題時深受分子的影響。受到這個迷思的影響，S2 在比較異分母分數的大小時（如圖 6），就可能只比較分子的整數值，認為分子的數值相等（ $3 = 3$ ），其分數值也會相等，而選擇了

（ $\frac{3}{10} = \frac{3}{9}$ ）的答案。有如此迷思概念的學生

在進行分數減法運算時（如圖 7），即可能未將分母先行通分，便直接以分數中的分母減分母、分子減分子來進行分數的減法計算，而得到 $\frac{4}{4}$ 的錯誤答案。

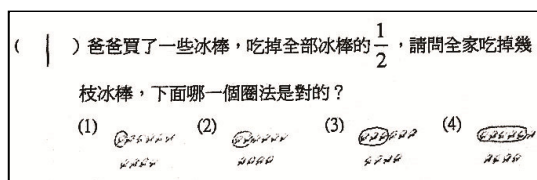


圖 5 學生答題結果示例

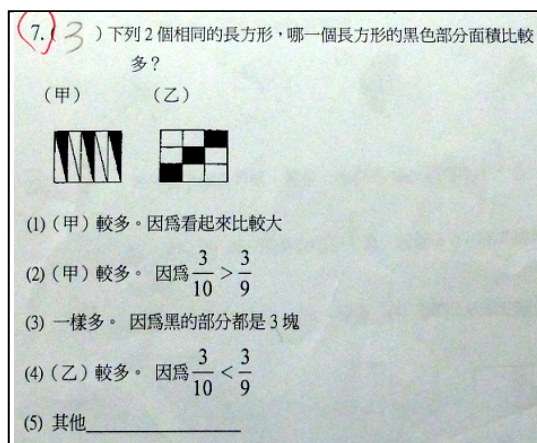


圖 6 學生答題結果示例

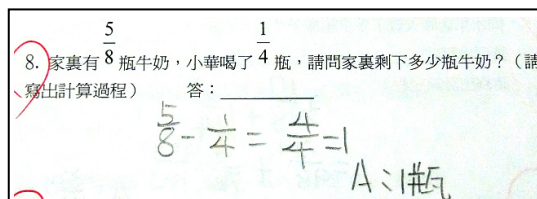


圖 7 學生答題結果示例

伍、結語

本文透過一份分數試題和學生在此

份試題的答題結果來探討五年級數學低成就學生在分數的表現。我們將學生在各題型中常犯的迷思概念整理如下：

1. 對分數的概念：「將分母和分子視為兩個分別獨立的整數」。
2. 對異分母分數比大小：「只以分母或分子的大小做比較」。
3. 對異分母分數的加減：「分母加分母，分子加分子」與「分母減分母，分子減分子」兩種。

我們發現，這幾類迷思概念的共通點是學生未能掌握分數部份與整體的關係，而把組成分數的分母和分子視為兩個分別獨立的整數。這樣的迷思可能肇始於學生對分數概念的不理解。當學生未能理解分數的概念時，連帶的對異分母分數的比大小與異分母分數的加減就可能會產生一連串相關的迷思概念。


因此，針對上述的發現，我們有以下兩點的建議：

建議一：

教師於日後設計五年級的分數補救教學課程時，應先確認學生是否理解分數的概念，檢驗其是否能以不同的表徵來呈現：

(一) 分數符號 \longleftrightarrow 圖形表徵

檢驗學生能否進行雙向連結。也就是學生能否依指定的分數符號轉換為圖形表徵，或將圖形表徵轉換為分數



符號。如：將「 $\frac{1}{3}$ 」轉換為 ，

或將  轉換為「 $\frac{1}{3}$ 」。

(二) 分數意義 \longleftrightarrow 分數符號

檢驗學生能否進行雙向連結。也就是學生能否將代表分數意義的文字敘述轉換為分數符號，或將分數符號轉換為代表分數意義的文字敘述。如：將文字敘述「平分成 3 份，取其中的 1 份」轉換為「 $\frac{1}{3}$ 」，或將「 $\frac{1}{3}$ 」轉換為文字敘述「平分成 3 份，取其中的 1 份」。

(三) 分數意義 \longleftrightarrow 圖形表徵

檢驗學生能否進行雙向連結。也就是學生能否將代表分數意義的文字敘述轉換為圖形表徵，或將圖形表徵轉換為代表分數意義的文字敘述。如：將文字敘述「平分成 3 份，取其中的 1 份」轉換為 ；或是將  轉換為文字敘述「平分成 3 份，取其中的 1 份」。

如學生無法在不同表徵之間進行轉換，則代表其未能真正理解分數的概念。教師應藉由教學協助學生將分數符號、圖形與分數的意義(透過文字或口語敘述)等三種表徵做有意義的連結(如下圖 8)，使學生能自由的在不同表徵之間做轉換，以建立正確且穩固的分數概念。

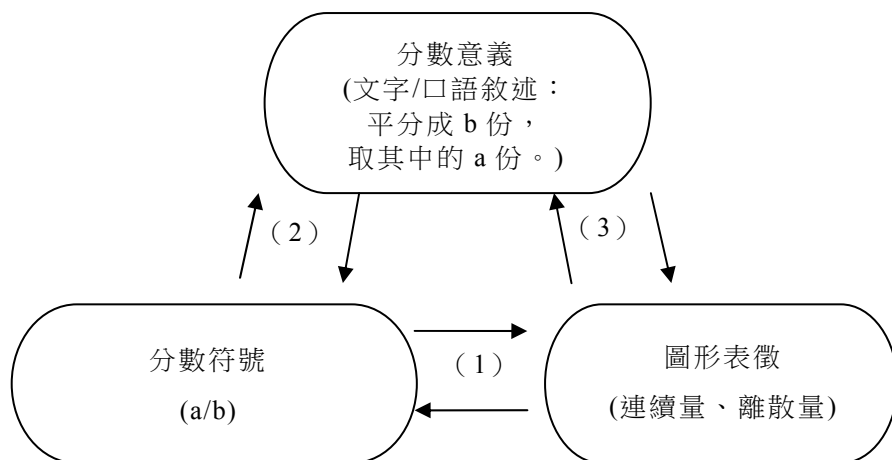


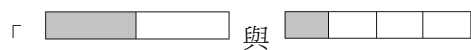
圖 8 表徵之間的轉換關係圖

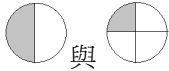
建議二：

異分母分數的比大小與加減計算是國小五年級分數課程的主要內容。學生在初學異分母分數的比大小與加減計算時，只要將算則背熟，先將分數通分，就可換成同分母的分數。然而，當學生要背的算則越來越多時，可能就會混淆算則，如上述的試題 6(計算 $\frac{5}{8} + \frac{7}{12}$)，學生以分母加分母、分子加分子($\frac{5+7}{8+12}$)，得出錯誤的答案 $\frac{12}{20}$ 。原因就在於學生未能理解分數的概念，又無法對分數的計算做有意義的學習。因此我們建議，教師於進行異分母分數的比大小與加減計算教學之始，除了使用分數符號，在課堂上也可以試著讓學生將分數符號轉換為圖形表徵，除了可以檢驗學生是否真的理解分數的概念，也能協助學生對分數的計算做有意義的學習。例如：

1. 在教學異分母分數比大小時，教師可

以分數符號呈現題目，如：「 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 何者較大？」再透過討論，讓學生將其轉換為圖形表徵比大小，如：

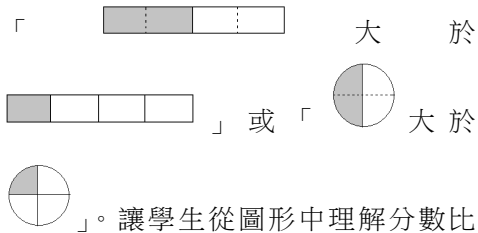


何者較大？」或「何者較大？」透過圖形表徵的呈現，讓學生理解 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 中的分母 2 和 4 代表的

只是等分割的份數，所以在比大小時，不能以分母的大小來比較。而 $\frac{1}{2}$ 與

$\frac{1}{4}$ 中的分子 1 分別代表的是 2 等份中的 1 份及 4 等份中的 1 份。再由圖形中可知 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 等分割的份數不同，其



分割的大小就不同，所以在比大小時，不能直接以分子所代表的份數來比較。對照圖形，更能協助學生感受到分割份數越多，每一份就會越小。學生雖然能透過圖形判別何者較大，但教師仍應進一步的引導學生再將圖形進行等分割（通分），得到





讓學生從圖形中理解分數比大小時，兩個分數要分母一樣（即兩邊的分割份數一樣），才能直接對分子進行比大小。

2. 在教學異分母分數的加（減）計算時，如：「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ()$ 」，也可試著讓學生將其轉換為圖形表徵

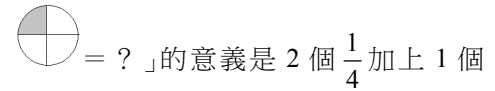
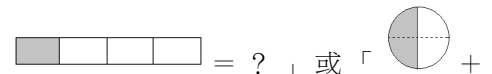


或「 +  = ?」透過圖形表徵，讓學生理解兩邊所分割的份數不一樣多，因此每一等份不一樣大，不能直接進行相加。進而引導學生需將圖形再透過等分割以讓兩邊的分割數變成一樣多（通分），也就是



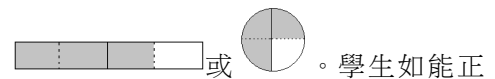
或「 +  = ?」最後

讓學生理解「 +



$\frac{1}{4}$ ，其結果為 3 個 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{3}{4}$ ；或將 3

個 $\frac{1}{4}$ 併入單位量內，即



確的以圖形表徵來掌握分數，並理解分數加法的意義，才能對分數的加法計算做有意義的學習，不致流於機械式的背誦導致日後混淆算則。

分數課程是數學領域中很重要的一環，也是最令學生感到困擾的課程之一，其中五年級分數課程是學生由分數概念銜接到分數算則的重要階段，具有承先啟後的重要地位。分數概念具有抽象及前後連貫的特性，如果學生不能真正的理解分數的概念，將來其分數的學習可能就會流於口訣的背誦和算則的記憶，僅學習到程序性知識，對於其背後所蘊涵的意義卻不了解，因而在分數的學習過程中產生迷思概念。萬丈高樓平地起，教師在進行分數概念的教學時焉能不慎。

參考文獻

呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩（2009）。**國小分數與小數的教學、學習與評量**。台北市：五南。

- 林福來、黃敏晃、呂玉琴(1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊，4(2)，161-196。
- 林志成(2012年2月7日)。全國後35%國一生可參加補救教學。中時電子報。取自 <http://news.chinatimes.com/>。
- 林右珊(2007)。國小兒童分數概念之探討(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學教育心理與輔導學系，屏東縣。
- 洪素敏、楊德清(2002)。創意教學~分數的補救教學。科學教育研究與發展季刊，29，33-52。
- 洪素敏(2004)。國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文未出版，嘉義市。
- 教育部(2008)。九年一貫數學學習領域課程綱要。教育部網站。
- 楊王孝(1989)。國中小學生分數概念的發展。國科會專題研究計畫成果報告(編號：NSC-78-0111-S-003-06A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。
- Annette R Baturu (2004). Empowering Andrea to help year 5 student's construct fraction understanding. Proceedings of the 28th conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2, 95-102.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A.(1983). Rational-number concepts. In R. Lesh, & M. Landau, (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-126). New York: Academic Press.
- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In Janvier, C(ED.), Problems in the teaching and learning of mathematics (pp.33-40). London: New Jersey.
- Mack, N. K. (1998). Building a Foundation for Understanding the Multiplication of Fraction. Teaching Children Mathematic, 5(1), 34-38.