幾個恆等式的組合證明

許介彥

私立大葉大學 電機工程學系

壹、前言

從集合 $\{0,1,2,.....,n\}$ 中選出不同的兩數，總共有多少種選法？這是一個相當容易的問題，既然集合中有 $n+1$ 個不同的數，答案當然是 $C(n+1,2)$，也就是

$$\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

所有這些選法可依所選出的兩數中較大的數是多少分為 n 類；有些選法中較大的數為 1，有些為 2，……，有些為 n；如果我們能夠知道這 n 類的每一類各有幾種選法，這些選法數的總和應該就等於 $C(n+1,2)$。

考慮兩數中較大的數為 k（$1\le k\le n$）的情形，此時另一個數有可能是多少呢？由於另一數須小於 k，因此有 $0,1,2,\ldots,k-1$ 等總共 k 個可能的值。如前所述，當 $k=1,2,\ldots,n$，所有選法數的總和等於 $C(n+1,2)$，因此下式一定成立：

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

這就是我們熟悉的由 1 開始的連續正整數求和公式，此式在數學上有很多種證法，而上面的證明方式可說是此式的一個「組合證明」(combinatorial proof)，也就是靠計算數量而得的證明。

數學上有相當多恆等式可以利用組合的方式來證明；當我們要證明某個式子的等號左右兩邊相等，我們就「發明」一個與計算數量有關的問題，說明等號兩邊同樣都是該問題的答案（只是想法不同而已）；既然答案只有一個，所以等式成立。

各類恆等式中，與二項式係數（binomial coefficients）有關的恆等式特別容易透過組合的方式來證明，因為 $C(n,k)$ 可視為從 n 個東西中選出 k 個的方法數，數的本身就含有組合上的意義。本文假設當 $n<k$ 時，$C(n,k)$ 的值為 0。

讓我們再看個例子。下面是與二項式係數有關的一個基本的式子：

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

我們「發明」的計數問題是：從 n 個人中選出 k 個人的方法有幾種？答案顯然是 $C(n,k)$，不過由於選出 k 個人其實也相當於將 $n-k$ 個人排除，而由 n 人中選出 $n-k$ 人來排除的方法有 $C(n,n-k)$ 種，因此上式成立。

另一個基本的式子是

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

我們的問題同樣是：從 n 人中選出 k 人的

方法有幾種？假設張三是這 n 人之一，所有選出 k 人的選法可分為「張三有被選中」與「張三沒被選中」兩大類，其中有選到張三的選法有 $C(n-1,k-1)$ 種，沒選到張三的選法有 $C(n-1,k)$ 種，因此上式成立。上式通常稱做「巴斯卡恆等式」(Pascal's identity)，由該式可建構出著名的「巴斯卡三角形」(Pascal's triangle)。

以下我們看一些較複雜的例子。

貳、更多組合證明的例子

恆等式一：當 $n \geq 1$，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}\,.$$

問題：由 n 個人中選出一些人的方法有幾種？假設這裡所謂「選出一些人」可以少到一個人都不選，也可以多到 n 個人全選。

由於從 n 個人中選出 k 個人的方法有 $C(n,k)$ 種，因此答案顯然是 $\Sigma_{k=0}^{n}C(n,k)$。另一方面，由於每個人都有「被選中」與「沒被選中」兩種可能，因此 n 個人總共可搭配出 2^n 種不同的情形；這兩種考慮方式所得的結果應該相等，所以上面的等式成立。

恆等式二：當 $n \geq 2$，

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}=2^{n-1}\,.$$

問題：由 n 個人中選出偶數個人的方法有幾種？

由於從 n 個人中選出 $2k$ 個人的方法有 $C(n,2k)$ 種，因此答案顯然是 $\Sigma_{k\geq 0}C(n,2k)$。

另一方面，假設張三是這 n 個人之一；我們也可以先從除了張三之外的其他 $n-1$ 個人中選出任意一些人（選法有 2^{n-1} 種，見恆等式一），然後再考慮選不選張三；由於張三須與這些被選出的人湊成偶數，因此這些人的人數一旦確定之後，張三的命運也就跟著確定了，所以由 n 個人中選出偶數個人的方法有 2^{n-1} 種。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

請注意由恆等式一與恆等式二我們立即可知當 $n \geq 1$，

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}\,.$$

由此又可推知

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}=0\,.$$

恆等式三：當 $n \geq k \geq 1$，

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

問題：由 n 個人中選出 k 個人來組成一個代表隊，並在所選出的 k 人中指派一人做為隊長，上述工作總共有幾種可能的作法？

由 n 人中選出 k 人的方法有 $C(n,k)$ 種，而由 k 人中選出一名隊長的方法有 k 種，因此總共有 $kC(n,k)$ 種作法。

另一方面，我們也可以先從全部 n 個人中選出一人來做為隊長（選法有 n 種），再從其他 $n-1$ 人中選出 $k-1$ 人來搭配剛才的隊長以組成代表隊；因此作法有 $nC(n-1,k-1)$ 種。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

恆等式四： 當 $n\geq 2$，

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

問題： 由 n 個人中選出任意一些人來組成一個代表隊，並且從這些人中指派一人做為隊長，上述工作總共有幾種可能的作法？

由 n 人中選出 k 人的方法有 $C(n,k)$ 種，由 k 人中選出一名隊長的方法有 k 種，因此答案為 $\Sigma_{k=0}^{n} kC(n,k)$。

另一方面，我們也可以先從全部 n 個人中選出一人來做為隊長（選法有 n 種），再從其他 $n-1$ 個人中選出任意一些人（選法有 2^{n-1} 種）來搭配剛才的隊長以組成代表隊，因此總共有 $n2^{n-1}$ 種作法。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

恆等式五： 當 $n\geq m\geq k\geq 0$，

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

問題： 由 n 個人中選出 m 個人來組成一個代表隊，並且從這 m 個人中選出 k 個人來做為代表隊的幹部，上述工作總共有幾種可能的作法？

由於從 n 人中選出 m 人的方法有 $C(n,m)$ 種，從 m 人中選出 k 人的方法有 $C(m,k)$ 種，因此答案為 $C(n,m)C(m,k)$。

另一方面，我們也可以先從全部 n 個人中選出 k 個人做為代表隊的幹部（選法有 $C(n,k)$ 種），然後再從其他 $n-k$ 個人中選出 $m-k$ 個人（選法有 $C(n-k,m-k)$ 種）來搭配剛才的幹部以組成代表隊，因此總共有 $C(n,k)C(n-k,m-k)$ 種作法。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

附帶一提，利用恆等式五不難證明當 $0<k<m<n$，$C(n,m)$ 與 $C(n,k)$ 必不互質。

恆等式六： 當 $n\geq m\geq 1$，

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}2^{m}.$$

問題： 由 n 個人中選出 m 個人來參加比賽，並指派每名參賽者參加筆試或口試（兩者之一），上述工作總共有幾種可能的作法？

由於從 n 人中選出 m 人的方法有 $C(n,m)$ 種，而這 m 個參賽者每人都有參加筆試或口試兩種可能，因此答案為 $C(n,m)2^{m}$。

所有這些作法中，我們可以依參加筆試的人數來作分類；有些作法參加筆試的人數為 0，有些為 1，有些為 2，……，有些為 m。考慮參加筆試的人數為 k 時的情

形；我們可以從全部 n 人中先選出 k 人來參加筆試（選法有 $C(n,k)$ 種），再從其他 $n-k$ 個人中選出 $m-k$ 個人來參加口試（選法有 $C(n-k,m-k)$ 種），因此總共有 $C(n,k)C(n-k,m-k)$ 種作法。當 $k=0,1,2,\ldots,m$，所有各類作法數的總和一定等於 $C(n,m)2^m$，因此上面的等式成立。

恆等式七： 當 $n\geq 1$，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

問題：由 n 個男生和 n 個女生（總共 $2n$ 個人）中選出 n 個人的方法有幾種？

答案顯然是 $C(2n,n)$，而所有這些選法可依所選出的 n 人中的男生人數來分類。當 n 人中含有 k 個男生時，女生人數必為 $n-k$；由於從 n 個男生中選出 k 個男生的方法有 $C(n,k)$ 種，從 n 個女生中選出 $n-k$ 個女生的方法有 $C(n,n-k)$ 種，因此所選出的 n 人中含有 k 個男生的選法有

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$$

種；當 $k=0,1,2,\ldots,n$，所有選法數的總和等於 $C(2n,n)$，因此上面的等式成立。

請注意我們也可以將恆等式七解讀為：由 n 個男生及 n 個女生中選出相同數量的男生與女生的選法有 $C(2n,n)$ 種。

恆等式八（二項式定理）：當 $n\geq 1$，

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

問題：某間大學這學期的體育課總共有 x 種室內項目及 y 種室外項目可供學生選修，每名學生須從這 $x+y$ 個運動項目中選擇一項。如果學生人數為 n，總共有多少種可能的選課結果？

由於總共有 n 名學生而每名學生都有 $x+y$ 個可能的選擇，因此總共有 $(x+y)^n$ 種可能的選課結果。

另一方面，我們可將所有選課方式依選修室內項目的學生人數分類；當選修室內項目的學生數為 k 時（此時選修室外項目的學生數為 $n-k$），由於從 n 人中選出 k 人的方法有 $C(n,k)$ 種，而這 k 個人每人都可選擇 x 種室內項目之一，其他 $n-k$ 個人則是每人可選擇 y 種室外項目之一，因此當選修室內項目的學生數為 k 時總共有 $C(n,k)x^k y^{n-k}$ 種可能的選課結果；當 $k=0,1,2,\ldots,n$，總共有 $\Sigma_{k=0}^{n}C(n,k)x^k y^{n-k}$ 種可能的選課結果。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

恆等式九： 當 $n\geq k\geq 0$，

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

問題：由集合 $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$ 中選出 $k+1$ 個數的方法有幾種？

答案顯然是 $C(n+1,k+1)$，而所有這些選法可依所選出的 $k+1$ 個數中的最大數的值分類；當所選出的 $k+1$ 個數中的最大

數為 $m+1$ 時，另外 k 個數必須由小於或等於 m 的所有正整數（即 $\{1,2,\ldots,m\}$）中選出，選法有 $C(m,k)$ 種；當 $m+1=k+1,k+2,\ldots,n+1$（也就是 $m=k,k+1,\ldots,n$），所有選法數的總和一定等於 $C(n+1,k+1)$，因此上面的等式成立。

本文一開始提及的連續正整數求和公式其實是此式在 $k=1$ 時的特例。

恆等式十：當 $n\geq 2k\geq 0$，

$$\sum_{m=k}^{n-k}\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

問題：由集合 $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$ 中選出 $2k+1$ 個數的方法有幾種？

答案顯然是 $C(n+1,2k+1)$，而所有這些選法可依所選出的 $2k+1$ 個數的中位數（median）的值分類，當中位數為 $m+1$ 時，比中位數小的 k 個數須由 $\{1,2,\ldots,m\}$ 中選出（選法有 $C(m,k)$ 種），比中位數大的另外 k 個數須由 $\{m+2,m+3,\ldots,n+1\}$ 中選出（選法有 $C(n-m,k)$ 種），因此當中位數為 $m+1$ 時的選法有 $C(m,k)C(n-m,k)$ 種；當 $m+1=k+1,\ k+2,\ldots,n+1-k$（也就是 $m=k,k+1,\ldots,\ n-k$），所有選法數的總和一定等於 $C(n+1,2k+1)$，因此上面的等式成立。

恆等式十一：當 $n\geq m$，

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{n+m}{m}.$$

問題：由 n 個男生與 m 個女生中選出 m 個人的方法有幾種？

答案顯然是 $C(n+m,m)$，而所有這些選法可依被選中的男生的人數分類，當男生有 k 個人被選中（選法有 $C(n,k)$ 種）時，女生有 $m-k$ 個人被選中（選法有 $C(m,m-k)$ 種），因此所選出的 m 人中有 k 個男生的選法有

$$\binom{n}{k}\binom{m}{m-k}=\binom{n}{k}\binom{m}{k}$$

種；當 $k=0,1,2,\ldots,m$，所有選法數的總和一定等於 $C(n+m,m)$，所以上面的等式成立。

上式的一個「非組合證明」是將等號左邊看成是 $(\Sigma_{k\geq 0}C(n,k)x^k)(\Sigma_{k\geq 0}C(m,k)x^k)$ 中 x^m 的係數；由二項式定理得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k\geq 0}C(n,k)x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}C(m,k)x^k\right)\\&=(1+x)^n(1+x)^m\\&=(1+x)^{n+m}\end{aligned}$$

由於 $(1+x)^{n+m}$ 中 x^m 的係數為 $C(n+m,m)$，因此上面的等式成立。

前面的恆等式七其實是恆等式十一在 $m=n$ 時的特例。

恆等式十二：當 $n\geq 1$，

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}^2=n^2\binom{2n-2}{n-1}.$$

問題：由 n 個男生中選出任意一些人來組成一個代表隊，由 n 個女生中也選

出相同數量的女生來組成另一個代表隊，各隊中又分別選出一人做為隊長，上述工作總共有幾種可能的作法？

考慮男生與女生各選出 k 人的情形。由 n 個男生中選出 k 人的方法有 $C(n,k)$ 種，而由 k 人中選出一名隊長的方法有 k 種，因此男生的部分總共有 $kC(n,k)$ 種作法；女生的部分同樣也有 $kC(n,k)$ 種作法，因此男女搭配總共有 $(kC(n,k))^2$ 種作法；當 $k=0,1,2,\ldots,n$，所有可能的作法總數為 $\Sigma_{k=0}^{n}(kC(n,k))^2$。

另一方面，我們也可以先選出男生與女生各一人做為隊長（選法有 $n\cdot n=n^2$ 種），然後再從剩下的 $n-1$ 個男生與 $n-1$ 個女生（總共 $2n-2$ 個人）中選出相同數量的男生與女生做為兩隊隊員（選法有 $C(2n-2,n-1)$ 種，見恆等式七），因此總共有 $n^2C(2n-2,n-1)$ 種作法。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上面的等式成立。

參、一般化的巴斯卡恆等式

將 14 個人分成甲、乙、丙、丁四組，每組分別含有 5、4、3、2 個人，總共有多少種分法？

我們可先從全部 14 個人中選出 5 人編入甲組（選法有 $C(14,5)$ 種），再從剩下的 9 個人中選出 4 人編入乙組（選法有 $C(9,4)$ 種），再從剩下的 5 個人中選出 3 人編入丙組（選法有 $C(5,3)$ 種），再將剩下的 2 個人編入丁組（選法有 $C(2,2)$ 種）；因此所求為

$$C(14,5)\times C(9,4)\times C(5,3)\times C(2,2)$$

$$=\frac{14!}{5!\,9!}\times\frac{9!}{4!\,5!}\times\frac{5!}{3!\,2!}\times\frac{2!}{2!\,0!}=\frac{14!}{5!\,4!\,3!\,2!}.$$

一般而言，將 n 個人分為 r 組，其中第一組有 k_1 個人，第二組有 k_2 個人，……，第 r 組有 k_r 個人的分法總共有

$$\frac{n\,!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

種；請注意 $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$。數學上常將上式記作

$$\binom{n}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_r}$$

或

$$C(n\,;k_1,k_2,\ldots,k_r)$$

並稱這種數為 multinomial coefficients。二項式係數其實是上式在 $r=2$ 時的特例：

$$\binom{n}{k_1\ k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}=\binom{n}{k_1}$$

前面提過的巴斯卡恆等式此時成了

$$\binom{n}{k_1\ k_2}=\binom{n-1}{k_1-1\quad k_2}+\binom{n-1}{k_1\quad k_2-1}.$$

一般而言，

$$\binom{n}{k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r}=$$

$$\binom{n-1}{k_1-1\ \ k_2\ \ \cdots\ k_r}+\binom{n-1}{k_1\ \ k_2-1\ \ \cdots\ k_r}+$$

$$\binom{n-1}{k_1\ \ k_2\ \ k_3-1\ \cdots\ k_r}+\cdots+\binom{n-1}{k_1\ \ \cdots\ k_r-1}$$

從組合的觀點不難說明上式為何成立，我們的組合問題是：將 n 個人分為 r 組，其中第一組有 k_1 個人，第二組有 k_2 個

人，……，第 r 組有 k_r 個人的分法有幾種？我們已知答案為

$$\binom{n}{k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r}$$

另一方面，假設張三是這 n 人之一；所有分法可依張三被編入哪一組來分類；如果張三是被編入第 i 組，剩下的 $n-1$ 人中將有 k_1 個人被編入第一組，有 k_2 個人被編入第二組，……，有 k_i-1 個人被編入第 i 組，……，有 k_r 個人被編入第 r 組；由於 i 可能是介於 1 與 r 之間的任何數（含 1 與 r），因此所有 r 種可能情形的分法數的和即為所求。

以上兩種方法所得的結果應該相等，因此上述恆等式確實成立。

肆、結語

相對於二項式定理，我們也可以證明 $C(n;k_1,k_2,\ldots,k_r)$ 是

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$$

的展開式中 $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$ 的係數；也就是說，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n}\binom{n}{k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$$

這個定理稱做 multinomial theorem。二項式定理就是此定理在 $r=2$ 時的特例。

只要情境營造得宜，恆等式的組合證明常可讓所證明的式子「活起來」，式子裡的每一項都顯得生動且理所當然，這樣的證明方式不僅有趣，所得的結論也特別具有說服力。

伍、練習題

以下的恆等式也都可以用組合的方式來證明，提供讀者參考。

1. 當 $n\ge k\ge 0$，

$$n!=\binom{n}{k}k!(n-k)!$$

2. 當 $n>k\ge 0$，

$$(n-k)\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k}$$

3. 當 $n\ge 2$，

$$k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

4. 當 $n>m\ge 0$，

$$\sum_{k\ge 0}\binom{n}{2k}\binom{2k}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m-1}$$

5. (Vandermonde’s identity)當 $m,n\ge 0$，

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k}$$

6. $n\ge 0, m\ge 1$，

$$\sum_{k\ge 0}k\binom{n}{k}\binom{m}{k}=n\binom{n+m-1}{m-1}$$

7. 當 $n\ge 2$，

$$\sum_{k\ge 0}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

8. 當 $m\ge 0, n\ge 0$，

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}2^k$$