

談二維表格在數學教學上的應用

李祐宗

澎湖縣立湖西國民中學

壹、前言

國中小階段的學生在學習座標時常用到以下的二維表格來做學習，橫軸代表 x 座標；縱軸代表 y 座標，如下表。表格中的座標代表平面座標第一象限的部份座標。但筆者發現在其他的單元教學上，此表格很適合拿來做教學，筆者舉例如下：

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

貳、擲骰子問題

在國中機率單元裡常見到一次投擲兩顆骰子的問題，一般的教學方式為教導學生畫樹狀圖，但此種方式頗佔空間，且分析問題時也沒有利用表格的方式來的清晰。此時可以將上表的 x 軸與 y 軸重新定義為投擲第一次與第二次骰子的點數（或是一次投擲兩顆骰子，第一顆及第二顆骰子的點數），表格中的座標同時就變成投擲兩顆骰子的所有情況，總共有 36 種，一目瞭然。接下來看看以下各題目的答案所呈現的顏色區塊位置：

一、點數和大於 7 的機率： $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

(著色區呈現的等差數列： $1+2+3+4+5=15$)

二、點數和小於 6 的機率： $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

(著色區呈現的等差數列： $4+3+2+1=10$)

三、第一次點數比第二次大的機率： $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

(著色區呈現的等差數列： $1+2+3+4+5=15$)

四、兩次皆為質數的機率： $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

五、兩次點數皆相同的機率： $\frac{1}{6}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

六、點數和為奇數的機率： $\frac{1}{2}$

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

參、投擲硬幣及生小孩的機率問題

此主題指的是投擲一枚硬幣兩次、投擲兩枚硬幣一次以及生兩個小孩的機率問題，此時將座標軸改為投擲第一次及第二次（或一次投擲兩枚硬幣，第一枚及第二枚硬幣）的正反面情況。1 代表正面；2 代表反面，此時只要擷取表格中的著色部分即可代表所有投擲的情況。其中兩次同面的機率為 $\frac{1}{2}$ ；一正一反的機率亦為 $\frac{1}{2}$ 。

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

同樣的，生兩個小孩的機率問題也可利用此表來解決。將座標軸改為第一胎及第二胎的情況，1 代表男生；2 代表女生。表格中著色部分代表生兩個小孩的所有情況。從表格可知，兩胎都是男生的機率與兩胎都是女生的機率皆為 $\frac{1}{4}$ ；而生一男一女的機率為 $\frac{1}{2}$ ，由此可見，生一男一女的機率比較容易呢！

肆、兩人猜拳的機率問題

一、三種拳的情況

我們再把座標軸的 1、2、3 改成甲乙兩人的剪刀、石頭與布。從表格中可以看到兩人猜拳平手的機率為 $\frac{1}{3}$ ；甲乙兩人輸贏的機率也各為 $\frac{1}{3}$ 。

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3 (布)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2 (石頭)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1 (剪刀)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1 (剪刀)	2 (石頭)	3 (布)	4	5	6

二、五種拳的情況

假設我們可以發明一種猜拳遊戲，就是甲乙兩人以手指頭數目當作主角，出五隻手指頭的人贏出四隻手指頭的人、四隻手指頭贏三隻手指頭、三隻手指頭贏兩隻手指頭、兩隻手指頭贏一隻手指頭（一隻手指頭以出大拇指的動作來表示）、而一隻手指頭的人贏五隻手指頭。現在以表格的兩軸的 1~5 作為彼此的五種拳，每猜一次拳的輸贏狀況如下：

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

從上圖可以得知甲乙兩人每猜一次拳平手的機率是 $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ ；甲乙兩人猜贏或猜輸的機率同樣都是 $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ 。至此或許有眼尖的讀者發現三種拳及五種拳輸贏的機率並不相同，後者的機率 $\frac{2}{5}$ 大於前者的 $\frac{1}{3}$ ($\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$)，那麼是否以後猜拳採用後者的方式比較容易贏呢？或者把後者的規則改成五隻手指頭贏一隻手指頭的話是否會改變猜拳的機率？讀者可以好好思考看看！

伍、平行四邊形的教學

咦~此表格也拿來作平行邊形的教學喔？其實可以的，這是筆者在此單元教學時發現的。有個問題可以用此表格解決：市售的幾何扣條有六種顏色，不同顏色的扣條長度均不相同，且相同顏色的扣條長度均相同。試問，此六種扣條任意選取四根可以組成幾種不同的平行四邊形？此時可以將座標軸的 1~6 代表不同的顏色各兩條。為何要代表兩條呢？因為三條同色搭配一條異色的組合是不可能組成平行四邊形的。

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

(著色區呈現的等差數列： $1+2+3+4+5+6=21$)

上方表格的著色區（一共 21 種組合方式）即為答案，例如 (3, 5) 代表兩條 3 號扣條以及兩條 5 號扣條的組合；(6, 6) 代表四條 6 號扣條的組合。

在教學過程中，學生也因此表格可以做出不同花樣而感到驚訝不已，有種平凡中見其偉大的感覺。而且注意有許多問題的答案（著色區）代表了等差數列或其他具規律的形式，這就是利用表格來解決問題、推理問題的價值所在。筆者在此僅提供由二維表格可以想到的教學題材，足供相關單元的基礎觀念學習，不論是平常教學或是作為補救教學，都是個不錯的教學方式！

參考文獻

李祐宗(2011)：談幾何扣條在國中數學「平行」與「四邊形」單元的應用，科學教育月刊，第 344 期，第 49-55 頁。