

---

# 對國小三年級數學低成就學童 在分數迷思概念之探討

蔡職鴻<sup>1</sup> 劉曼麗<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>臺東縣立尚武國民小學

<sup>2</sup>國立屏東教育大學 數理教育研究所

## 壹、前言

先進國家美國省思其國內的基礎學力日益低落，為重振學生的學業成就，於 2002 年重新修訂「中小學教育法」(The Elementary and Secondary Education Act, ESEA)，並由國會通過「No Child Left Behind 教育改革法案」，意即不讓任何一個孩子落後(李孟峰、連廷嘉，2010；陳明印，2002；Hess & Petrilli, 2006；McDermott & Jensen, 2005)。我國教育部為因應 12 年國教的推動，自 101 年度起，全國常模後 35% 的學生須接受補救教學，以期提升低成就學童的學習能力，幫助學生重拾學習信心，進而縮短學習落差(林志成，2012)。在數學教育研究中，「分數」向來是備受數學教育學者所重視的研究主題之一，且在日常生活、數學與自然科學的教材中，都可以發現分數是很常用的重要概念(陳明宏、呂玉琴，2005)。然而無論國內外的研究報告都指出學童學習分數是困難的(林右姍，2007；林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996；Cramer, Post, & delMas,

2002)。尤以剛接觸分數的三年級學童來說，「分數符號」是非常抽象的符號，對學童學習是全新的觀念。這時如果學童沒有建立清楚的分數概念，將會影響到之後分數的學習，所以三年級分數課程會是奠定分數概念基礎的重要時期。因此，我們藉由一份筆試試題對三年級數學低成就的學童進行施測並對施測學童易犯的迷思概念作分析，期能更加了解三年級數學低成就學童在分數學習的困難，以作為教師日後進行分數補救教學之參考。

## 貳、筆試簡介

參與筆試測驗的三年級學童所接受的課程是九年一貫課程(92 課綱)，而其第一學習階段(一、二、三年級)的學童必須學會有關分數能力指標之分年細目計有 2-n-07、2-n-10 以及 3-n-09 等三條(教育部，2003)，其內容見下表 1。

依據三年級學童須具備的 2-n-07、2-n-10 以及 3-n-09 這三條分年細目，選定「分數的意義」、「分數比大小」以及「同分母分數的加減」等三個主題。而分數比大小可再細分成單位分數比大小與同分母

---

\*為本文通訊作者

分數比大小。試題乃選取自《國小分數與小數的教學、學習與評量》一書中(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩, 2009)之題目, 針對每個主題選題組卷, 總共 18 題。其中, 有關分數的意義包含 5 題、分數比大小包含 9 題(單位分數比大小 4 題與同分母分數比大小 5 題)以及同分母分數的加減包含 4 題。筆試樣本是從高屏地區 6 所不同學校中, 每校選取 5 名數學學習低成就的三年級學童, 總計 30 人。

### 參、低成就學童學習分數之迷思概念

我們將受測學童的答題結果及其主

要迷思概念或成因整理於下表 2。

從學童的整體答題結果來看, 單位分數比大小是學童表現最不好的類型, 其次是分數的意義, 最後是同分母分數比大小與同分母分數的加減。然而不論是分數的意義、分數比大小以及同分母分數的加減, 其概念都是以分數的意義-部分/整體關係為核心。我們發現當學童沒有了解分數的意義時, 連帶的就會影響到其在單位分數比大小以及同分母分數比大小的答題表現, 且會產生許多的迷思概念。以下就「分數的意義」、「分數比大小」以及「同分母分數的加減」三個主題來探討三年級數學學習低成就學童易犯的迷思概念。

表 1 數學學習領域第一階段能力指標之分年細目

分年細目		對照指標
2-n-07	能在具體情境中, 進行分裝與平分的活動。	N-1-04 N-1-06
2-n-10	能在平分的情境中, 認識分母在 12 以內的單位分數, 並比較不同單位分數的大小。	N-1-09
3-n-09	能在具體情境中, 初步認識分數, 並解決同分母分數的比較與加減問題。	

表 2 三年級學習低成就學童的答題結果及主要迷思概念

主題	題數	平均答錯率	主要迷思概念或成因	
分數的意義	5	90/150 (60%)	不能掌握分數的部分/整體關係	
分數 比大小	單位分數 比大小	4	92/120 (76.7%)	認為分母愈大, 分數值愈大
	同分母分數 比大小	5	25/150 (16.7%)	認為分子愈大, 分數值愈小(混淆口訣的意義)
同分母分數的加減	4	20/120 (16.7%)		

### 一、在「分數的意義」之迷思概念

分數符號對剛接觸「分數」單元的三年級學童來說是非常抽象的符號，而且分數的形式是學童首次碰到兩整數並置的約定(教育部，2003)。分數概念起源於“分”，是用來解決不滿一個單位量的數值的問題(呂玉琴，1996)。將 1 個整體切割成  $n$  等份下，分數是用來紀錄部分/整體的關係。單位分數符號  $\frac{1}{n}$  是用來記錄一等份而真分數符號  $\frac{m}{n}$  是用來記錄  $m$  等份，如  $\frac{1}{4}$  塊餅乾是表示 1 塊餅乾被切成 4 等份，其中的 1 份；而  $\frac{3}{4}$  塊餅乾是表示 1 塊餅乾被切成 4 等份，其中的 3 份。學童在不了解分數的部分/整體關係，很容易就會產生學習上的錯誤，以試題 1 為例：

**試題 1：**把 6 塊餅乾平分給大雄、小夫、胖虎 3 人，大雄得到幾塊？

- ①  $\frac{2}{6}$  塊    ② 2 塊    ③ 1 塊  
④ 3 塊    ⑤ 其他

答題結果：

選項	選答率
①	11/30(36.7%)
②	*12/30(40%)
③	3/30(10%)
④	3/30(10%)
⑤	1/30(3.3%)

\*號者為正確答案

試題 1 是一題常見的分東西題型，從答題結果來看有 18/30(60%)的學童答錯，細究其答題表現選擇  $\frac{2}{6}$  塊(選項①)和 2 塊(選項②)的學童有 23/30(76.7%)，可見大部分的學童都能算出大雄可以分得 2 塊餅乾，但是這 23 位學童中卻有 11 位學童是選擇  $\frac{2}{6}$  塊(選項①)。透過訪談發現這些學童雖然已經算出 2 塊餅乾的答案，可是在剛學到分數的影響下，他們所算出的答案就受到動搖了，好像選擇  $\frac{2}{6}$  塊(選項①)是會讓人比較安心的。訪談案例舉隅如下：

#### 試題 1 之訪談案例

T：6 塊餅乾分給 3 人，每人可分得多少塊？

S：2 塊。

T：你有算出 2 塊了嗎？

S：有。

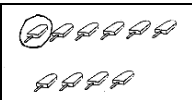
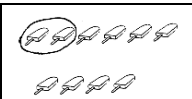
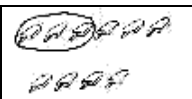
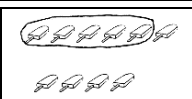
T：那為什麼答案不選擇 2 塊(選項②)

反而選擇  $\frac{2}{6}$  塊(選項①)呢？

S：因為老師剛教過分數，而選項中有分數的答案，我覺得分數的答案比較對。

由此可知，學童即使已由題意算出 2 塊，還是選了有分數的選項為答案，顯示這些學童可能是不了解分數符號所代表的意涵-部分/整體關係。同樣的錯誤情形我們在試題 2 中也可看到：

**試題 2：**爸爸買了一包 10 枝的冰棒，全家吃掉  $\frac{1}{2}$  包冰棒，請問全家吃掉幾枝冰棒，下面哪一個圈法是對的？

- ① 
- ② 
- ③ 
- ④ 
- ⑤ 其他

答題結果：

選項	選答率
①	8/30(26.7%)
②	6/30(20%)
③	1/30(3.3%)
④	*12/30(40%)
⑤	3/30(10%)

從答題結果來看此題也是有 18/30(60%)的學童答錯，這 18 位答錯的學童中有 15 位選擇了 1 支(選項①)、2 支(選項②)或 3 支(選項③)，這些學童可能都是不了解分數  $\frac{1}{2}$  包的意義(把一包冰棒 10 支

分成 2 等份取其中的 1 份即為  $\frac{1}{2}$  包)而產生

錯誤。在缺乏分數的部分/整體關係下，自然而然地會由「整數」的想法出發，將題

目  $\frac{1}{2}$  的分子 1 和分母 2 視為兩個單一的獨立個體：其中的 8 位學童可能是看到分子的 1 就選擇和分子一樣的數值 1 支(選項①)為答案；而 6 位學童可能是看到分母的 2 就選擇和分母一樣的數值 2 支(選項②)為答案；另外答錯的 1 位學童可能是將分子的 1 與分母的 2 相加等於 3，而選擇 3 支(選項③)的答案。因此，我們發現許多低成就學童可能只知道  $\frac{1}{2}$  是分數，但卻無法了解

由分子與分母兩整數並置所代表的是部分/整體關係。此結果在許多的相關研究中亦可發現(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩，2009；洪素敏、楊德清，2002；楊王孝，1988；Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984；Cramer, Post, & delMas, 2002；Post, Cramer, Behr, & Lesh, Harel, 1992)。

## 二、在「分數比大小」之迷思概念

分數比大小依分子相同與分母相同的情況，可分成單位分數比大小(分子相同)及同分母分數比大小(分母相同)兩小主題來做探討。我們發現學童在單位分數比大小的表現很不好，有 22/30(73.3%)的學童答錯，但在同分母比大小的表現卻僅有 5/30(16.7%)的學童答錯；前後兩者差異極大。以下先分別依學童在這兩小主題的答題表現作分析，再進一步探討學童在這兩小主題表現差異的原因。

### (一) 單位分數比大小

單位分數是學童最早學習到的分數

形式，也是最簡單的分數形式。然而從前面的試題 1 及試題 2 都有 18/30 (60%)的學童答錯，我們發現學童在未了解「一個」分數的意義，就處理接下來的「兩個」單位分數比大小的題目，答錯的學童增加到 22/30(73.3%)，而且在這樣的情形下，學童容易衍生出更多的迷思概念或錯誤。以例題 3 及例題 4 為例：

**試題 3：**一盒水梨有 12 顆， $\frac{1}{3}$  盒水梨和  $\frac{1}{4}$

盒水梨，那一個比較多？

- ①  $\frac{1}{3}$  盒水梨比較多
- ②  $\frac{1}{4}$  盒水梨比較多
- ③ 一樣多
- ④ 不能比較

答題結果：

選項	選答率
①	* 8/30(26.7%)
②	15/30(50%)
③	5/30(16.6%)
④	2/30(6.7%)

**試題 4：**媽媽買了一盒月餅，其中共有 20

個。哥哥吃了  $\frac{1}{4}$  盒，弟弟吃了  $\frac{1}{5}$

盒。請問哥哥和弟弟誰吃較多？

- ① 哥哥吃  $\frac{1}{4}$  盒
- ② 弟弟吃  $\frac{1}{5}$  盒

③ 一樣多

④ 不能比較誰吃較多

答題結果：

選項	選答率
①	* 8/30(26.7%)
②	14/30(46.7%)
③	5/30(16.6%)
④	3/30(10%)

從學童的答題結果來看，兩試題都有 22/30(73.3%)的學童答錯，而且在試題 3 答錯的全部 22 位學童在試題 4 也都答錯。另外，雖然有 8 位學童答對，可是其中有 2 位都是對 1 題且錯 1 題，顯見以上這 24 位答錯的學童可能還不了解分數的部分/整體關係，才會無法比較出兩分數的大小。接下來再從學童的答題表現來看，我們將學童的錯誤情形分成兩種：

### 1. 依分母的數值來選擇答案

在試題 3 中有 15/30(50%)的學童選擇

$\frac{1}{4}$  盒(選項②)為答案以及在試題 4 中

有 14/30(46.7%)的學童選擇  $\frac{1}{5}$  盒(選

項②)為答案。這兩試題都有將近一半的學童選擇分母數值較大的分數為答案，推測這些犯錯的學童可能都是依分母的數值來選擇答案。而且我們再進一步分析發現，原本在試題 3 受分母數值影響的 15 位學童中有 11 位在試題 4 也犯了相同的錯誤。

## 2. 依分子的數值來選擇答案

學童答錯的情形是選擇一樣多(選項③)為答案，在這兩試題都有5/30(16.6%)的學童犯此錯誤，而且原本在試題3受分子數值影響的5位學童在試題4也犯了相同的錯誤，推測這些犯錯的學童可能是誤以為兩分數的分子數值都是1，其分數值就會相同。

我們如果再將這兩試題與前面的試題2來做比較，就答題結果而言，原本在試題2有12/30(40%)的學童答對，但這答對的12位學童中卻又僅僅只有5位在試題3及試題4中也能答對。另外就題目而言，

試題2有圖來協助學童認識分數 $\frac{1}{2}$ ，增進

題意的了解，而在試題3與試題4中出現的分數純粹就是符號表徵。我們會發現學童在接觸到兩分數比大小時，若是學童分數的部分/整體關係無法從圖像表徵轉換到分數符號的形式，容易在缺少圖像連結的情況下，忽略分數的部分/整體關係，依舊將分數視為兩個單一的獨立個體。所以，如果學童聚焦在單位分數的分母，就誤以為分母的數值愈大其分數值就愈大、分母的數值愈小其分數值就愈小；或是聚焦在分子，就誤以為單位分數的分子之數值都是1其分數值就會相同。

此外，針對試題4單位分數比大小的題型，我們還想關心學童是否只看到題目中的分數就直接比較分數值的大小而忽略當中的單位量，故將試題4的題目稍做變

化，更改成哥哥與弟弟都吃了相同的 $\frac{1}{5}$ 盒，而單位量卻不相同，修改如試題5：

**試題5：**媽媽買了兩盒月餅，其中一盒有

20個，哥哥吃了 $\frac{1}{5}$ 盒，另一盒有

30個，弟弟也吃了 $\frac{1}{5}$ 盒。請問哥

哥和弟弟誰吃較多？

①哥哥

②弟弟

③一樣多

④不能比較誰吃較多

答題結果：

選項	選答率
①	2/30(6.7%)
②	*5/30(16.7%)
③	21/30(70%)
④	2/30(6.6%)

由學童的答題結果來看，有高達25/30(83.3%)的學童答錯，其中有21/30(70%)的學童是選擇了一樣多(選項③)為答案，這21位犯錯的學童可能都是受到分數 $\frac{1}{5}$ 是相同的影響，而未考慮到單

位量是不相同的。另外，原本在試題4答對的8位學童中有4位學童在此題卻選擇了一樣多(選項③)為答案，猜測這4位學童可能兩題都僅依分數來比大小，並未考慮到單位量。此結果與呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)，洪素敏(2004)，楊

德清和洪素敏(2003), Cramer 等學者(2002) 之研究相呼應。

綜合學童在上述的 3 題答題表現, 我們發現試題雖有情境, 但多數的低成就學童未能掌握單位分數的意義, 僅能直接從其符號表面中的分子或分母來決定大小, 以致答題失敗。再從整個施測結果來看, 「單位分數比大小」雖為二年級的能力指標 2-n-10(能在平分的情境中, 認識分母在 12 以內的單位分數, 並比較不同單位分數的大小), 卻是施測學童表現最不好的類型。由此顯示, 處理「單位分數內容物為多個個物」的問題, 對三年級低成就學童而言是有困難的。但此結果也並非只是低成就學童的專利(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩, 2009)。這些發現或許可以支持 97 課程綱要數學學習領域, 將分年細目 2-n-10 併入到三年級教學, 並刪除比較單位分數的大小教學, 修正對照表如表 3。

### (二) 同分母分數比大小

當單位量一樣, 要求學童比較兩個具有相同單位的同分母分數的大小時, 從學

童的答題結果來看, 雖然僅有少數學童出現答題錯誤, 但是我們發現學童依舊有迷思概念產生, 值得我們進一步探討。以例題 6 及例題 7 為例:

**試題 6:** 一個巧克力蛋糕切成 12 等份,

$$\frac{5}{12} \text{ 個蛋糕和 } \frac{7}{12} \text{ 個蛋糕, 那一個}$$

比較多?

①  $\frac{5}{12}$  個蛋糕比較多

②  $\frac{7}{12}$  個蛋糕比較多

③ 一樣多

④ 不能比較

答題結果:

選項	選答率
①	5/30(16.7%)
②	*25/30(83.3%)
③	0/30(0%)
④	0/30(0%)

表 3 92 課綱與 97 課綱在二、三年級分年細目之修正對照表

92 課綱	97 課綱		
能在具體情境中, 進行分裝與平分的活動。	2-n-07	能在具體情境中, 進行分裝與平分的活動。	2-n-07
能在平分的情境中, 認識分母在 12 以內的單位分數, 並比較不同單位分數的大小。	2-n-10		
能在具體情境中, 初步認識分數, 並解決同分母分數的比較與加減問題。	3-n-09	能在具體情境中, 初步認識分數, 並解決同分母分數的比較與加減問題。	3-n-11

試題 7：一盒圖釘有 100 個圖釘， $\frac{7}{10}$  盒圖

釘和  $\frac{3}{10}$  盒圖釘，那一個比較多？

①  $\frac{7}{10}$  盒圖釘比較多

②  $\frac{3}{10}$  盒圖釘比較多

③ 一樣多

④ 不能比較。

答題結果：

選項	選答率
①	*25/30(83.3%)
②	4/30(13.3%)
③	1/30(3.4%)
④	0/30(0%)

在試題 6 與試題 7 都只有 5/30(16.7%) 的學童答錯，雖然是少數學童答錯，但是我們卻對這些答錯的學童感到很好奇。一般而言，若是概念不懂的學童也應該會受到分子數值較大的影響，在同分母的情形下會選擇分子比較大的分數值為答案，為什麼還會有一些學童是選擇分子比較小的分數值為答案呢？為此，我們透過訪談發現，當他們在學習分數時老師經常會教授口訣，遇到同分母分數的比大小時，如  $\frac{2}{3}$

$\square > \frac{1}{3}$ ，口訣就是「分母相同時，只要比較分子的大小，分子大分數值就比較大、分子小分數值就比較小。」而遇到同分子分

數的比大小時，如  $\frac{1}{2} \square > \frac{1}{3}$ ，口訣就是「分

子一樣代表一樣多的東西被分，分母愈小就好像愈少人在分，表示每個人可以分到愈多的東西，其分數值就愈大；反之分母愈大就好像愈多人在分，表示每個人分到的東西愈少，其分數值就愈小。」當學童只是單純的背誦口訣而未加理解，時間一久，口訣就會造成學童學習上認知的混淆，而且一味的讓學童背誦口訣也早已抹殺學童分數概念建立的契機。訪談案例舉隅如下：

試題 6 之訪談案例

T：  $\frac{5}{12}$  與  $\frac{7}{12}$  哪一個分數值比較大？

S：  $\frac{5}{12}$ 。

T： 7 不是大於 5 嗎？

S： 對啊。

T： 那為什麼答案不選擇  $\frac{7}{12}$  塊(選項

②)卻選擇  $\frac{5}{12}$  塊(選項①)呢？

S： 因為老師說過這裡的 12 都一樣，而 7 表示 7 個人在分、5 表示 5 個人在分，所以  $\frac{5}{12}$  的人分得比較多，就比較大。

綜合上述學童的答題結果，我們可以發現這些學童在「同分母分數比大小」的表現比在「單位分數比大小」的表現好，



推測其原因可能是這些學童在分數的學習大都強記硬背而較缺少概念性的理解，普遍會認為當兩分數的分母之數值相同或分子之數值相同時，對應的分子或分母的數值愈大則其分數值就會愈大。然而，以此方法套用在同分母分數比大小雖然恰巧適用，但套用在單位分數(同分子)比大小時就無法通用了。此結果與呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)，呂玉琴(1991)，洪素敏、楊德清(2002)，洪素敏(2004)之研究相呼應。

### (三) 在「同分母分數的加減」之迷思概念

由施測結果來看，學童在「同分母分數的加減」题目的答題表現僅出現看錯運算符號，將加號看成減號或將減號看成加號而計算錯誤，此結果與李源順(2005)，呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)之研究相呼應。以下列舉兩位學童的錯誤計算情形如圖 1 及圖 2。

我們並未看到文獻所提及三、四年級學童會有的「分母加分母與分子加分子」之迷思概念(李源順，2005；李源順、余新富、李勇諭，2006；呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩，2009)。初步推敲，可能是這些受測的三年級學童目前只有學習到同分母分數的加減算則(分母不變、分子相加減)，較不會因混淆其它算則(如：異分母分數的加減或分數的乘除算則)而產生迷思概念。也有可能是這些低成就學童依舊受到整數加減法影響，但忽略分母或擔心同分母相減會變 0，僅直接將分子做加減。抑或是相關文獻所提及的迷思概念

有無可能出現在中成就的學童。這些都值得我們進一步再對全班或不同成就的學童進行研究。

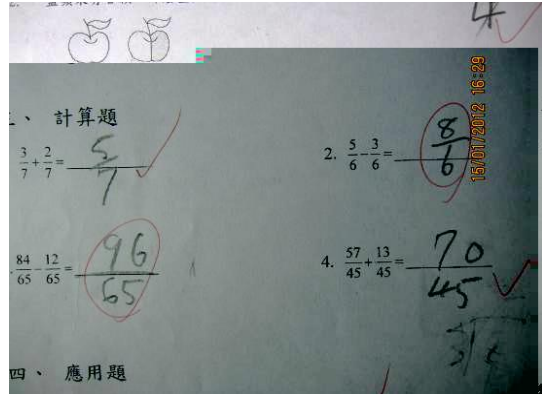


圖 1 將減號看成加號

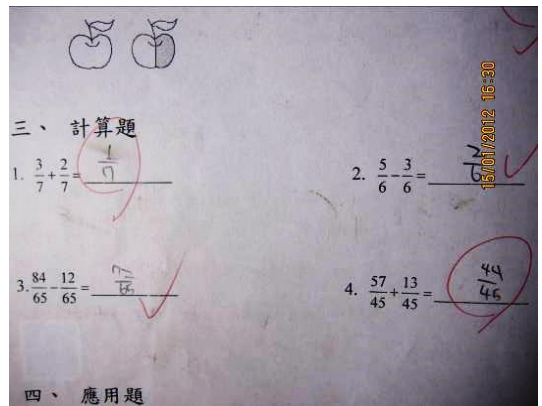


圖 2 將加號看成減號

## 肆、個案舉隅

不論是分數的意義、單位分數比大小以及同分母分數比大小，其概念都是以分數的意義-部分/整體關係為核心，我們發現低成就學童在分數的意義之表現，確實有可能會連帶影響其在單位分數比大小以及同分母分數比大小的答題表現，進而產生一連串的錯誤或迷思概念。我們舉二位

學童 S1 與 S2 的答題表現並整理如下表 4，其中 S1 是受分子影響而 S2 是混淆口訣的意義。

分析學童在本次施測試題的答題表現，我們將其錯誤類型歸納為兩大類型，第一類型是受分子的影響，第二類型則是混淆口訣的意義。在第一類型的錯誤中，學童將分數的分母及分子視為兩個單一的獨立個體，受到分子的影響使學童的答題產生一連串的迷思概念。以個案 S1 為例，其部分答題結果見圖 3~圖 5。

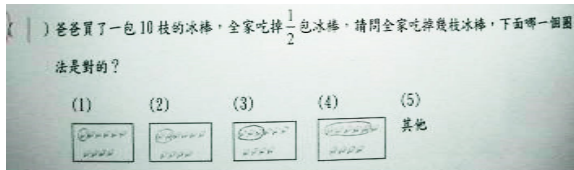


圖 3

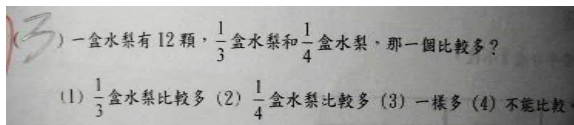


圖 4

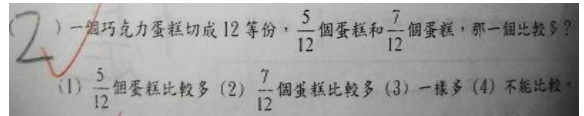


圖 5

在分數的意義題型中(如圖 3)，S1 無法了解由兩整數並置而成的  $\frac{1}{2}$  之部份/整體關係，於答題時可能聚焦在分子 1，而選擇和分子一樣的數值為答案。而這樣的迷思也出現在單位分數比大小的題型(如圖 4)，S1 在答題時可能還是會聚焦在  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{4}$  的分子 1 都相同，則認為兩分數的數值

一樣( $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ )。有如此迷思概念的 S1 在解決同分母分數比大小的題型(如圖 5)時，可能仍然會受到  $\frac{5}{12}$  和  $\frac{7}{12}$  的分子影響，則分

表 4 個案學童分數概念答題結果對照表

題型	個案學童		
	答題結果		
		S1 (受分子影響)	S2 (混淆口訣的意義)
分數的意義	試題 1	X	X
	試題 2	X	X
單位分數比大小	試題 3	X	O
	試題 4	X	O
同分母分數比大小	試題 6	O	X
	試題 7	O	X

子數值愈大其分數值就愈大( $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$ )，

雖然 S1 這時的判斷結果是對的，可是綜觀這幾題 S1 的答題表現，如果學童都僅以分子的數值大小來做判斷，這樣一知半解的概念是否也將嚴重影響之後分數的學習呢？

在第二類型的錯誤中，低成就學童不了解分數的意義，靠著背誦老師所傳授的口訣來解題，在缺乏有意義的連結下就容易混淆口訣的意義而產生一連串的錯誤，以個案 S2 為例，其部分答題結果見下圖 6~圖 8：

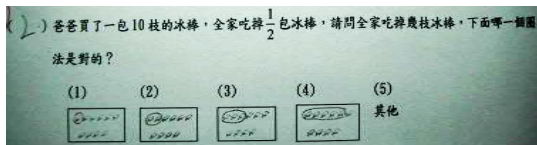


圖 6

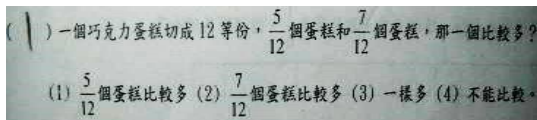


圖 7

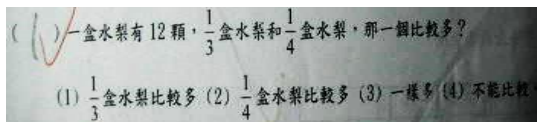


圖 8

在分數的意義題型中(如圖 6)，S2 無法了解  $\frac{1}{2}$  所代表的分數意義，於答題時可能受  $\frac{1}{2}$  的分母 2 影響而選擇和分母一樣的數值為答案。而正因為 S2 無法了解分數的意義，遇到兩分數比大小時，可能轉而

依賴老師傳授的口訣來解題。這種情形出現在同分母分數比大小的題型(如圖 7)，

S2 可能因為依賴背誦的口訣解題，但卻又混淆口訣的意義，誤認為  $\frac{5}{12}$  和  $\frac{7}{12}$  的分母

12 可表示一樣多的東西被分，分子愈小則表示愈少人在分，每人分得愈多，其分數值就愈大( $\frac{5}{12} > \frac{7}{12}$ )。有如此迷思概念的

S2 在解決單位分數比大小的題型(如圖 8)時，儘管這次變成分母的數值相同，可能還是會認為  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{3}$  的分子 1 可表示一樣多

的東西被分，分母愈小則表示愈少人在分，每人分得愈多，其分數值就愈大( $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ )，

雖然 S2 這時的答題結果是對的，可是綜觀這幾題 S2 的答題表現，如果遇到分數比大小的題型時，學童都是以此方法(背誦口訣)來做判斷，這樣一知半解的概念是否也將嚴重影響之後分數的學習呢？

然而，不論這些低成就學童的錯誤類型是屬於第一類：受分子的影響，或第二類：混淆口訣的意義，我們都可將之歸因於不能掌握分數的意義-部分/整體關係，而產生了一些錯誤或迷思概念。

## 伍、結語

本文透過一份試題和數學低成就學童在此份試題的答題結果，來說明三年級低成就學童的分數迷思概念及其成因。整體而言，我們有兩點結論如下：

1. 學童不易掌握分數的部分/整體關係。學童一旦不能掌握分數的部分/整體關係，就會失去概念性的理解以支撐所學。對於之後的分數學習，學童就很容易靠強記死背解題，時間一久就易遺忘或混淆所背，便會產生一連串的錯誤或迷思概念。例如：將一塊蛋糕平分成 8 份， $\frac{3}{8}$  塊蛋糕和  $\frac{5}{8}$  塊蛋糕哪一個比較多？學童若不能掌握分數的部分/整體關係，僅靠背誦口訣解題，時間一久便容易混淆口訣的意義(原意是指在分子相同的情形下，分子一樣可表示一樣多的東西被分，分母愈大則表示愈多人在分，每個人就會分得愈少)，誤認為分母 8 都相同可表示一樣多的東西被分，而分子愈小則表示愈少人在分，每個人分得就愈多，所以  $\frac{3}{8}$  會大於  $\frac{5}{8}$ 。

2. 學童極不易在分數的表徵之間進行轉換。學童碰到的分數型態不外乎以圖像、符號以及文字/口語(陳述意義)等不同表徵來呈現，例如：圖像為



符號為  $\frac{2}{3}$ 、文字/口語(陳述意義)則為平分成 3 份取其中的 2 份。在施測的試題中，我們發現許多低成就學童遇到分數時，可能只知道分數的符號外觀卻不了解其意義，而且不會將分數符號轉換成不同表徵的分數型態來幫助解題，此時就會失去了從

不同分數型態了解分數意義的大好機會。例如：將一塊蛋糕平分成 8 份，

哥哥吃了  $\frac{5}{8}$  塊，弟弟吃了  $\frac{3}{8}$  塊，誰吃得比較多？對於低成就學童常會混淆口訣的意義，而產生許多迷思概念，如認為分子小的表示愈少人在分，分數就比較大。如果他們能將分數符號  $\frac{3}{8}$  和  $\frac{5}{8}$  先連結到將一塊蛋糕平分成 8 份的圖像，再連接到意義—平分成 8 份取其中的 3 份(即 3 份蛋糕)以及平分成 8 份取其中的 5 份(即 5 份蛋糕)，答案就很明顯了。又如：一包糖果有 12 顆， $\frac{1}{3}$  包糖果和  $\frac{1}{4}$  包糖果

哪一個比較多？對於低成就學童常會直接以兩分數的符號來做比較，而產生許多迷思概念，如認為分母大的分數就比較大。如果他們能將分數符號  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{4}$  先連結到 12 顆糖果的圖像，再連接到意義—平分成 3 份取其中的 1 份(即 4 顆糖果)以及平分成 4 份取其中的 1 份(即 3 顆糖果)，答案就呼之欲出了。

因此，針對上述的發現，我們也有以下兩點建議：

1. 教師日後設計三年級分數補救教學課程時，能針對低成就學童易犯的迷思概念或錯誤來做補救。

2. 為三年級低成就學童鞏固分數的基

礎。

礎概念、使其之後的分數學習確實紮根。我們希望教導學童能在不同情境下先找出單位量，再運用圖像、分數符號以及文字/口語(陳述意義)等三種不同表徵，透過相互轉換的能力，意即能寫出符號、畫出圖像以及說(寫)出其意義，將這三者做有意義的連結，建立「三位一體」的分數概念。相信不論遇到哪一類型的分數問題，只要學童能將三位一體的分數概念運用自如，都可迎刃而解。其關係圖如圖 9。

最後，隨著 12 年國教的列車即將啟動，學童的數學能力必須要能銜接，而分數課程又是數學中很重要的一環，也是最令學童感到最困擾的課程之一，其中又以三年級學童初學分數階段最為關鍵，所以我們有著蓋高樓要先打穩地基的重責大任，不能不慎。

## 參考文獻

- 李孟峰、連廷嘉(2010)。「攜手計畫--課後扶助方案」實施歷程與成效之研究。*教育實踐與研究*，**23(1)**，115-144。
- 李源順(2005)。同分母真分數加減運算的教學建議。*台灣數學教師電子期刊*，**3**，2-26。
- 李源順、余新富、李勇諭(2006)。同分母分數加法的教學研究。*科學教育研究與發展季刊*，**0**，114-141。
- 呂玉琴(1991)。國小學生的分數概念：1/2 vs. 2/4。*國民教育*，**31 (11、12)**，10-15。
- 呂玉琴(1996)。數與計算教材設計對分數概念的處理。發表於國立嘉義師範學院 84 學年度數學教育研討會，97-105。
- 呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)。*國小分數與小數的教學、學習與評量*。台北市：五南。
- 林右姍(2007)。*國小兒童分數概念之探討*(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學教育心理與輔導學系，屏東縣。
- 林志成(2012年2月7日)。全國後 35%國一生可參加補救教學。*中時電子報*。取自 <http://news.chinatimes.com/>。

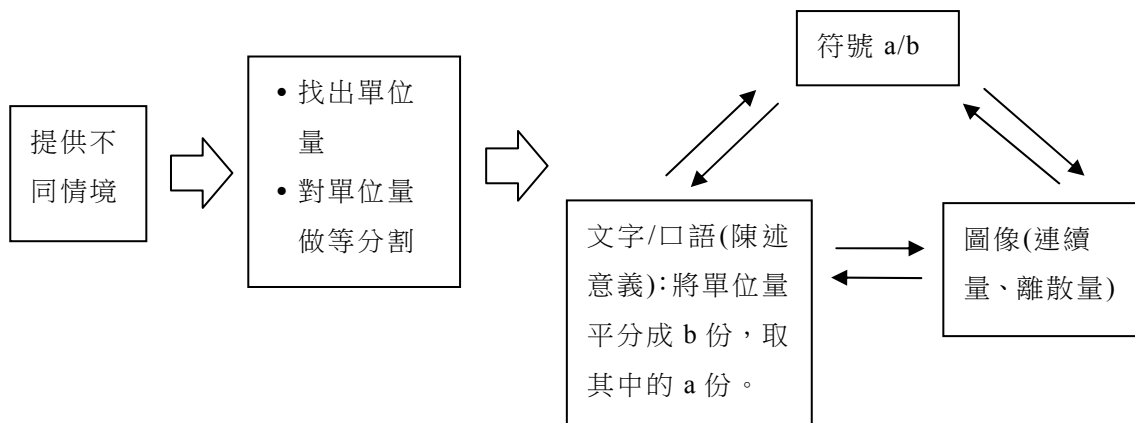


圖 9 建立分數「三位一體」關係圖

- 林福來、黃敏晃、呂玉琴(1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊**，**4(2)**，161-196。
- 洪素敏、楊德清(2002)。創意教學~分數的補救教學。**科學教育研究與發展季刊**，**29**，33-52。
- 洪素敏(2004)。國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究(未出版之碩士論文)。國立嘉義大學數理教育研究所，嘉義縣。
- 教育部(2008)。九年一貫數學學習領域課程綱要。教育部網站。
- 楊壬孝(1989)。國中小學生分數概念的發展。國科會專題研究計畫成果報告(編號：NSC-78-0111-S-003-09A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。
- 楊德清和洪素敏(2003)。比較分數大小~從具體、半具體、至抽象符號表徵之教學行動研究。**南師學報**，**37(2)**，75~103。
- 陳明印(2002)。美國2001年初等及中等教育修正法案之分析。**教育研究資訊**，**10(1)**，205-228。
- 陳明宏、呂玉琴(2005)。國小四年級學童分數概念之診斷教學研究。**國立臺北教育大學學報**，**18(2)**，1~32。
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15(5)*, 323-341.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33(2)*, 111-144.
- Hess, F. M., & Petrilli, M. J. (2006). *No child left behind*. NY: Peter Lang Publishing.
- McDermott, A., & Jensen, S. (2005). Dubious sovereignty: Federal conditions of aid and the no child left behind act. *Peabody Journal of Education*, *80(2)*, 39-56.
- Post, T. R., Cramer, K., Behr, M. J., & Lesh, R., Harel, G. (1992). Curricula implications of research on the teaching and learning of rational numbers concepts. In T. Carpenter, T., E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Research on the teaching, learning, and assessing, of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.