# 小石頭的妙用

## 許介彥

私立大葉大學 電機工程學系

有 10 個人一起參加了一場宴會，宴會的主人為了鼓勵出席者相互交流，宣布任何兩人只要在宴會中互相握手就可以各領到一顆具有紀念價值的小石頭，而且每個人可領到的石頭在數量上沒有上限，跟幾個人握手就可以領到幾顆石頭。

宴會結束後，服務人員統計每位來賓領走的石頭數，發現這 10 個人分別領走了

2, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 8

顆；宴會的主人碰巧是一位數學家，他一看這些數字就知道其中有問題，這些數一定沒有反應出宴會中實際發生的情況。你是否也看出來了呢？

## 壹、不同的觀點

如果我們不從個別的人而是從握手的行為來看，由於每次握手都牽涉到兩個人，因此石頭其實可以看成是以兩個為單位發出去，被領走的石頭總數因此必定是偶數，但是上面的 10 個數中，如果單看每個數是奇數或偶數，我們一眼就能發現其中的奇數有三個 ( 即 3, 3, 7 )，由於奇數個奇數的和一定是奇數，因此這 10 個數的和一定是奇數而非偶數，其中當然有問題。

靠著想像中的石頭，我們其實已經證明了數學上一個有名的定理( 通常稱為「握手引理」，Handshaking lemma )：當任意一些人互相握手，與奇數個人握過手的人數必為偶數。

本文接下來將繼續透過石頭來解決幾個數學問題。

## 貳、字串的轉換次數

某類字串是由英文字母 $A$ 和 $B$ 組成，而且這種字串都是以 $A$ 起頭，以 $B$ 結尾，例如 $AAB$、$ABAABBAB$、$ABBBAABABAB$ 等，以下我們將證明這種字串的一個共通的性質。

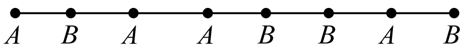
以 $ABAABBAB$ 為例，如果我們從這個字串的最左邊往右看，留意字串中字母轉變（也就是由 $A$ 變 $B$ 或是由 $B$ 變 $A$ ）的次數，會發現總共變換了 5 次：

$$A\ B\ A\ \ A\ B\ \ B\ A\ B$$

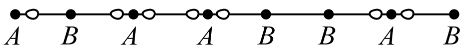
如果你算一下 $AAB$ 和 $ABBBAABABAB$ 的轉換次數，會發現分別是 1 次和 7 次；不論是 5 或是 1 或 7 全都是奇數，我們想証明的性質是：每一個這種字串的轉換次數必為奇數。

回到 $ABAABBAB$ 的例子，這個字串是由八個字母組成，讓我們想像在一條線上取八個點 ( 如下圖的黑點，點與點之間不須等距離 )，這八個點決定出七條小線段，

我們將字串的字母依序標在點上，如下圖所示：




接著進行以下操作：分別檢視每條小線段，如果其兩端中有任一端點為 $A$，就將一顆小石頭放在線段上靠近該端點的地方（如果兩端都是 $A$ 的話就兩端都放石頭），放完石頭後的結果如下：




接著我們用兩種觀點來看剛才所放的石頭總數會是奇數或偶數。首先，從個別線段的觀點來看，所有的線段可以分成三類，一類是兩個端點都是 $A$（我們姑且稱這種線段為 $AA$ 線段），一類是兩端都是 $B$（我們稱之為 $BB$ 線段），還有一類是兩端相異（我們稱之為 $AB$ 線段，$A$ 可以是線段的左端點或右端點）。每條 $AA$ 線段對石頭總數的貢獻是 2，每條 $BB$ 線段對石頭總數的貢獻是 0，每條 $AB$ 線段對石頭總數的貢獻是 1，三種線段中只有 $AB$ 線段的每條線段對石頭總數的貢獻是奇數，因此石頭的總數是偶數或奇數就取決於 $AB$ 線段的個數，$AB$ 線段的個數如果是奇數（或偶數）的話石頭的總數就是奇數（或偶數），也就是石頭的總數與 $AB$ 線段的個數會具有相同的「奇偶性」。

另一方面，從個別端點的角度來看，在每個 $B$ 的旁邊完全不會有石頭，而在 $A$ 的旁邊則有兩種情形，字串最左邊的 $A$ 較特殊，它的旁邊只會被放置一顆石頭，而所有其他每個 $A$ 的旁邊則會被放置兩顆石頭（因為是左右兩條線段共同的端點），因此石頭的總數會等於 1 與一些 2 的和，一定會是一個奇數。

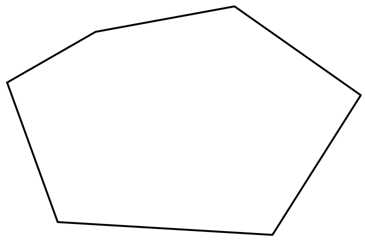
綜合以上兩種看法，我們知道石頭的總數一定會是奇數，而且與 $AB$ 線段的個數有相同的奇偶性，因此 $AB$ 線段的個數一定也是奇數；由於每一條 $AB$ 線段就對應到一次字母的轉換，這就說明了：任何一個以 $A$ 開頭以 $B$ 結尾的字串從左而右所歷經的字母轉換次數一定是奇數。

請注意這個性質其實只跟字串的開頭及結尾這兩個字母有關，只要字串是以 $A$ 起頭以 $B$ 結尾這個性質就成立，不管字串有多長，字串內部有多麼複雜的變化，都和整個字串的轉換次數的奇偶性無關。

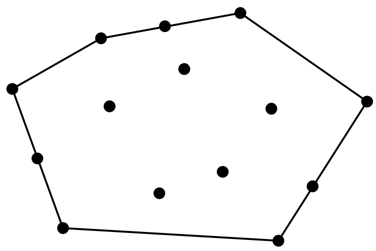
從以上的論述過程讀者還不難看出：其實只要字串的開頭及結尾這兩個字母相異（不一定要以 $A$ 起頭以 $B$ 結尾），從左而右所歷經的轉換次數就一定是奇數，而只要頭尾兩個字母相同，轉換次數必為偶數，由此又可知如果有一串項鍊是由黑珠和白珠串成，當我們從其中任意一顆珠子出發循著一定方向繞一圈回到起點時，所歷經的顏色轉換次數必為偶數。

## 參、多邊形的三角化

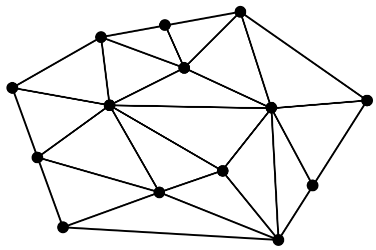
接下來我們要証明一個跟多邊形有關的性質。首先，我們先隨意畫出一個多邊形：



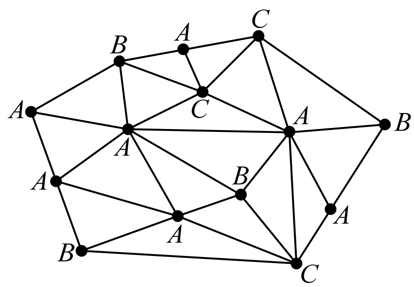
假設我們在多邊形的每個頂點標上一個黑點，在多邊形的邊上以及多邊形的內部也隨意標出一些黑點：



接著我們隨意用線段來連接剛才標出的黑點，使多邊形的內部被分割成許多小三角形，以下是一種可能的結果：



接著我們為每個黑點取名字，在每個黑點的旁邊隨意標上 $A$ 或 $B$ 或 $C$ ：



仿照前面對線段命名的方式，如果一個三角形的三個頂點中有兩個 $A$ 一個 $C$ ，我們稱這種三角形為 $AAC$ 三角形，其餘情形依此類推。多邊形內可能的小三角形總共有以下 10 種：

$$AAA,\ BBB,\ CCC,\ AAB,\ AAC,$$
$$BBA,\ BBC,\ CCA,\ CCB,\ ABC.$$

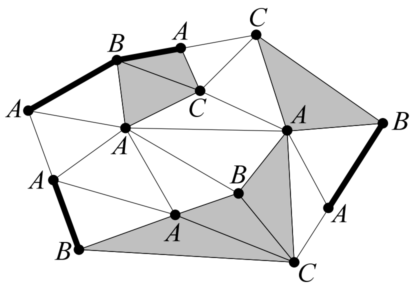
這些三角形的三條邊所含的 $AB$ 線段的個數分別是：

$$0,\quad 0,\quad 0,\quad 2,\quad 0,$$
$$2,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 1.$$

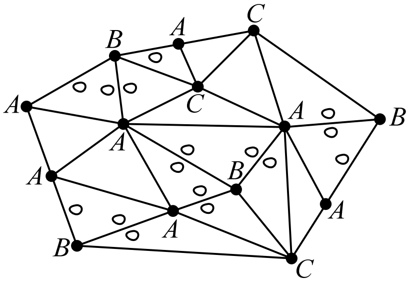
請注意其中只有 $ABC$ 三角形所含的 $AB$ 線段的個數為奇數。

我們以下想要証明的性質是：位於多邊形的邊上的 $AB$ 線段的個數與位於多邊形內的 $ABC$ 三角形的個數有相同的奇偶性。

以我們的例子來說，位於多邊形的邊上的 $AB$ 線段總共有 4 條(見下圖的粗線)，位於多邊形內的 $ABC$ 三角形總共有 6 個（下圖中有陰影的三角形)，4 與 6 果然具有相同的奇偶性，它們都是偶數。



我們進行以下操作：分別檢視每個小三角形，如果有某條邊是 $AB$ 線段，就將一顆小石頭放在該條邊的旁邊（三角形內部側)，放完石頭後的結果如下：




接著我們用兩種觀點來看剛才所放的石頭總數會是奇數或偶數。首先，從個別三角形的觀點來看，每個三角形的內部所放置的石頭數為 $0,1,2$ 之一，而多邊形內所含的石頭總數顯然等於各個三角形所含的石頭數的和。由於 10 種可能的三角形中只有 $ABC$ 三角形所含的 $AB$ 線段的個數為奇數，因此多邊形內所含的石頭總數是偶數或奇數就取決於多邊形內的 $ABC$ 三角形的個數，也就是說，石頭的總數與 $ABC$ 三角形的個數一定具有相同的奇偶性。

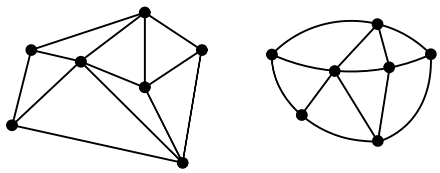
另一方面，從個別線段的觀點來看，在每條 $AC$ 線段及每條 $BC$ 線段的兩旁都不會有石頭，而在 $AB$ 線段的旁邊則有兩種可能的情形，如果一條 $AB$ 線段是位於多邊形的邊上，這條線段的旁邊只會被放置一顆石頭（奇數），而如果一條 $AB$ 線段是位於多邊形的內部，由於是兩個三角形的共同邊，這條線段的旁邊會被放置兩顆石頭（偶數），因此石頭的總數與位於多邊形的邊上的 $AB$ 線段個數一定具有相同的奇偶性。

綜合以上兩種看法，我們知道石頭的總數既與 $ABC$ 三角形的個數有相同的奇偶性，又與多邊形的邊上的 $AB$ 線段個數有相同的奇偶性，可見我們要証明的性質是成立的，也就是 $ABC$ 三角形的個數與多邊形的邊上的 $AB$ 線段個數具有相同的奇偶性。

請注意由這個性質可知：多邊形內的 $ABC$ 三角形個數的奇偶性其實是在多邊形的邊上各點取好了名字之後就確定了，不管多邊形內部被取了多少個點，每個點被取了什麼名字，點與點之間的連線多麼複雜，都已經無關。

另外，由於我們一開始是隨意對圖中的各點命名，因此如果圖中的 $AB$ 線段滿足某個性質的話，基於對稱，圖中的 $BC$ 線段及 $AC$ 線段應該也都滿足類似的性質，所以多邊形內的 $ABC$ 三角形的個數其實也會跟多邊形的邊上的 $BC$ 線段個數及 $AC$ 線段個數具有相同的奇偶性（可推知 $AB$、$BC$、$AC$ 這三類線段的個數一定具有相同的奇偶性）；又由於三個偶數的和必為偶數，三個奇數的和必為奇數，因此多邊形內的 $ABC$ 三角形的個數也一定會與多邊形的邊上的字母轉換總次數具有相同的奇偶性。

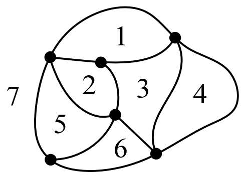
我們到目前為止所討論的性質其實都只牽涉到圖形中的點與點之間的連接關係，至於連接兩個點所用的線到底是直線（線段）或是曲線其實無關緊要；例如下面兩個圖中，左邊的五邊形裡面有七個三角形，就本文所探討的性質而言，即使將左圖畫成右圖，性質依然會成立；像右圖這種只注重點與點之間的連接關係的圖在述語上稱為 graph。



為了方便起見，本文假設接下來所說的「線」可以是直線或曲線，「$n$ 邊形」指的是由 $n$ 條線圍成的區域，而且我們的 graph 中的線都沒有互相重疊的情形。

「圖論」( Graph Theory ) 是數學的一個分支，專門研究跟 graph 有關的性質，其中一個很有名的定理是說：對平面上任意一個 graph 而言，如果它包含了 $V$ 個點，$E$ 條線，而且將平面劃分成 $F$ 塊區域，那麼等式 $V+F=E+2$ 恆成立。這個性質通常稱為「歐拉公式」( Euler’s formula 或 Euler’s theorem )。

以下面的 graph 為例，它總共有 6 個點，11 條線，將平面劃分成了 7 塊區域，而 $6+7=11+2$，的確滿足歐拉公式。

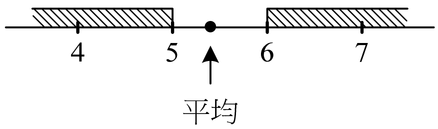



請注意在算區域數時，graph 的「外面」也要算是一個區域 ( 上圖的編號 7 )；事實上，我們也可以想像這個 graph 是被畫在一顆球的球面上，這樣一來球面很顯然被劃分成了 7 塊區域。

在繼續看關於石頭的下一個例子之前，我們再稍微補充一點背景知識。如果我告訴你我在一張紙上寫了一些整數，它們的算術平均值是 5.4，那麼關於這些整數有什麼性質是你可以肯定的嗎？

這些整數中當然一定會有正整數，也一定會有大於等於 2 的整數，也一定會有大於等於 3 的整數，至於有沒有大於等於 8 的整數就不一定了；以上這些性質你都能說出原因嗎？

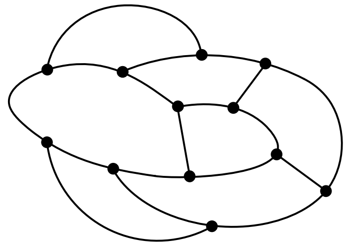
事實上，如果有一些整數的平均值是 5.4，我們可以肯定這些數當中一定會有大於或等於 6 的數，也一定會有小於或等於 5 的數 ( 見下圖，用矛盾証法不難說明 )，這個性質通常稱為「鴿籠原理」( Pigeonhole principle )。




接下來請看本文的最後一個例子。

## 肆、一定存在的多邊形

在一個球面上隨意選擇一些點，然後將點與點用線隨意連接，但注意讓每個點都是不多不少正好三條線共同的端點。下圖是將畫好的圖攤在平面上的一個可能的結果：

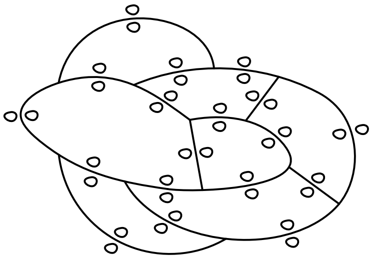


以下我們將說明：在這樣的 graph 中一定找得到邊數小於或等於 5 的多邊形。

我們首先將說明：在這樣的 graph 中，每個多邊形的邊數 ( 也就是每個區域是由

幾條線圍成）的平均值一定小於 6。

我們令 graph 中每個多邊形的邊數的平均值為 $a$，接著進行以下操作：分別檢視每個多邊形，在圍成多邊形的每條邊的旁邊放置一顆石頭（多邊形內部側），放完後的結果如下（請注意 graph 的「外面」也算一個區域）：



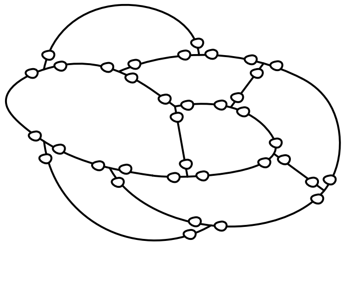
假設這個 graph 總共含有 $V$ 個點，$E$ 條線，而且將平面劃分成了 $F$ 塊區域。我們將用不同的方法來計算剛才所放的石頭總共有多少顆。

首先，從個別區域的觀點來看，既然每個區域平均有 $a$ 條邊而每條邊都被放置了一顆石頭，graph 中的石頭總數為 $Fa$。

另一方面，從線的觀點來看，既然 graph 中有 $E$ 條線而每條線的兩旁各被放置了一顆石頭，石頭總數為 $2E$。

綜合以上兩種看法可知 $Fa = 2E$。

接下來我們將上圖的石頭挪動一下位置，將每條線兩旁的石頭移到線上靠近兩端端點的地方（一端一顆）：



石頭總數當然還是 $2E$，不過如果從點的觀點來看，圖中的每個點都被三顆石頭圍繞著，因此石頭的總數也等於 $3V$，即 $3V = 2E$。

將以上兩個關係代入歐拉公式 $V + F = E + 2$ 得

$$\frac{2}{3}E + \frac{2}{a}E = E + 2$$

移項整理得

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{a} - 1\right)E = 2$$

上式的 $E$ 的係數一定大於 0，因此

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{a} - 1 > 0$$

也就是

$$\frac{2}{a} > \frac{1}{3}$$

因此

$$a < 6$$

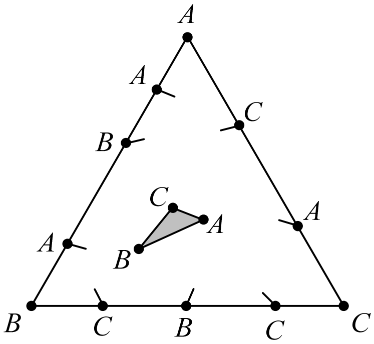
既然每個區域的邊數（都是整數）的平均值小於 6，從前面鴿籠原理的介紹可知 graph 中一定會有邊數小於等於 5 的區域，這正是我們想要証明的性質。

## 伍、結語

細心的讀者應該已經察覺，本文所介紹的幾個問題除了都用到石頭外，還都用到了俗稱「算兩次」的技巧，也就是將同一個量用兩種不同的方法來算，儘管方法不同，所得應該無異。

對任意一個三角形，如果我們將其三個頂點分別命名為 $A$、$B$、$C$，然後在其

三邊及內部隨意選擇一些點，將位於 $\overline{AB}$ 上的每個點取名為 $A$ 或 $B$ ，將 $\overline{BC}$ 上的每個點取名為 $B$ 或 $C$ ，將 $\overline{AC}$ 上的每個點取名為 $A$ 或 $C$ ，將三角形內部的每個點隨意取名為 $A$ 或 $B$ 或 $C$ ，接著透過點與點的連線將三角形內部分割成許多小三角形，那麼我們可以肯定：這些小三角形中一定找得到三個頂點的名字皆相異的三角形（也就是我們前面所說的 $ABC$ 三角形，見下圖），而且這種 $ABC$ 三角形的個數必為奇數。這個性質稱為 Sperner's lemma；讀者很容易可以由本文前面的例子所証明過的性質推出此結論。

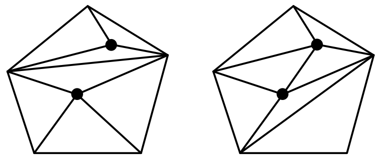



唐朝大詩人白居易的作品因為特別平易近人而以「老嫗能解」著稱，令一般人畏懼的數學証明同樣未必充斥著難以理解的符號和觀念；儘管本文的幾個例子有如小孩子玩遊戲般將一堆石頭搬來搬去，它們可不是兒戲，我們確實証明出了一些不大簡單的性質。

## 陸、練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1. 試証：如果我們在一個多邊形內部隨意選擇一些點，然後透過點與點的連線將多邊形分割成許多三角形，那麼這些三角形的總數只跟一開始所選的點的個數有關而與連接方式無關。例如下面的多邊形內部同樣有兩個點，儘管連接方式不同，多邊形同樣都被分割成七個三角形：



2. 畫出一個 graph 使其含有 10 個點而且與各個點連接的線條數分別是 2, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8。
3. 寫出 10 個數，其總和須為偶數，每個數須為小於 10 的正整數，而且這 10 個數不可能是參加一場宴會的 10 個人每人與別人的握手次數。
4. 假設我們在一個球面上隨意選擇了一些點，然後透過點與點的連線將球面分割成許多三角形區域（見下圖），試証：三角形區域的總數必為偶數。

## 參考文獻

Stein, S. and Szabó, S (1994). Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Service of Geometry. Cambridge University Press.