一個公式 $\alpha,\beta\in C,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(0\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<2\pi)\\-\sqrt{\alpha\beta}(2\pi\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<4\pi)\end{cases}$ 的推演

阮圓真

國立國防醫學院

壹、前言

在高中教材中有一個公式 $\alpha,\beta\in R,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(\text{其他情形})\\-\sqrt{\alpha\beta}(\alpha<0,\beta<0)\end{cases}$，在引用此公式解下題時

已知 $x^2+4x+5=0$ 的兩根為 α,β，試求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 的值？

產生困擾，我嘗試用高中所學過的複數極式與 n 次方根的概念來解決此問題，將原公式

$\alpha,\beta\in R,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(\text{其他情形})\\-\sqrt{\alpha\beta}(\alpha<0,\beta<0)\end{cases}$ 推廣

$\alpha,\beta\in C,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(0\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<2\pi)\\-\sqrt{\alpha\beta}(2\pi\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<4\pi)\end{cases}$，適合高中同學課外學習。

貳、本文

在高中教材中有一個公式 $\alpha,\beta\in R,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(\text{其他情形})\\-\sqrt{\alpha\beta}(\alpha<0,\beta<0)\end{cases}$，在引用此公式解以下範例時，會有一些困擾，請參閱下列說明：

範例：已知 $x^2+4x+5=0$ 的兩根為 α,β，試求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 的值？

解：

(1) 因式分解：因式分解 x^2+4x+5 不易，改選他法

(2) 公式解：$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times5}}{2}$，取 $\alpha=-2+i$，$\beta=-2-i$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{-2+i}+\sqrt{-2-i})^2$，解題至此，會產生困擾。$\sqrt{-2+i}$，$\sqrt{-2-i}$ 的

值為何？再嘗試他法。

(3) 一元二次方程式根與係數的關係：$\because D = 4^2 - 4\times 1\times 5 = -4 < 0 \Rightarrow \alpha,\beta$為共軛虛數

則無法引用公式 $\alpha,\beta \in R, \sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta} = \begin{cases} \sqrt{\alpha\beta}(\text{其他情形}) \\ -\sqrt{\alpha\beta}(\alpha<0,\beta<0) \end{cases}$ 來處理範例，所以需要另尋解決範例的方法。

因此想探討 當$\alpha,\beta \in \mathrm{C}, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$時,$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$ 是否成立。

先考慮

> 如果 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$ ，則有下列二種情形
>
> 1. $\alpha<0, \beta<0 (\alpha,\beta \in R)$
> 2. α,β為共軛虛數$(\alpha,\beta \in C-R)$

1. 已知 α,β 為實數，當 $\alpha+\beta<0$ ， $\alpha\beta>0$ 時，則顯然 $\alpha<0, \beta<0$ 。
2. 已知 α,β 為虛數，當 $\alpha+\beta<0$ ， $\alpha\beta>0$ 時，則 α,β 必為共軛虛數。

說明：令 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ ， $a,b,c,d \in R$

$$(a+c)+(b+d)i<0 \Rightarrow d=-b$$

$$(a+bi)(c+di)>0 \Rightarrow (a+bi)(c-bi)>0 \Rightarrow \text{虛部} -ab+cb=0 \Rightarrow a=c$$

我利用高中教材中之複數極式與 n 次方根的概念來解決此問題：

> 當 α,β 為共軛虛數時， $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

首先定義 $\sqrt{z}$ 如下：

> 若 $z \in \mathrm{C}$（複數）， $\sqrt{z} = \sqrt{|z|(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)} = \sqrt{|z|}\cdot\sqrt{(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\theta}{2} + i\cdot\sin\frac{\theta}{2})$
>
> $\theta = Arg(z)$

（檢驗 $\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\cdot\sin\pi} = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = i$ ，

$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 成立，實數亦合）

> 當 α,β為共軛虛數時， $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

證明：在不失一般性，我取 $\alpha=\cos\theta+i\cdot sin\theta,\beta=\cos\theta-i\cdot\sin\theta$

$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(\cos\theta+i\cdot sin\theta)(\cos\theta-i\cdot\sin\theta)}=1$$

$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\cos\theta+i\cdot\sin\theta}=\cos\frac{\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\text{；}$$

$$\sqrt{\beta}=\sqrt{\cos\theta-i\cdot\sin\theta}=\sqrt{\cos(2\pi-\theta)+i\cdot\sin(2\pi-\theta)}=\cos\frac{2\pi-\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{2\pi-\theta}{2}$$

$$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=(\cos\frac{\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{2\pi-\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{2\pi-\theta}{2})=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1$$

$$\Rightarrow\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ 當 α,β為共軛虛數時，$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

至此，我將 $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}\ （\alpha,\beta\in R\text{之其他情形}）\\-\sqrt{\alpha\beta}（\alpha,\beta\in R,\alpha<0,\beta<0）\end{cases}$ 推廣為

$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}（\alpha,\beta\in\mathrm{R}\text{之其他情形}）\\-\sqrt{\alpha\beta}（\alpha,\beta\text{為共軛虛數}）\end{cases}$ 此時就可以順利的獲得範例的解：

> 例：已知 $x^2+4x+5=0$ 的兩根為 α,β，試求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 的值？

解：利用一元二次方程式根與係數的關係

$\alpha+\beta=-4,\alpha\beta=5$，

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-4-2\sqrt{5}$。

$(\because\ \sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}（\alpha,\beta\in\mathrm{R}\text{之其他情形}）\\-\sqrt{\alpha\beta}（\alpha,\beta\text{為共軛虛數}）\end{cases})$

接著討論 $\alpha,\beta\in C$ 的一般情形。

$$\alpha,\beta\in C,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}（0\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<2\pi）\\-\sqrt{\alpha\beta}（2\pi\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<4\pi）\end{cases}$$

證明：已知 $\alpha,\beta\in C$，在不失一般性，我取

$$\alpha=\cos\theta_1+i\cdot sin\theta_1,\beta=\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2,Arg(\alpha)=\theta_1,Arg(\beta)=\theta_2$$

$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1}=\cos\frac{\theta_1}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta_1}{2}$$ ；

$$\sqrt{\beta}=\sqrt{\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2}=\cos\frac{\theta_2}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=(\cos\frac{\theta_1}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta_1}{2})(\cos\frac{\theta_2}{2}+i\cdot\sin\frac{\theta_2}{2})=\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})+i\cdot\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})$$

$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(\cos\theta_1+i\cdot sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)}=\sqrt{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

會有下列兩種情形：

1. 若 $0\le\theta_1+\theta_2<2\pi$ ，

   則 $\sqrt{\alpha\beta}=\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})+i\cdot\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})=\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}$ 。

2. 若 $2\pi\le\theta_1+\theta_2<4\pi$ ，則

$$\begin{aligned}&\sqrt{\alpha\beta}\\&=\sqrt{\cos(\theta_1+\theta_2-2\pi)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2-2\pi)}\\&=\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\pi)+i\cdot\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\pi)\\&=-[\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})+i\cdot\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})]\\&=-\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}\end{aligned}$$

討論至此，得到公式 $\alpha,\beta\in C,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(0\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<2\pi)\\-\sqrt{\alpha\beta}(2\pi\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<4\pi)\end{cases}$

利用複數的極式概念，就可完成。至於如下題型：

一元二次方程式 $x^2+ax+b=0,a,b\in C-R$ 的兩根為 α,β ，試求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 的值

只要先確定兩根為 α,β 的主幅角，就可以利用公式

$\alpha,\beta\in C,\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\begin{cases}\sqrt{\alpha\beta}(0\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<2\pi)\\-\sqrt{\alpha\beta}(2\pi\le Arg(\alpha)+Arg(\beta)<4\pi)\end{cases}$ 來處理，

最後感謝數學老師謝瓊瑤老師的指導。