

---

# 汽車與山羊遊戲之隨機性模擬習作與心得

彭舒筠<sup>1</sup> 陳仁義<sup>2,3\*</sup>

<sup>1</sup> 國立中正大學 財法系

<sup>2</sup> 私立南華大學 資訊管理系

<sup>3</sup> 國立中正大學 數學系

## 壹、緒論

「汽車與山羊」遊戲是個簡單的抉擇問題，具有相當高的趣味性，這與眾多的博弈遊戲一樣，有打賭的心理層面、有弔詭的因素蘊藏其中；理論上可從機率面向來加以探討。遊戲當中，參賽者要從三道門中(其中之一是置放著超級獎品**汽車**、另二門則為**山羊**)選擇一扇；確定之後主持人開啟了一扇置放山羊且不是參賽者所選擇的那扇門，因此留下兩扇未開啟的門(其中之一是參賽者當初選擇的那扇門)；然後主持人讓參賽者有機會更換原先的決定：換抑或是不換成另外一個未被開啟的門？這個遊戲就是有名的「蒙提霍爾(Monty Hall)」問題。我們避開了理論推導，而是讓同學在具體操作中體驗機率意趣、決策訊息，書面報告題材的內涵設計是第二位作者在課程規劃中形成，除了研究換與不換的中獎機率之外，也設計兩種模擬情況：一為獎品固定放置在門 II，另一種情況則是獎品位置任由亂數值決定，藉以探討是否會因獎品放置方式的不同，而影響得獎機率，且做了一些討論。在具體操作過程中，我們

透過一張亂數表和遵循共同遊戲規則來模擬「汽車與山羊」遊戲，大家在此隨機遊戲過程中，以科學方法來作觀察、記錄、比較、分析和整理之後，且透過分享討論活動，讓每位參與同學在亂數表中初始位置雖然不同，但依循順序都是由上至下、從左而右，模擬結果中可發現有一定的規律存在，亦可感受「同中有異」的隨機現象，進而可回到「異中求同」的情境。此外，科學方法是可以**重做再現**，只要遵循著相同的遊戲規則，模擬的結果分析會趨於一致，因此可體會的情境和思維感受也是相近的。修課同學大多數來自非理工背景，較為喜歡以非數學語言來呈現或表達機率的意涵，第一位作者就是修讀此通識課程的班上同學之一，其書面報告和討論心得已相當完整地呈現出具體操作中所體驗的機率樂趣和決策關鍵點，我們就以此作為基礎改寫整理成本篇文章，且增添了同時修課同學們的一些心得整理作為分享！我們抱持野人獻曝的精神來呈現學習情境，也盼望教學目標的可能實現：使得同學在具體操作的學習過程中，逐步建立「隨機」、「偶然」和「必然」的科學思維與正確分際。

---

\*通訊作者：zychen@mail.nhu.edu.tw

## 貳、模擬遊戲描述

### 一、模擬遊戲之目的與背景

這個遊戲的目的在於讓同學們使用亂數表、體會隨機性，藉由具體操作一個隨機性模擬遊戲(汽車與山羊)，來體驗遊戲中的機率概念與隨機真諦。遊戲模擬的設計有獎品位置、參賽者選取位置和主持人開門位置的機率問題和相關限制條件，藉以體會機率應用在生活上的情形，是充滿不確定性和隨機狀態，也是現代社會中決策時所共同面臨的關鍵問題。在具體操作過程中，我們透過一張亂數表和遵循共同遊戲規則來模擬「汽車與山羊」遊戲，大家在此種隨機遊戲過程中，以科學方法來作觀察、記錄、比較、分析和整理之後，並且透過分享討論活動，讓每位參與同學在亂數表中初始值雖然不同，但依循的順序都是由上至下、從左而右，模擬結果中可發現有規律性存在，亦可感受到「同中有異」的隨機現象，進而可回到「異中求同」的情境。

機率問題在生活或娛樂遊戲中隨處可見，曾經有一個「超級大富翁」的節目，乃是由知名人物謝震武所主持，其中有一趣味性高的關卡就是撥打高額付費電話的觀眾，可以參加「機會、命運」拿獎金活動，電話觀眾只要猜出獎金在「機會」還是「命運」的板子之後，即可獲得累計獎金。這種節目在當時引起一股旋風，就算不是參賽者，而是在電視機前的觀眾也會不由自主的跟著猜看看，推測獎金會是在

哪一個板子(機會或命運)，趣味性高的背後因素是人人可簡易判斷的機率抉擇問題。此種類型節目的著名代表就是「汽車與山羊」：出自於蒙提·霍爾(Monty Hall)所主持的遊戲節目-- Let's Make a Deal。這個遊戲具有相當高的趣味性，如圖 1 所示遊戲中參賽者要從三道門(其中之一是有超級獎品汽車)選擇一扇門；參賽者選完之後主持人會開啟一扇沒有置放超級獎品且不是參賽者所選擇的那扇門，因此留下兩扇未開啟的門(其中之一是參賽者當初所選擇的那一扇門)；然後參賽者有可能更改原先決定：換抑或是不換成另一扇未被開啟的門(參賽者知道自己選擇的門)？這個遊戲就是有名的蒙提霍爾(Monty Hall)問題。在節目的進行中，主持人會有意無意的給予參賽者壓力或暗示，尤其是當 Monty Hall 打開那一扇門之後，參賽者可再做一次簡單而關鍵決策時，換與不換的抉擇讓參加者陷入天人交戰，遊戲的趣味性也就在此！其中有打賭的心理層面、有弔詭的因素蘊藏其中，亦可從機率理論面向來加以探討。我們避開了理論性推導，而是要讓同學們在具體操作中體驗機率意趣、隨機真諦、決策關鍵，此報告的內涵設計是第二位作者在課程規劃中形成，除了研究換與不換的中獎機率之外，也設計兩種模擬的情況：其一為獎品固定放置在門 II，另一種是獎品位置任由亂數表決定。藉以探討是否會因獎品的放置方式不同，而影響了中獎機率，並且做一些討論。

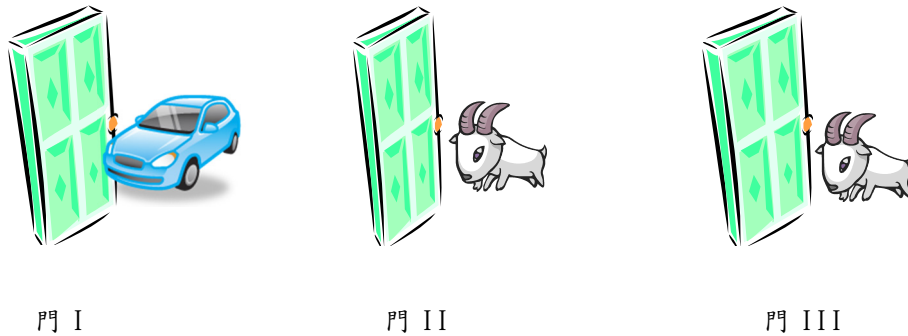


圖 1、汽車與山羊的獎品隨機置放之一 (圖片資料取自網路)

## 二、遊戲模擬規則之描述

### (一) 獎品位置固定在門 II

若是獎品固定在門 II，附錄 C 中的表格之第 2 行的亂數值全都空白、第 3 行全都填入 II；參賽者選取位置需由亂數值(第 4 行) 來決定(第 5 行的三擇一)；而主持人則被迫選擇唯一可打開的門(沒有亂數值出現的第 6 行)、或是開門位置由亂數值 (第 6 行) 來決定(第 7 行之二擇一)。

### (二) 獎品位置由亂數值決定

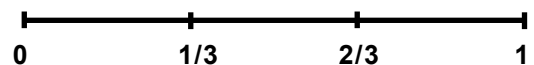
若獎品是由亂數來決定，則附錄 D 中獎品位置、參賽者選取位置均由亂數值(第 2 行、第 4 行)來決定(第 3 行、第 5 行的三擇一)；而後主持人則被迫選擇唯一可打開的門(沒有亂數值出現的第 6 行)、或是開門位置由亂數值 (第 6 行) 來決定(第 7 行的二擇一)。

其中每個人的亂數值選取是由個人初始位置開始，在亂數表中由上往下、由左至右的依序選取，逐一地填入表中(附錄 C)，依實驗次別的由

左至右的順序填入亂數值。此外，進一步說明三擇一或二擇一的規範為：

#### ✧ 三擇一的獎品位置與參賽者選取位置的亂數值之模擬規則：

若亂數值介於  $0 \sim 1/3$  之間，表示位置在門 I；亂數值介於  $1/3 \sim 2/3$  之間，表示位置在門 II；亂數值介於  $2/3 \sim 1$  之間，則表示位置在門 III。如下圖所示，每個區間中皆包含右邊的點。



#### ✧ 二擇一的主持人開門位置的亂數值之模擬規則：

將會有兩種狀況產生

- (a) 獎品位置與參賽者選取位置相同時，則亂數值介於  $0 \sim 1/2$  之間，就選擇兩個未被打開門之中的號碼較小者；若亂數值介於  $1/2 \sim 1$  之間，就選擇兩個未被打開門之中的號碼較大者。而每個區間皆包含

右邊的點。

- (b) 獎品位置與參賽者選取之位置不相同時，則主持人只能被迫地打開尚未被參賽者選取且不是獎品放置的剩下唯一門。

## 參、資料整理與分析討論

### 一、模擬結果

1. 以三分之一 v.s. 三分之二為期望機率 (模擬開門遊戲 120 次)，且獎品固定在門 II (括號中數值表示獎品由亂數決定的結果)：

中獎情況	觀察次數 $O_k$	期望次數 $E_k$	$O_k - E_k$
不換門而中獎	36 (38)	40 (40)	-4 (-2)
換門而中獎	84 (82)	80 (80)	4 (2)
總和	120	120	0

2. 以二分之一 v.s. 二分之一為期望機率 (模擬開門遊戲 120 次)，且獎品固定在門 II (括號中數值表示獎品由亂數決定的結果)：

中獎情況	觀察次數 $O_k$	期望次數 $E_k$	$O_k - E_k$
不換門而中獎	36 (38)	60 (60)	-24 (-22)
換門而中獎	84 (82)	60 (60)	24 (22)
總和	120	120	0

### 二、卡方適合度檢定分析

1. 假設以三分之一(不換門) v.s. 三分之二(換門)做卡方適合度檢定

- (a) 獎品固定在門 II 之卡方檢定：

$$x^2 = \frac{(36 - 40)^2}{40} + \frac{(84 - 80)^2}{80} = 0.6$$

兩個類別對應之自由度  $df = 2 - 1 = 1$ 。由於  $= 0.6 < 2.706$ ，接受假設描述。

- (b) 獎品由亂數決定之卡方檢定：

$$x^2 = \frac{(38 - 40)^2}{40} + \frac{(82 - 80)^2}{80} = 0.15$$

兩個類別對應之自由度  $df = 2 - 1 = 1$ 。由於  $= 0.15 < 2.706$ ，接受假設描述。

2. 假設以二分之一(不換門) v.s. 二分之一(換門)做卡方適合度檢定

- (a) 獎品固定在門 II 之卡方檢定：

$$x^2 = \frac{(36 - 60)^2}{60} + \frac{(84 - 60)^2}{60} = 19.2$$

兩個類別對應之自由度  $df = 2 - 1 = 1$ 。由於  $= 19.2 > 2.706$ ，不接受假設描述。

- (b) 獎品由亂數決定之卡方檢定：

$$x^2 = \frac{(38 - 60)^2}{60} + \frac{(82 - 60)^2}{60} = 16.13$$

兩個類別對應之自由度  $df = 2 - 1 = 1$ 。由於  $= 16.133 > 2.706$ ，不接受假設描述。

### 三、討論

此次的「汽車與山羊」模擬遊戲，使得我對隨機性有了另一番見識。一開始，在還未做報告之前，我的選擇是鐵定不換，因為當時我並沒有把機率的理論應用在上面，或者更明白的說，我不懂得其中的奧妙所在。做完了報告所得到的相關數據，我還是無法從中確切的得知，此實驗的真正意涵。因此，我需要更加了解這個模擬遊戲的意義，以及機率對此遊戲會產生何種的作用，這樣，我才能對報告做出討論與分析，所以上網搜尋了一些資料和回頭仔細看看數據所呈現出來的可能規律，相較於三擇一的獎品位置、參賽者之隨機選擇，主持人則是相依的只能二擇一(參賽者選中大獎，還有兩門)、抑或是被迫打開剩下門的唯一(參賽者未選中大獎，有兩個門不能打開)！

對照於模擬結果所得到的數值，在獎品位置固定在門 II 和獎品位置由亂數決定的中獎機率，前者的不換而中獎次數為 36 次、換而中獎 84 次；後者的不換而中獎次數為 38 次，換而中獎 82 次，比例都十分接近三分之一和三分之二。進一步以三分之一 v.s. 三分之二做卡方適合度檢定時，卡方值都十分的小，接近老師說的，近乎完美的 0。因此，選擇更換是比較有利的選擇，也就是是把原本只有三分之一的得獎機率提高到三分之二，機會增加了一倍。

由種種跡象可以推論出，換門而得獎的可能性比較大，但是，是要相信自己一

開始的直覺，還是相信機率的理論，恐怕又是另一番討論吧！可是，有一點是我不能明瞭的：為什麼要區分獎品是否有固定放置。因為就我所做的結果來看，應是差不多的，是想要強調說，不管獎品如何放置，都不影響到得獎的機率嗎？不過，再仔細研究卡方檢定的數值，可以從中看出，獎品由亂數決定之卡方值都小於獎品固定在門 II 之卡方值，這些差距，是否是要顯示，隨機的放置，可以更精準的表現出機率隨機的性質？

以上是**第一位作者**完成報告時討論的內容。依此可加以延伸討論的是獎品放置的固定與隨機之兩種結果一致性、卡方值與適合度檢定等議題。固定獎品放置是相當於隨機放置情況中的三種情形之一，亦即還有固定獎品放置在門 I 和門 III，可用條件機率來推導(陳仁義，2010)，既然獎品是隨機放置在門 I、門 II 和門 III 的機率均等，也是可均等或一致性的反應出整體的隨機放置情況，固定獎品放置在任何一個門所得結果會相當一致，因而均具有代表性！

### 肆、新奇感受和心得分享

一開始做這個報告時，有一種奇妙的感覺，覺得這份報告會比期初報告來的有趣，但也相對複雜許多(註一)(各次模擬得依情況而定，需要一、二、或三個亂數值不等；投擲骰子的遊戲模擬則是相對簡單，各次實驗都只需一個亂數值依亂數表規定順序填入即可：附錄 B 列出詳細的前

30 次結果，也延伸到前 60 次的統計數據。進一步分析和討論可參考林嘉祥和陳仁義，(2010)。果不其然，這份報告使我忙到人仰馬翻的情狀，與期初報告相比是有過之而無不及。

畢竟與單純的投擲骰子不同，這是一個情境遊戲，多了幾分想像空間與趣味性。在做的時候，一邊小心翼翼的填入亂數值，一邊思考到底會有何種結果出來。小心翼翼是為了怕有一個數字的填錯，造成了接下來的全軍覆沒，因為這可不比投擲骰子的情形，已經知道了要選取九十六個亂數值來做九十六次實驗，此次只是知道要做一百二十次模擬實驗，而不知道會用到幾個亂數值。無法事前得知是因為還須多方計算獎品位置、參賽者選取位置以及主持人開門位置，不像上次的一個腸子通到底，而是千迴百折，踩了這一步方能得知下一步的位置。縱然比上一次的六個區間少，但光是三個區間，倒也教人吃不消了。

而那個結果，是令我有點訝異又不是太訝異。訝異之處乃是在於，原本以為換與不換之間，得獎的機率雖有差距但應該不遠，但竟然是整整差了一倍之多，不禁讓我趕忙推翻了我之前鐵定不換的態度，而改成一定要換。不訝異的點是，要是這個遊戲這麼好讓人理解，那何必要有這等題目，就是要有特別之處才有其吸引人的地方。

這次模擬遊戲報告，對我來說是頗有難度，但因為先前已做過了期初報告，有過一番「征討」的經驗，所以比較容易擬

定作戰計畫。起頭當然就是要先把數據做出來，再來做分析卡方值以及討論，過程是比先前來的快速，但之後的討論就不是了。有一說：萬事起頭難，但頭過身就過，雖說如此，我認為這句話應該不適合用在這份報告上。前面的順利，大概只是為了映襯之後的重重難關吧！尤其當我看到範本中有一些 Excel 程式和計算其他分析的卡方值時，我是錯愕的，因為完全看不懂，所以我決定秉持著孔老夫子所言：「知之為知之，不知為不知，是知也。」的精神，因為完全不懂，所以就沒有著手於那處，但心頭還是有個疙瘩在。接下來，總算解決了大部分的難關，諸如亂數表的填入、分析與討論等，但之後才是令人驚嚇的開始－我的文件資料全部不見了！整個 Word 文件的直接消失，使我幾乎慌了手腳，因為根本不知道為何資料會消失，所以也無從找起。我試了多種辦法，等我好不容易救回了文件，時間已過了幾個小時，後來，我不禁問我自己，為何不乾脆重打就好了，反而耗了許多時間去救資料。我想後得到了一個結論，而這答案似乎可以連結這次模擬遊戲的人性問題。因為我所重視的，是我打報告時的第一份感覺，也是最為滿意的，如果另做一份，雖可雷同，但當初的感覺已不復存在。況且，我當時並不知道會耗費如此多的時間，在潛意識中，我是覺得找回報告的時間會比重打一份來的少，所以做了如此的決定。

遊戲的參賽者應該就如同我的心情一般，選門時的直覺，是無法輕易的被機率

數字所改變，總感覺之後再做的決定，與當初的直覺相比，似乎多了分「非註定」，而無法得到獎品，況且，在潛意識中，可能就會覺得，自己可以因為第一直覺而有極大機會選中正確的門，而不願意更改當初的決定，雖然理性可能會提醒自己，換了的得獎機率會比較大，但就是無法斷然放棄自己的最初的直覺。理性與感性就如此的拉鋸著，換與不換，重寫或是不寫，心中真是萬般的掙扎啊！

以上是第一位作者完成報告之後的心得點滴。另一方面，我們也整理了同時修讀此門通識課程之同學們的一些感受來作為分享：

“這次的報告製作過程比起第一次的期初報告順利許多，而且也藉由跟同學的討論解決了一些報告處理過程上的問題，例如：打出數學公式在時間上就比起期初報告而言節省了更多。唯一不同點就是這次報告讓我花了更多時間去思考主要的討論重點是什麼：為什麼要分3種不同的期望機率、要怎麼看卡方值適合度檢定等問題。完成報告之後我似乎被自己所做出的資料分析給說服了，因為我體會到：如果是我去參加此種三選一的抽大獎活動，第一直覺雖然準，但是選擇沒被自己所選上的那一個，中獎機率似乎來的高些！不過雖說如此，如果換了反而沒中獎，我一定會很「鬱卒」，但「選擇」本身就充滿了各種不安定感。在我們的人生就

是一種不斷在做選擇的旅程，大到如人生未來的方向、小到如今天晚餐要吃什麼，在人生的道路上我們都會遇上大大小小的選擇。正如遊戲的目的所闡述：「機率的概念是逐漸影響人們的日常生活，藉以作出一些理性的決定，幫助我們在人生中有較大的成功機率」。然而，雖然我們都一直在經歷選擇，但不是所有的選擇都像考題一樣有一定的標準答案，畢竟在人生中每個選擇將會開啟的事物都不相同。”

“老師在課堂講解後，我似乎聽懂了它的規則，除了深深覺得換抑或不換的機率是  $1/2$  之外，但是想著操作的過程也太複雜了吧！因此，我提醒自己寫作業的時候一定要非常小心，特別是小心不要眼花看錯亂數表上的數字，還要記得有兩種判斷標準！所以在輸入的時候還對照了兩次，確定自己沒有粗心大意，都填入對的格子中。在做的過程中，我是先用手寫之後輸進電腦，最後再對照，完成之後所得到的次數，讓我覺得很驚訝，怎麼會如此的完美，跟不換門中獎的機率為  $1/3$ 、換門中獎的機率為  $2/3$  的次數一模一樣。寫好此份報告感覺很多東西寫的比較順手，而且越來越喜歡機率與人生的作業，好多東西可以思考、**可以驗證**、可以討論，真的很有趣。”

動手操作的實際體驗，讓同學們可以

思考、可以驗證、可以討論！而且可被自己所做出的資料分析給說服了！

另一方面，同學們體會到付諸行動的**成就感**，可感受到「與其臨淵羨魚，不如退而結網」，進而，耐性似乎也培養出來了：

“這 120 次的具體操作雖然多了點，但也算得心應手，不過話雖如此，在具體操作的時候還是常會遇到腦袋打結的情況，為什麼呢？因為獎品位置和參賽者的選取位置須使用  $1/3$  為判斷基準，而主持人的開門位置則會受到前兩者的相同與否影響，若是獎品位置和參賽者選取位置不同，則主持人的開門位置只要選擇剩下的那一個門即可，但若它們選取的位置相同，則主持人的開門位置須依據亂數表的數值並以  $1/2$  為判斷基準。另外，還要判斷不換門與否的中獎問題，這著實令我傷透腦筋，雖然這其中並未有繁複的計算過程與難解的解題步驟，但是需要步步為營，小心謹慎，稍不留神，可能就「差之毫釐，失之千里」，後悔莫及了！...，最後，我終於打敗了這難纏的敵人，順利的完成具體操作的部分，看著螢幕上的成品，心裡有說不出來的感動，畢竟這可是 120 次啊！這也讓我深深體會到了一個道理，誠如希臘哲人柏拉圖所言：「懷著信念作戰，等於擁有雙倍的裝備」，正因我懷抱著無論如何都要完成這份報告的信念，因此這份信念成了支

持我繼續下去的動力，最後，我做到了！但更重要的是，我將這份信念實際的付諸實行，若僅僅只是存有想法但卻不付諸行動，也只是紙上談兵，淪為空談罷了，因此「與其臨淵羨魚，不如退而結網」，才可謂是上上之策。”

“在利用亂數表作第一種模擬開門遊戲 120 次且獎品固定在門 II 的時候，我有一點心力交瘁的感覺，那是一種看到數字就想排斥的感覺，更加深了我對數學的恐懼。因為數字的數量太龐大，我又要很細心的注意不要對錯格、數字不要輸入錯了，種種的壓力以及無力感排山倒海而來，我萌生放棄的念頭。但內心深處告訴我不能就這麼輕易放棄了，必須要堅持下去才能知道我完成了這一份功課到底有沒有價值。所以硬著頭皮、一步一腳印，慢慢的像在玩跳房子一樣，在表格裡跳來跳去，輸入亂數、判斷屬於哪一扇門、將 1 或 0 填入是否換門而中獎等慣性動作。終於完成了第一種獎品固定在門 II 的遊戲，赫然發現我的不換門而中獎的觀察次數是 39、換門而中獎的觀察次數為 81。心裡不禁大叫一聲：怎麼可能、怎麼會如此接近期望次數 40 和 80，兩者相差竟然只有 1。因此我重複地檢查多次確定自己沒有算錯之後，好像發現了什麼寶藏似的，變得鬥志十足地來迎接第二種模擬開門遊戲 120 次(獎



品是由亂數表決定)。在此遊戲中所需要輸入的亂數遠比我想像的還要多，面對著密密麻麻的數字，我覺得快不能呼吸、開始猶豫起來，我真能從這份作業學到什麼嗎？然而在完成的那一剎那，我不禁歡呼了起來，佩服那被高中數學蠶食鯨吞之後所僅存的勇氣還在！因此我會把運用在此模擬遊戲操作中所激發出的勇氣與奮鬥經驗，轉化成以後面對困境的動力！”

除此之外，對於現代科技的發達及便利性也有了一番新的體會：科技造就人們的便利，卻也造成人類對科技的依賴；過度的便利造成無止盡的依賴，而依賴則是被取代的開端；現代人往往只要求「答案」而不重視**過程**，就是因為科技的發達所致...等等：

“這次模擬遊戲是經由程式來跑，不用耗費太多的時間及精神就可以完成。縱使完成遊戲後的成就感隨著所花的時間減少而降低，但我仍不得不臣服於現代科技的發達及便利性，不僅使我事半功倍，也讓我有更多時間去做其他的事，因為在忙碌的工商業社會中，時間就是金錢啊！唯一令人困擾的事，就是需要寫程式，要學會運用電腦的語言，所以一絲一毫都需要小心考慮、仔細檢查每一步驟，才能使程式完美無誤的呈現，才不會導致結果的錯誤。所以科技雖然來自於人性，但此種人性，得經過學習。

隨著科技不斷的進步，若不想被長江後浪的年輕一代所替代，活到老學到老的精神是每個人都必要的武器。”

“在還沒有接觸期中報告內容之前，對於開門遊戲我僅認為是個簡單的選門、換門遊戲，一切交給命運來做決定，沒有什麼機率大小之分，只有運氣好壞之別。聽完老師課堂中解釋期中報告進行的方式後才發現，原來除了要決定獎品及參賽者的位置之外，還要視不同情況下會有不同的主持人開門規則，並非先前想像的那樣單純。這次的報告我想要藉由 excel 的幫忙來簡化繁複的過程，在實際嘗試 excel 程式時才發現，複雜的主持人開門規則並非三兩下的函數公式就能寫出來，這次的報告在函數上的應用可說是大大加深了難度。我告訴自己放棄嘗使用 excel，就算沒有電腦程式的幫忙，我也能逐步完成報告，雖然過程顯得艱辛、複雜了點，但是最後的收穫不會少於期初報告所帶來的感動。與其永無止盡地思考函數如何設定，到後來不見得會有什麼結果，不如還是腳踏實地回到最原始的方法，一步一步鍵入亂數值再來進行判斷，或許還來得更有效率。最後在下定決心之後，憑藉著我要完成它縱使沒有外力幫忙的精神，儘管過程中難免出了錯誤，需要每隔固定的實驗次別作回頭檢查一遍，還是讓我完成了它。我想科技造就人們的便利，卻

也造成人類對科技的依賴，就如同 excel 養成了我對它的依賴，一旦發現過往熟悉的解決方式、器具無法使用，心中便開始感到不知所措。科技帶給我們便利，適當的便利能提升生活品質；過度的便利造成無止盡的依賴，而依賴則是被取代的開端。”

“這一次的遊戲比上一次的模擬還複雜一些，感覺上只要一個數值看錯，後面將會全盤皆錯，因為這個遊戲的亂數是環環相扣的，而上次的骰子模擬，就算錯了也不太會影響後面的判斷，所以這一次的報告做起來，更是戰戰兢兢。但正如大家感受到的事實一樣，當完成了這些表格後，是很有成就感的。而且這才是「真正地參與」了這個遊戲，雖然若真的能用 excel 來操作，必定會比較快速而有效率，但常會忽略過程而只求得到答案。現代人往往只要求「答案」而不重視過程，就是因為科技的發達所致。這看來似乎沒有什麼不好，正好可以符合這個分秒必爭的世界，好像只要慢人幾步，就會被社會潮流遠遠地拋在腦後，孩子不只不能輸在起跑點上，更不能輸在過程。”

## 伍、討論與結論

從實際操作中可瞭解理論上的結果，換了門而得獎的機率是三分之二，明顯比不換門而得獎的機率高出一倍，但誰都不能保證自己就是那三分之二的幸運兒。而

且這類的機率問題，都需要有極大的數值來計算佐證，若是次數不夠多，得出的數字是不可能精確。就我自己的感覺，每一個參賽者皆為一獨立的事件，如此一來，又怎能要求必然的會出現這種換門而得獎的機率會比較大的情況？為了這個問題，在網路上搜尋了一些資料，其中有維基百科，在蒙提霍爾問題(Monty Hall problem)這個單元內，有一句話或可明確地表達出我的疑惑：「雖然該問題在邏輯上並不自相矛盾，但十分違反直覺」。這個「違反直覺」的意思，個人覺得應該是指「可能性」對人生而言是虛無的，恐怕不能只懷抱著機率(probability,可能性)而做出決定。事件的機率雖可以由數學公式推導而出，但機率畢竟就是機率，是充滿隨機性與不確定性，並非是一定如此或一定不如此。當然我們不能忽略經過多方計算而得出的機率理論，但如果只依賴數學公式，充其量只能說是紙上談兵，若是事情的發展能事先料得，又怎麼稱得上是難以捉摸的「人生」呢？

以上是第一位作者完成報告之後的討論點滴。同時修課同學在未操作實驗模擬之前的問卷中反應出來，八成以上同學決定不改變原先的決定，主要理由：『剩下兩個門，換與不換的機率都是二分之一，決定了就不輕易改變初衷，否則沒中獎會更為懊惱』、『這個題目在乍看之下好像是換門和不換門的機率一樣，因為一般直覺會認為：從一開始三扇門分別是  $1/3$  中獎機率，開了一扇門後變成二選一的  $1/2$  中獎機率，感覺中與不中的機率均等，而一般人認為

機率如果均等則會傾向相信直覺，也就是選擇不換門!』、『起初見到此題目時的直覺反應便是認為 Monty Hall 是個隨機性的遊戲，無論第一次選擇哪個門，當主持人開啟一扇之後觀眾便只剩兩樣選擇，因此無論選擇何門機率皆是二分之一；但此想法很快的在進行模擬之後被打破，...』。

此外，同學們對於理論值(1/3, 2/3)的貝氏定理(陳仁義，2010)，在沒有相關的推導知識之背景基礎下依舊是一知半覺，然而經過個人實際模擬的具體操作之後，九成以上的同學 (1/3, 2/3)卡方配適結果明顯地優於(1/2, 1/2)的結果，同學的心得反應出：『這份報告主要是讓我們由亂數表模擬參加此遊戲時的情況，而產生一個結論，就是轉換選擇可以增加參賽者中獎的機會！這可由做出來的數據資料而發現，不論是獎品固定在 2 門，或是由亂數表決定獎品所在，統計出來換門而中獎的次數，都會比不換門而中獎的機會高出許多。』、『第一次看到這個遊戲，是在電影《決勝 21 點》中，當時實在是百思不解主角為何會選擇換門，主角說換門會比不換門多了 33.3%，卻仍然不懂到底是怎麼算出來的，這次透過自己動手做，有所解釋，還是對算法感到一頭霧水。如果沒有看過這部電影，我想我的選擇會是不換門，因為會選中就是會選中，不會中就是不會中，沒有什麼機率的問題。』、『仔細思考之後，會發現主持人在開門的那個環節是“不隨機”的，是一種有意識的干預，主持人所選擇打開的門一定是“空門”，所以就中不中的

機率給降低了，但此時若是沒有換門，這個狀態下還是維持著前一個情況下的機率也就是 1/3 的中獎機率，必須要換門之後，這個中獎機率才會再提高，但是這個理論在乍看下有點違反人類直覺，像我雖然知道機率的運作方式，知道要換門才會提高機率，可是就還是半信半疑的，直到做了隨機亂數實驗，才發現原來機率真的有比較高，而且高很多足足一倍的中獎機率，真是讓人覺得有些許的意外。雖然是機率比較高，可是也不代表換了門就一定中獎！...』。

進一步的延伸討論、理論推導和電腦化處理方法，可參照黃文璋(2003)、陳仁義(2010)和陳仁義、魏志安、鄭信源(2007)。另一方面，我們從修讀此課程之同學們的心得分享中獲得一些可貴訊息，作中學的具體操作教學方法是現代學子所能接受、甚至於喜愛的！雖然有開始階段的可能排斥感、或者只是實作技巧的不熟悉階段，然而模擬遊戲的情境設計優劣、作中學的具體化成就感與否、輔助環境的建立結合等等，都是影響著此種方法之學習成效的重要因素。因此，我們本著這種理念在課程教材設計中，讓學習者在具體操作的過程當中，透過一張亂數表和遵循共同遊戲規則來模擬「汽車與山羊」的遊戲，大家在此種隨機遊戲的過程活動中，以科學方法來作觀察、記錄、比較、分析和整理之後，而且透過分享活動，讓每一位參與同學討論模擬結果中的規律發現，亦可感受到「同中有異」的隨機現象，進而可回到

「異中求同」的情境。此外，遊戲模擬是可以重做再現的科學方法，只要遵循著相同的遊戲規則，模擬結果會趨於一致，因此可體會的情境和思維感受也是相近的。依此或可較為容易地實現教學目標：使得同學們在具體操作的學習過程當中，逐步建立「隨機」、「偶然」和「必然」的科學思維與正確分際。

### 備註

註一：有另一位同學的心得：『這份報告最難作的地方在需要一邊輸入數值一邊作判斷，之前骰子實驗可以一口氣把數值都輸完再作判斷，這次是因為還參雜了若是選到和獎品同一扇門，主持人必須隨機開啟一扇門這個因素，一邊寫還要一邊對，看了真的有點頭昏眼花，常常寫到一半時卻發現不知道要從哪

個數接下來，還要再花時間找一下，...。』

### 陸、誌謝：

本文之順利完成要感謝國科會計畫 NSC99-2511-S-343-001 的補助。此外，在中正大學修課同學的心得報告和課堂討論也是本文的重要素材。

### 柒、參考文獻

- 林嘉祥和陳仁義 (2010)，模擬骰子投擲的一種隨機遊戲，*科學教育月刊*，第 329 期，19-33。
- 黃文璋(2003)：《隨機思考論》。台北：華泰文化。
- 陳仁義 (2010)，一個隨機遊戲中的機率理論註解，*台灣數學教師(電子)期刊*，第 21 期，2-19。
- 陳仁義、魏志安、鄭信源(2007)：一個隨機遊戲中的機率概念。*台灣數學教師(電子)期刊*，第 12 期，33-46。

## 捌、附錄

A. 亂數表中分成三組，個人起始值設定之後，後續值由上而下、由左而右：

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]
[1,]	0.344	0.871	0.534	0.272	0.963	0.455	0.095	0.968	0.319	0.137
[2,]	0.805	0.183	0.193	0.492	0.946	0.829	0.999	0.351	0.650	0.892
[3,]	0.999	0.579	0.536	0.392	0.079	0.921	0.759	0.854	0.220	0.468
[4,]	0.212	0.348	0.782	0.224	0.889	0.865	0.033	0.600	0.677	0.049
[5,]	0.860	0.829	0.916	0.302	0.247	0.191	0.694	0.963	0.732	0.310
[6,]	0.675	0.429	0.249	0.625	0.114	0.685	0.389	0.986	0.860	0.887
[7,]	0.562	0.259	0.695	0.595	0.086	0.713	0.353	0.600	0.441	0.221
[8,]	0.319	0.763	0.994	0.895	0.457	0.337	0.246	0.217	0.310	1.000
[9,]	0.373	0.355	0.858	0.006	0.278	0.660	0.934	0.305	0.599	0.397
[10,]	0.005	0.995	0.568	0.106	0.021	0.810	0.001	0.471	0.329	0.915
[11,]	0.249	0.185	0.933	0.673	0.743	0.746	0.734	0.038	0.297	0.659
[12,]	0.661	0.495	0.164	0.280	0.789	0.285	0.985	0.634	0.108	0.898
[13,]	0.673	0.707	0.692	0.370	0.301	0.984	0.735	0.437	0.594	0.628
[14,]	0.241	0.203	0.816	0.893	0.737	0.142	0.607	0.621	0.163	0.991
[15,]	0.464	0.280	0.458	0.098	0.088	0.152	0.440	0.101	0.968	0.715
[16,]	0.486	0.075	0.066	0.318	0.997	0.168	0.526	0.221	0.672	0.059
[17,]	0.712	0.932	0.035	0.281	0.726	0.396	0.247	0.679	0.561	0.839
[18,]	0.941	0.678	0.204	0.426	0.448	0.790	0.699	0.055	0.484	0.976
[19,]	0.737	0.541	0.435	0.800	0.037	0.530	0.379	0.119	0.934	0.668
[20,]	0.157	0.675	0.179	0.054	0.825	0.706	0.217	0.007	0.962	0.122
[21,]	0.250	0.874	0.877	0.567	0.390	0.392	0.055	0.265	0.985	0.894
[22,]	0.598	0.482	0.979	0.874	0.685	0.728	0.627	0.436	0.638	0.790
[23,]	0.938	0.182	0.060	0.421	0.087	0.467	0.462	0.885	0.418	0.934
[24,]	0.929	0.764	0.698	0.311	0.098	0.607	0.160	0.685	0.623	0.126
[25,]	0.870	0.293	0.708	0.384	0.562	0.245	0.829	0.790	0.875	0.481
[26,]	0.001	0.357	0.735	0.017	0.016	0.771	0.805	0.112	0.958	0.230
[27,]	0.724	0.239	0.041	0.755	0.501	0.125	0.573	0.405	0.544	0.799
[28,]	0.734	0.623	0.994	0.019	0.068	0.273	0.688	0.429	0.858	0.660
[29,]	0.981	0.067	0.910	0.024	0.548	0.312	0.555	0.256	0.369	0.714
[30,]	0.292	0.547	0.647	0.079	0.875	0.904	0.959	0.891	0.103	0.742

Generating method by R:

```
> set.seed(504)
> rnmtrx <- matrix(round(1000*(runif(300)))/1000, c(30,10))
```

B. 模擬骰子投擲遊戲：亂數初始位置為 (24, 9)

實 驗		公 平 情 況 ( $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=1/6$ )						不 公 平 情 況 ( $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=1/10; p_6=1/2$ )					
		點 1	點 2	點 3	點 4	點 5	點 6	點 1	點 2	點 3	點 4	點 5	點 6
1	0.623				1								1
2	0.875						1						1
3	0.958												1
4	0.544				1								1
5	0.858												1
6	0.369			1					1				
7	0.103	1							1				
8	0.137	1							1				
9	0.892												1
10	0.468			1							1		
11	0.049	1						1					
12	0.310		1							1			
13	0.887												1
14	0.221		1							1			
15	1.000												1
16	0.397			1						1			
17	0.915												1
18	0.659				1								1
19	0.898												1
20	0.628				1								1
21	0.991												1
22	0.715					1							1
23	0.059	1						1					
24	0.839												1
25	0.976												1
26	0.668					1							1
27	0.122	1							1				
28	0.894												1
29	0.790					1							1
30	0.934												1
SUM		5	2	3	4	3	13	2	3	1	3	1	20
期望	公平	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
期望	不公平							3	3	3	3	3	15
31													
32													
...	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
...	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
58													
59	0.598				1								1
60	0.938												1
SUM		8	8	8	8	11	17	3	5	6	6	4	36
期望	公平	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
期望	不公平							6	6	6	6	6	30

C. 模擬獎品固定在門 II：亂數初始位置為 (24, 9)

實驗次別	亂數值	獎品位置	亂數值	參賽者選取位置	亂數值	主持人開門位置	不換門而中獎	換門而中獎
1		II	0.623	II	0.875	III	1	0
2		II	0.958	III		I	0	1
3		II	0.544	II	0.858	III	1	0
4		II	0.369	II	0.103	I	1	0
5		II	0.137	I		III	0	1
6		II	0.892	III		I	0	1
7		II	0.468	II	0.049	I	1	0
8		II	0.310	I		III	0	1
9		II	0.887	III		I	0	1
10		II	0.221	I		III	0	1
.								
60		II	0.185	I		III	0	1
61		II	0.495	II	0.707	III	1	0
62		II	0.203	I		III	0	1
63		II	0.280	I		III	0	1
64		II	0.075	I		III	0	1
65		II	0.932	III		I	0	1
.								
111		II	0.318	I		III	0	1
112		II	0.281	I		III	0	1
113		II	0.426	II	0.800	III	1	0
114		II	0.054	I		III	0	1
115		II	0.567	II	0.874	III	1	0
116		II	0.421	II	0.311	I	1	0
117		II	0.384	II	0.017	I	1	0
118		II	0.755	III		I	0	1
119		II	0.019	I		III	0	1
120		II	0.024	I		III	0	1
<b>SUM</b>							<b>36</b>	<b>84</b>
<b>期望</b>	<b>(1/2, 1/2)</b>						<b>60</b>	<b>60</b>
<b>期望</b>	<b>(1/3, 2/3)</b>						<b>40</b>	<b>80</b>

D. 模擬獎品由亂數決定而隨機放置：亂數初始位置為 (24, 9)

實驗次別	亂數值	獎品位置	亂數值	參賽者選取位置	亂數值	主持人開門位置	不換門而中獎	換門而中獎
1	0.623	II	0.875	III	—	I	0	1
2	0.958	III	0.544	II	—	I	0	1
3	0.858	III	0.369	II	—	I	0	1
4	0.103	I	0.137	I	0.892	III	1	0
5	0.468	II	0.049	I	—	III	0	1
6	0.310	I	0.887	III	—	II	0	1
7	0.221	I	1.000	III	—	II	0	1
8	0.397	II	0.915	III	—	I	0	1
9	0.659	II	0.898	III	—	I	0	1
10	0.628	II	0.991	III	—	I	0	1
.								
60	0.280	I	0.370	II	—	III	0	1
61	0.893	III	0.098	I	—	II	0	1
62	0.318	I	0.281	I	0.426	II	1	0
63	0.800	III	0.054	I	—	II	0	1
64	0.567	II	0.874	III	—	I	0	1
65	0.421	II	0.311	I	—	III	0	1
.								
110	0.963	III	0.986	III	0.600	II	1	0
111	0.217	I	0.305	I	0.471	II	1	0
112	0.038	I	0.634	II	—	III	0	1
113	0.437	II	0.621	II	0.101	I	1	0
114	0.221	I	0.679	III	—	II	0	1
115	0.055	I	0.119	I	0.007	II	1	0
116	0.265	I	0.436	II	—	III	0	1
117	0.885	III	0.685	III	0.790	II	1	0
118	0.112	I	0.405	II	—	III	0	1
119	0.429	II	0.256	I	—	III	0	1
120	0.891	III	0.319	I	—	II	0	1
<b>SUM</b>							<b>38</b>	<b>82</b>
<b>期望 (1/2, 1/2)</b>							<b>60</b>	<b>60</b>
<b>期望 (1/3, 2/3)</b>							<b>40</b>	<b>80</b>