奇異槓桿

周鑑恆

私立萬能科技大學 光電工程系

壹、前言--由淺入深

翹翹板是許多人都十分熟悉的兒時玩具，很容易根據力矩原理解釋翹翹板的行為。如果兩人分別坐在翹翹板兩端，距支點等距，坐著較重的人的翹翹板這端會下降,坐著較輕的人的翹翹板那端會翹起。調整體重不同的這兩個人距支點的距離，不難找到使翹翹板平衡條件。有些科普書籍也將上述的力矩原理稱之為槓桿原理。

還真有一具有些像翹翹板的奇異槓桿，乍看之下不遵守槓桿原理。因為當掛在奇怪槓桿兩側的物體重量相同時，則不論這兩個物體掛在距離支點多遠的地方，都能保持平衡；當掛在這個奇異槓桿兩側的物體重量不同時，則不論這兩物體掛在奇異槓桿兩側何處，掛較重物體的那側總是下降。

此奇異槓桿不難使用中小學都有的簡單工具自製，其詳細的構造、製作的過程與使用的材料，請參閱參考資料。

貳、研究動機

奇異槓桿其實是非常著名的平衡實驗儀器及測量工具。有一種天平稱為拖盤天平，也稱 Roberval balance，就是應用奇異槓桿做成的天平。在 google 上鍵入 Roberval balance 字樣，可以看到許多托盤天平的圖片和原理解釋。但重要的是，須有一定的力學基礎，才能完整解釋外表簡單的托盤天平的原理，所以絕大部分常見的解釋均不十分周詳。這項實驗的重要性在於：

1. 深入力學基本原理的重點，例如：功能原理、廣義力等，但計算卻不繁難；深入反映力矩的定義及力矩平衡的意義，例如：定義力矩必須以適當的某單一點作為參考點，計算力矩時，並不需要真實的、或硬的剛性物體作為力臂。內容深入卻無繁雜的計算。
2. 是運用力學，分析靜力平衡的極佳範例，可將分析的手段重要特徵闡釋無遺，例如靜力平衡時，靜力平衡物體的任何一部分都靜力平衡，任何一部分對任何靜止點之力矩也平衡。由於槓桿原理和翹翹板大家都耳熟能詳，奇異槓桿之構造又非常簡單，這實驗非常有利於由淺入深的教學，凸顯力學中幾項重要的原理。將原始的奇異槓桿略作更改，能演示出相關原理的更多的細節。

參、功能原理

能量的定義誠然不容易下，有學者認為能量就是做功的能力。也就是說，能量就是轉變成另一種能量的能力。某種能量 E_a 做功，就會轉變成另一種能量 E_b。所以功能原理即可以表示如下：

$$-\Delta E_a = W = -\Delta E_b \text{ ....(1)}$$

其中 $\Delta E_a = E_{af} - E_{ai}$ ， $\Delta E_b = E_{bf} - E_{bi}$ ，i 代表初始， f 代表終了。也就是說某種能量 E_a 負值的變化量，會變成另一種能量 E_b 的變化量，而其變化的過程即是作功 w。當然，如果把公式改寫成

$$\Delta E_a + \Delta E_b = 0 \text{ ....(2)}$$

或

$$E_a + E_b = constan \text{ ....(3)}$$

也就是能量守恆。

在奇異槓桿實驗中，沒有人用手去推動它，所以它只受重力和摩擦力，換言之只有摩擦力與重力會作功。根據功能原理，可將此奇異槓桿的能量變化和作功的情形，可以下式表示：

$$W_g + W_f = -\Delta U + W_f = \Delta K \text{ ....(4)}$$

其中：W_g 代表重力作的功，它等於負值位能的變化量－ΔU，摩擦力所作的功 W_f 必小於零，$\Delta K = K_f - K_i$ 為整個奇異槓桿的動能變化量。

如果奇異槓桿不平衡，則

$$-\Delta U + W_f = \Delta K = K_f - K_i > 0 \text{ ......(5)}$$

意思是：若無其他外力，此槓桿如果原先靜止 K_i=0，就會因重力和摩擦力作功而使此槓桿運動。

當奇異槓桿左右兩側物體重量不同時（ $m_1 g > m_2 g$ ），奇異槓桿的橫 T 字形結構的水平部份始終維持水平，無論某傾角 θ 的大小如何，水平部份的任何一點的高度相同，所以，某傾角 θ 時，無論物體掛在那一點，物體的高度都相同，從奇異槓桿的結構可知，無論兩物體掛在何處（見圖一），其位能變化量均可表示為：

$$\begin{aligned} -\Delta U &= -(U_f - U_i) \\ &= -[(m_1 gl\sin\theta_f - m_2 gl\sin\theta_f) - \\ &\quad (m_1 gl\sin\theta_i - m_2 gl\sin\theta_i)] \\ &= -(m_1 - m_2)gl(\sin\theta_i - \sin\theta_i) > 0 \text{ .....(6)} \end{aligned}$$

當 $\theta_f < \theta_i$； $\sin\theta_f - \sin\theta_i < 0$ 條件成立，則(6)式大於零。

因此，如果轉軸處的摩擦力不太大，亦即雖 $W_f < 0$ ，但其絕對值不太大，則

$$-\Delta U + W_f = K_f - K_i > 0 \text{ ....(7)}$$

奇異槓桿就會失去平衡而動了起來，而使得 $\theta_f < \theta_i$。

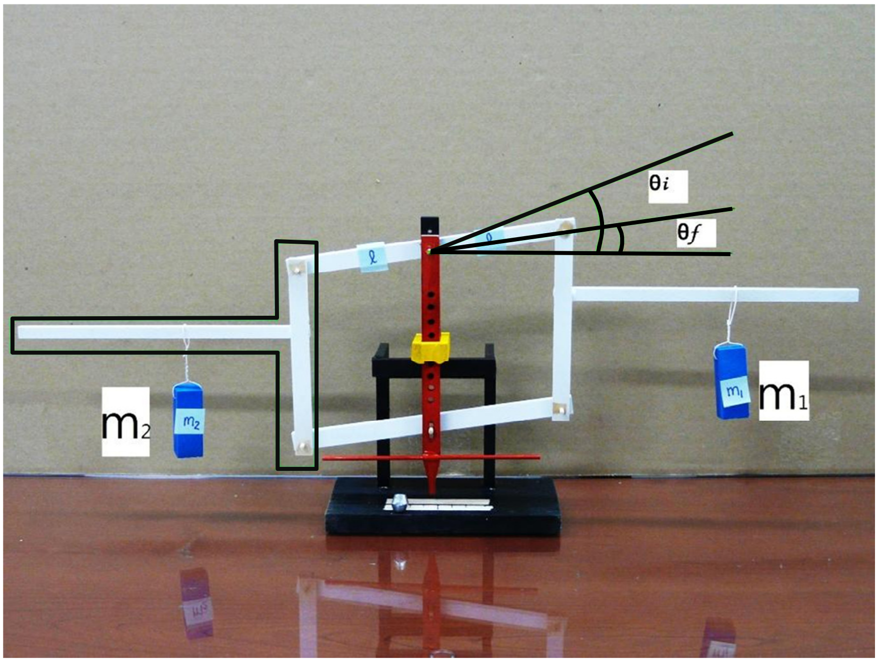
如果奇異槓桿平衡，意思是指位能無法轉換成動能。

$$-\Delta U + W_f = K_f - K_i = \Delta K \le 0 \text{ ....(8)}$$

當奇異槓桿左右兩側物體重量相同時（ $m_1 g = m_2 g = mg$ ），從奇異槓桿的結構可知，無論左右兩側物體掛在何處：

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_f - U_i \\ &= (mgl\sin\theta_f - mgl\sin\theta_f) - \\ &\quad (mgl\sin\theta_i - mgl\sin\theta_i) \\ &= 0 \text{ ....(9)} \end{aligned}$$

又因為 $W_f < 0$ ，所以： $K_f - K_i \le 0$。因此，如果原先 K_i 為零，K_f 不可能為負值，所以此奇異槓桿完全不動；如果 K_i 原先大於零，則 K_f 會逐漸變小。



圖一：位能隨傾角變化的情形（注意 ℓ 標示在奇異槓桿上，參見圖二，$\ell=\overline{OA}=\overline{OB}$；圖左方線條框住的 T 字形部分，為文中所謂的橫 T 字形結構）。

肆、力矩之解釋

奇異槓桿的教學功能在於凸顯了力矩原理的一些關鍵細節。由於奇異槓桿兩側都不再是單一的剛體，而是由轉軸和連桿連接的可動機構，力矩的公式仍能適用嗎？如果仍能適用，要如何定義呢？

根據力矩公式，平衡時

$$\overrightarrow{\Gamma_{ext}}=\frac{d\vec{L}}{dt}=0\ ;\ \vec{L}=\sum_{0}^{N}\vec{r_i}\times\overrightarrow{p_i}\ ....(10)$$

其中 $\vec{L}=\sum_{0}^{N}\vec{r_i}\times\overrightarrow{p_i}$ 為系統的角動量，$\vec{r_i}$ 和 $\overrightarrow{p_i}$ 為系統中各個質點的位置和動量，$\vec{L}$ 為系統之總角動量，$\overrightarrow{\Gamma_{ext}}$ 是系統（即考慮中的物體）所受所有外力矩的向量和。

值得注意的是，此系統未必是一個剛體，此系統可以是像本文討論的結構體，甚至是一群互不相干的個體。當系統平衡時，$\overrightarrow{\Gamma_{ext}}=0$。因為本文討論的系統不是剛體，而是由可動的連桿構成。靜止時，$\vec{L}=0$，因此 $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ 時，整個連桿結構所受到的力距必須為零。更重要的是，此公式中的 $\overrightarrow{\Gamma_{ext}}=0$，必須相對某一個參考點定義。

因此，任何物理定理都不會暫時失效，即便此教具異於一般的槓桿，力矩的定義仍然不變，亦即：外力的著力點相對原點的位置向量，外積該外力向量；力矩平衡的條件也無異。

先假設此教具不動（既無速度，也無加速度）的狀態，再看看它能否滿足力矩平衡的條件。若能滿足，則奇異槓桿維持平衡不動；若不能滿足，則奇異槓桿就無

法平衡不動。

靜力平衡時，靜力平衡物體的任何一部分都靜力平衡，任何一部分對任何靜止點之力矩也平衡。以下的計算要非常小心：作用力與反作用力作用在不同物體上；某物體的運動狀態，只與作用在該物體上的力有關。見圖二所示，奇異槓桿左側掛一質量 m_2 的重物，右側掛一量 m_1 的重物。先以 A 點為參考點，則右側橫 T 字形結構須滿足力矩

$$m_1 g S_1 = hF_1 \quad \text{(11)}$$

其中 F_1 為下方連桿右側轉軸作用在橫 T 字形結構的力的水平分量（ $F_1>0$ ）（它的反作用力作用在下方連桿上）。同理，以 B 為參考點，左側橫 T 形結構也處於力矩平衡的狀態，所以可得：

$$m_2 g S_2 = hF_2 \quad \text{(12)}$$

其中 F_2 為下方連桿左側轉軸作用在橫 T 字形結構的力的水平分量($F_2>0$)(它的反作用力作用在下方連桿上)。

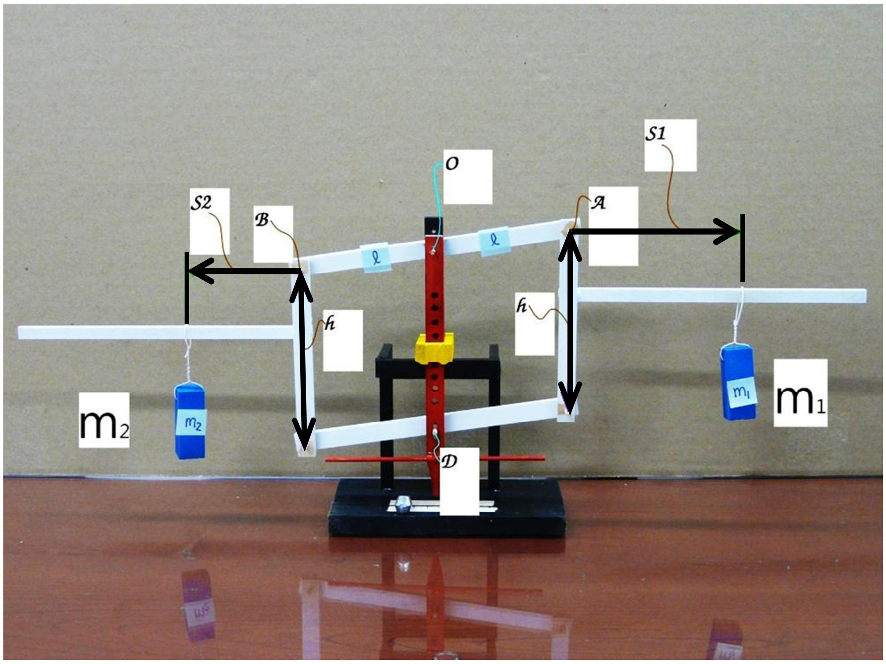
現在仔細分析下方連桿的受力情形，因為下方連桿不可以在水平方向運動，更沒有水平方向的加速度，所以 D 點(轉軸)對下方連桿作用的合力的水平分量為 (F_2-F_1)，其大小為：

$$(F_2-F_1)=\frac{1}{h}(m_2 g s_2 - m_1 g s_1)$$

$$=\frac{g}{h}(m_2 s_2 - m_1 s_1) \quad \text{(13)}$$

亦即：

$$(F_2-F_1)h = -g(m_1 s_1 - m_2 s_2) \quad \text{(14)}$$



圖二：計算整個奇異槓桿所受的總力矩(以 O 點為參考點)，顯然也須考慮 D 點轉軸對奇異槓桿造成的力矩(也以 O 點為參考點)。

如果 $F_2 > F_1$，D 點(轉軸)『對下方連桿』作用的合力的水平分量向左，如果 $F_2 < F_1$，D 點(轉軸)『對下方連桿』作用的合力的水平分量向右。

現在再考慮”整個”奇異槓桿所受的總力矩(以 O 點為參考點)！使其順時針轉的力矩定為正值，此時顯然也須考慮 D 點轉軸對奇異槓桿造成的力矩(以 O 點為參考點)。所以順時針“轉”的力矩為

$$\begin{aligned}&\Gamma_{ext}\\&= m_1 g(l\cos\theta + s_1) + (F_2 - F_1)h - m_2 g(l\cos\theta + s_2)\\&= m_1 g s_1 - m_2 g s_2 + (F_2 - F_1)h + (m_1 s_1 - m_2 s_2)g\\&= (m_1 - m_2) g l \cos\theta \qquad (14)\end{aligned}$$

由此可知：

(1) 如果 $m_1 = m_2$，則無論 s_1，s_2 為何，奇異槓桿均平衡

(2) 如果 $m_1 \neq m_2$，則無論 s_1，s_2 為何，奇異槓桿均不能平衡。

伍、實驗上的小技巧

將原始的奇異槓桿作一個小改進，很容易就能演示出 D 點（轉軸）確實對整個奇異槓桿施加力矩。只要用儀器或一彈簧秤就可以看出 D 點受力的情形。

但本文中以更廉價的十字架標示出 D 點受力的情形。十字架上方以一轉軸 O 懸掛在支架上，拿掉將十字架固定在支架上的束帶（見圖三），十字架即能繞轉軸擺動（見圖四）。十字架之橫桿可掛法碼，以法碼平衡十字架 D 點所受的力矩，即能顯示 D 點所受的力矩：

$$h(F_2 - F_1) = (m_2 g s_2 - m_1 g s_1) = g(m_2 s_2 - m_1 s_1) \qquad (15)$$

也就是說：當 $m_1 = m_2$ 時，如果 $s_2 - s_1$ 差異愈大，掛在十字架橫桿上的法碼，要距離 O 點的鉛垂線越遠（見圖五），以平衡 D 點所受的較大的力矩。

陸、結論

這項奇異槓桿的改良教具的價值有：

(1) 它與人們非常熟悉的槓桿和翹翹板很相似，但卻有出人意料的現象，易引起好奇和探究的興致。

(2) 從功能原理可以簡單解釋奇異槓桿的奇怪現象，有助於學生掌握功能原理，乃至於虛功原理。

(3) 它凸顯出力矩原理的若干重要的細節，例如：參考點之選擇；槓桿若非整塊剛體，當如何處理等問題。

(4) 它凸顯了所有物理定理必須隨時正確並存。

參考文獻

周鑑恒，力矩平衡探密，**科學月刊**，2010 年 9 月號 489 期，698-700 頁。

D. Halliday, R. Resnick and J. Walker（2004）, *Fundamentals of Physics* 7th ed., Chapter 8,New York,John Wiley & Sons, Inc.

Louis A. Bloomfield（2010）, How things work ：*The physics of everyday life*, 4th ed., Chapter 2, New York , John Wiley & Sons, Inc.

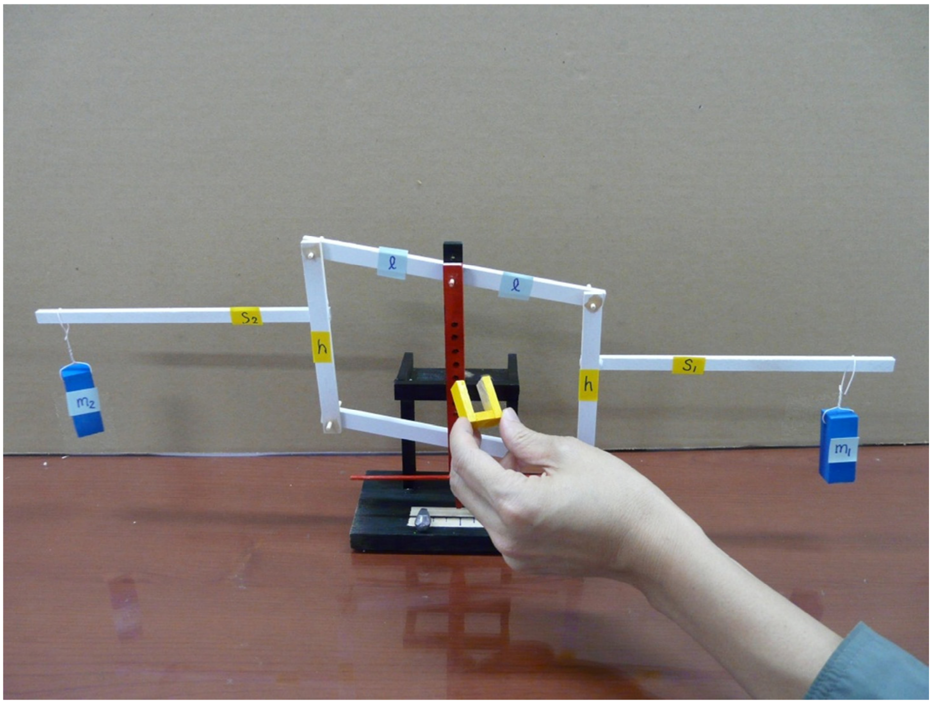


圖 3、 十字架（紅色部分）上方以一轉軸 O 懸掛在支架上，拿掉將十字架固定在支架上的束帶（左手拇指與食指拿住的黃色ㄇ字型物體）。

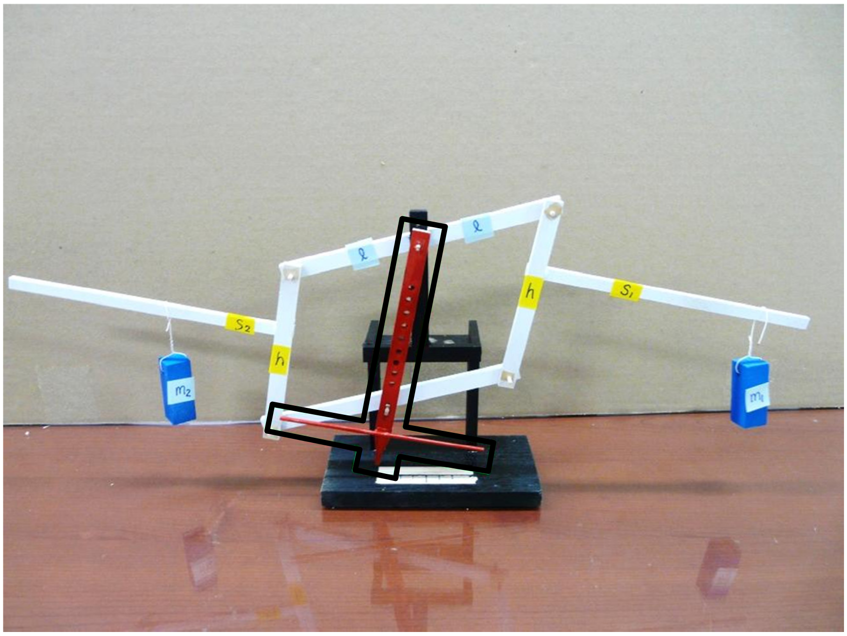


圖 4、 十字架即能繞轉軸擺動(圖中粗線條框住，向左歪斜的十字形部分，為文中所謂的十字架)。

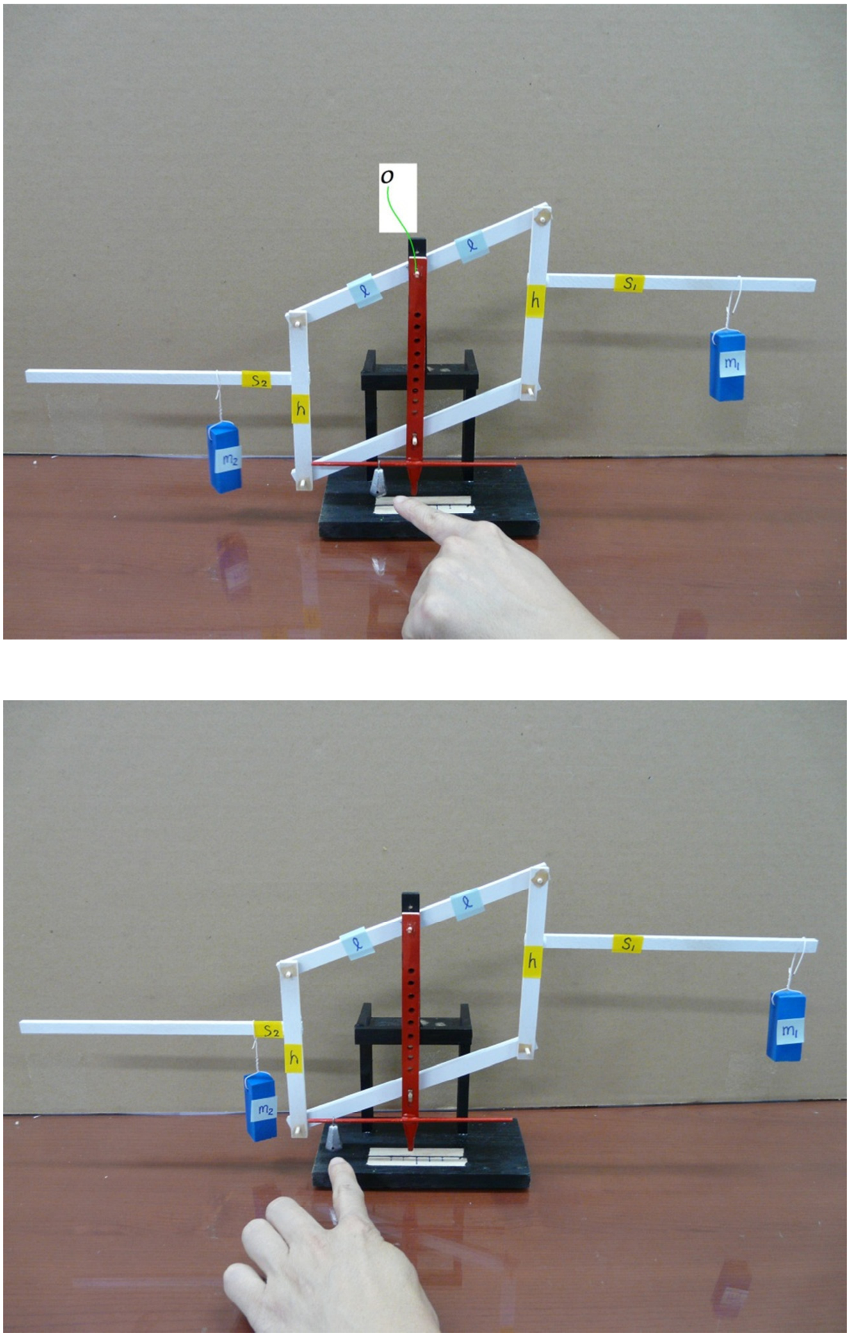


圖 5、當 $m_1 = m_2$ 時，如果 $s_2 - s_1$ 差異愈大，掛在十字架橫桿上的法碼（食指指出之處），要距離 O 點的鉛垂線越遠。