小數與分數關係的探討

劉曼麗 [1]* 侯淑芬 [2]
[1] 國立屏東教育大學 數理教育研究所
[2] 高雄市立十全國民小學

壹、前言

有時為了便於掌握分數的大小，我們常將分數化成小數；如遇有小數乘除計算繁複時，我們又會將小數化成分數。可見小數與分數彼此的關係是非常密切。但是否所有的分數皆可化成小數？又是否所有的小數皆可化成分數？兩者的關係究竟如何？由於國內的一些職前教師與小學教師對於分數與小數的認知有限，常會認為所有的分數皆可化成小數以及所有的小數也皆可化成分數。進而認為兩者所成的集合是相等的。事實上，所有的分數是可化成小數，但並非所有的小數也可化成分數。因此分數所成的集合是包含於小數所成的集合內。為能說明這些結果，本文試著先探討小數是否可化成分數以及分數是否可化成小數兩部分，然後再澄清它們之間的關係。

貳、小數是否可化成分數

為能探討小數是否可化成分數，我們必須先了解小數的家族。小數分為有限小數與無限小數。小數點後的數字個數有限的小數稱為有限小數；而個數為 n 的有限小數又稱為 n 位小數，以 $0.a_1a_2\cdots a_n$ 表示。相對地，小數點後的數字個數無限的小數則稱為無限小數。無限小數還可分為循環小數與無限不循環小數。而循環小數又有純循環小數與混循環小數之分。純循環小數為小數點後僅包含重複的數字序列 $a_1a_2\cdots a_n$，即 $0.a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n\cdots$，以 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 表示。相對地，混循環小數除了重複的數字序列 $a_1a_2\cdots a_n$ 外，之前還包含不循環的數字序列 $b_1b_2\cdots b_m$，即 $0.b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n\cdots$，以 $0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 表示。如 $0.\overline{123}$ 表示純循環小數而 $0.12\overline{456}$ 表示混循環小數。至於無限不循環小數則是小數點後僅包含不循環的數字序列，如大家所熟悉的圓周率其值為 3.141592653589793238462643⋯就是無限不循環小數。認識了小數的家族後，我們接著來看哪些小數可化成分數。

一、有限小數可化成分數

有限小數可直接表示成分母為 10 的乘冪的分數。設 x 為 n 位小數 $0.a_1a_2\cdots a_n$，則 $x=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}$。由此可知若分數經過擴分或約分後的分母不為 10 的乘冪，則此分數是不可化成有限小數。

* 為本文通訊作者

二、純循環小數可化成分數

設 x 為純循環小數 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，則 x 可化成分數 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}}$。

證明如下：

$$x=0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\begin{aligned}10^n x&=a_1a_2\cdots a_n.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\\&=a_1a_2\cdots a_n+0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\\&=a_1a_2\cdots a_n+x\end{aligned}$$
$$10^n x-x=a_1a_2\cdots a_n$$
$$(10^n-1)x=a_1a_2\cdots a_n$$
$$x=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}}$$

三、混循環小數可化成分數

設 x 為混循環小數 $0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，則 x 可化成分數 $\dfrac{(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}\underbrace{00\cdots0}_{m個}}$。

證明如下：

$$\begin{aligned}x&=0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}\\&=10^{-m}[(b_1b_2\cdots b_m)+0.\overline{a_1a_2\cdots a_n})]\\&=10^{-m}[(b_1b_2\cdots b_m)+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}]\\&=10^{-m}[\frac{(b_1b_2\cdots b_m)(10^n-1)+(a_1a_2\cdots a_n)}{10^n-1}]\\&=[\frac{(b_1b_2\cdots b_m)10^n-(b_1b_2\cdots b_m)+(a_1a_2\cdots a_n)}{(10^n-1)10^m}]\\&=\frac{(b_1b_2\cdots b_m)10^n+(a_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}\times10^m}\\&=\frac{(b_1b_2\cdots b_m\underbrace{00\cdots0}_{n個}+a_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}\underbrace{00\cdots0}_{m個}}\\&=\frac{(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}\underbrace{00\cdots0}_{m個}}\end{aligned}$$

由上述可知，有限小數與循環小數皆可化成分數。對循環小數而言，如從外觀比較純循環小數所化成的分數與混循環小數所化成的分數時，就可發現兩者的差別在於前者分母的數字皆為 9 而後者分母的數字除了 9 以外尚有 0。

四、無限不循環小數不可化成分數

無限不循環小數不可化成分數的箇中緣由，容待分數是否可化成小數探討後再行說明。

參、分數是否可化成小數

分數不像小數的家族那麼複雜，以符號 $\frac{a}{b}$ 即可表示分數，其中分子 a 與分母 b 皆為整數，且 b 不為 0。若將分數化成小數，只要將分子除以分母，再用直式除法計算即可得出小數，如：$\frac{2}{5}=2\div5=0.4$，$\frac{2}{3}=2\div3=0.\overline{6}$，因此所有的分數皆可化成小數。再進一步來看，由於任意正整數除以 b 後的餘數不外乎是 0、1、2⋯（b-1），因此在 $a\div b$ 的計算過程中，若經過數個步驟（每除以 b 時稱為 1 個步驟），所得餘數為 0 時，計算即中止，則 $\frac{a}{b}$ 可化成有限小數。若所得的餘數一直不為 0 時，那也最多經過（b-1）個步驟後就會與之前的某一餘數重複，則 $\frac{a}{b}$ 可化成循環小數。由此可知，

若將一個分數化成小數，則此小數必為有限小數或循環小數。而由此結果，我們即可說明無限不循環小數為何不可化成分數：假設無限不循環小數可化成分數，那麼由其所化成的「分數」便可化成「無限不循環小數」。此結果就會與分數僅能化成有限小數或循環小數兩種情形矛盾，故可推翻此假設。所以無限不循環小數是不可化成分數。

另外，當我們遇到的分數其分母為較大的數或者分母是以標準分解式呈現（如 $\dfrac{3}{2^{13}\times5^{9}\times13}$）時，將它化成小數的計算就會變得繁複多了，我們是否不經計算，就能直接判斷此分數所化成的小數是有限小數還是循環小數?又當此分數可化成循環小數時，我們能否再進一步判斷此分數所化成的循環小數究竟是哪一種類型？是純循環小數呢？或是混循環小數？為便於說明與討論，下文所提分數「$\dfrac{a}{b}$」，均指已化成「最簡分數」了。

一、如何判斷分數可化成有限小數或循環小數

因為分母為 10 的乘冪的分數可直接化成有限小數，而 10 的質因數為 2 和 5，所以，我們若欲判斷分數是否可化成有限小數，只要關注在分母的質因數即可。若分數的分母其質因數僅含 2 或 5，就可透過擴分或約分先得出分母為 10 的乘冪之等值分數，再將此等值分數化成有限小數。若分母的質因數含有 2 和 5 以外的數，則無法透過擴分或約分將此分母變成 10 的乘冪，所以此分數不能化成有限小數，故此分數所化成的小數必為循環小數。

> 若分數的分母其質因數僅含 2 或 5，則此分數可化成有限小數。

證明如下：

已知分數 $\dfrac{a}{b}$，a、$b\in N$，$b\neq1$，$(a,b)=1$，

且 $b=2^m\times5^n$ ，m、$n\in N\cup\{0\}$

(i) 若 $m\geq n$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\times5^n}=\frac{a\times5^{m-n}}{2^m\times5^n\times5^{m-n}}=\frac{a\times5^{m-n}}{2^m\times5^m}$$
$$=\frac{a\times5^{m-n}}{10^m}=a\times5^{m-n}\times0.\underbrace{0\cdots0}_{(m-1)\text{個}}1$$

(ii) 若 $m<n$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\times5^n}=\frac{a\times2^{n-m}}{2^m\times2^{n-m}\times5^n}$$
$$=\frac{a\times2^{n-m}}{2^n\times5^n}=\frac{a\times2^{n-m}}{10^n}$$
$$=a\times2^{n-m}\times0.\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{個}}1$$

由(i)、(ii)得知，$\dfrac{a}{b}$ 可化成有限小數。

> 若分數的分母其質因數含有 2 和 5 以外的數，則此分數可化成循環小數。

證明如下：

已知分數 $\dfrac{a}{b}$，a、$b\in N$，$b\neq1$，$(a,b)=1$，

其中 $b=2^m\times5^n\times p$ ，m、$n\in N\cup\{0\}$，

且 p 的質因數為 2 和 5 以外的數

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\times5^n\times p}$$

因$(a,b)=1$，所以$(a,p)=1$

又因 p 的質因數為 2 和 5 以外的數，故將 p 再乘以任何數都不能使分母 b 變成 10 的乘冪，因此$\frac{a}{b}$不可化成有限小數。

所以此分數只能化成循環小數。

二、如何判斷分數可化成純循環小數或混循環小數

到目前為止，我們已經了解當分數其分母的質因數含有 2 和 5 以外的數時，此分數是可化成循環小數的。但哪一類的分數是可化成純循環小數？而哪一類的分數是可化成混循環小數？我們發現，可化成純循環小數的分數，其分母的質因數不能含有 2 和 5（如分母為 $3^2\times7$）；可化成混循環小數的分數，其分母的質因數還需含有 2 或 5（如分母為 $2^2\times7$）。

> 若分數可化成純循環小數，其分母的質因數不含 2 和 5。

證明如下：

設分數$\frac{a}{b}$可化成純循環小數

則可令 $\frac{a}{b}=0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，

a_1、$a_2\cdots a_n\in\{0,1,2\cdots8,9\}$

由前可知 $\frac{a}{b}=0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}}$

因$(\underbrace{99\cdots9}_{n個},2)=1$，$(\underbrace{99\cdots9}_{n個},5)=1$

即分母與 2 互質，且分母與 5 互質所以分母的質因數不含 2 和 5。

> 若分數可化成混循環小數，其分母的質因數必含 2 或 5。

證明如下：

設分數$\frac{a}{b}$可化成混循環小數

則可令 $\frac{a}{b}=0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，

其中 b_1、$b_2\cdots b_m$、a_1、$a_2\cdots a_n\in\{0,1,2\cdots8,9\}$，

$m\geq1$

由前可知

$$\frac{a}{b}=0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$=\frac{(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}\underbrace{00\cdots0}_{m個}}$$

假設分母 b 的質因數不含 2 和 5，

那麼分子 $(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)$ 的末位至少應有 m 個 0 以便將分母

$\underbrace{99\cdots9}_{n個}\underbrace{00\cdots0}_{m個}$ 末位的 0 約盡。

因此

(i) 若 $m\geq n$

$$(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)=b_1b_2\cdots b_n\underbrace{00\cdots0}_{m個0}$$

即在 $b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n$ 中，

$$\underbrace{b_{n+1}b_{n+2}\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n}_{m個}=b_1b_2\cdots b_m$$

而此混循環小數可寫成

$$
\begin{aligned}
&0.b_1b_2\cdots b_n b_{n+1}\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_n}\\
&=0.b_1b_2\cdots b_n\boxed{b_{n+1}\cdots b_m a_1a_2\cdots a_n}a_1a_2\cdots a_n\cdots\\
&=0.b_1b_2\cdots b_n\boxed{b_1b_2\cdots\cdots\cdots\cdots b_m}a_1a_2\cdots a_n\cdots\\
&=0.b_1b_2\cdots b_n b_1b_2\cdots b_n\boxed{b_{n+1}\cdots b_m a_1a_2\cdots a_n}a_1a_2\cdots a_n\cdots\\
&=0.b_1b_2\cdots b_n b_1b_2\cdots b_n\boxed{b_1b_2\cdots\cdots\cdots\cdots b_m}a_1a_2\cdots a_n\cdots\\
&=0.b_1b_2\cdots b_n b_1b_2\cdots b_n b_1b_2\cdots b_n b_1b_2\cdots b_n\cdots\\
&=0.\overline{b_1b_2\cdots b_n}\text{(純循環小數)}
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $m<n$

$$
\begin{aligned}
&(b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)\\
&=b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_{n-m}\underbrace{00\cdots 0}_{m\text{個}0}
\end{aligned}
$$

即在 $b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_n$ 中，

$$\underbrace{a_{n-m+1}a_{n-m+2}\cdots a_n}_{m\text{個}}=b_1b_2\cdots b_m$$

而此混循環小數可寫成

$$
\begin{aligned}
&0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_{n-m}\boxed{a_{n-m+1}a_{n-m+2}\cdots a_n}}\\
&=0.b_1b_2\cdots b_m\overline{a_1a_2\cdots a_{n-m}\boxed{b_1b_2\cdots\cdots\cdots\ b_m}}\\
&=0.b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_{n-m}b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_{n-m}b_1b_2\cdots b_m\cdots\\
&=0.\overline{b_1b_2\cdots b_m a_1a_2\cdots a_{n-m}}\text{(純循環小數)}
\end{aligned}
$$

由(i)、(ii)得知，分母 b 的質因數不含 2 和 5 的結果與原假設分數 $\frac{a}{b}$ 可化成混循環小數矛盾，故分母的質因數必含 2 或 5。

由上述的證明過程中，我們還可得知若分母的質因數不含 2 和 5，則此分數只能化成純循環小數。另外，我們又發現若分母的質因數還含有 2 或 5，則此分數只能化成混循環小數。

綜合上述結果可知，最簡分數分母的質因數是否含有 2 和 5 以外的數就是其化成有限小數或是循環小數的關鍵點；而在最簡分數分母的質因數已含有 2 和 5 以外的數之情形下，分母的質因數是否還含有 2 或 5 則是該分數化成純循環小數或是混循環小數的關鍵點。因此，我們將判斷最簡分數可化成哪一類小數的方法摘要如下：

> $\frac{a}{b}$ ： a、$b\in N$ ， $b\neq 1$ ， $(a,b)=1$
>
> 若 $b=2^m\times 5^n$ ，m 、$n\in N\cup\{0\}$ ，
>
> 則 $\frac{a}{b}$ 可化成有限小數
>
> 若 $b=2^m\times 5^n\times p$ ， $p=p_1^{m_1}\times p_2^{m_2}\times\cdots p_j^{m_j}$
>
> $p_i\neq 2$ 、 5，m 、$n\in N\cup\{0\}$ ，
>
> $\forall 1\le i\le j$ ， $m_1\times m_2\times\cdots\times m_j\neq 0$ ，
>
> 則 $\frac{a}{b}$ 可化成循環小數
>
> 若 m，n 同時為 0，則 $\frac{a}{b}$ 為純循環小數
>
> 若 m，n 不同時為 0，則 $\frac{a}{b}$ 為混循環小數

肆、小數與分數關係

到目前為止，我們已經探討了小數化成分數的情形，也探討了分數化成小數的情形。還有，我們也了解到將最簡分數的分母做質因數分解後的結果能幫助我們判斷此分數是可化成哪一類小數。依據上述探討的結果，我們將小數與分數的關係摘要如下圖 1。

由圖 1 我們可看出所有的分數皆可化成小數，但並非所有的小數也可化成分數。其中，有限小數與循環小數是可化成分數，

而無限不循環小數是不可化成分數。還有值得一提的是，由於有限小數與循環小數均可表示成分數，是為有理數；而無限不循環小數無法表示成分數，是為無理數。

伍、結語

小數與分數的轉換與關係是個從小學一直延伸到高中的數學課題。然而我們往往僅熟記公式而不清楚其中原委。還有，小數與分數兩者的關係也常被搞錯。因此，本文先探討小數與分數是否可互相轉換，並試著說明為何無限不循環小數無法化成分數以及如何判斷分數所化成的小數是屬於哪一類小數，以期能引導讀者對於小數與分數的關係有進一步的認識與全面性的理解。

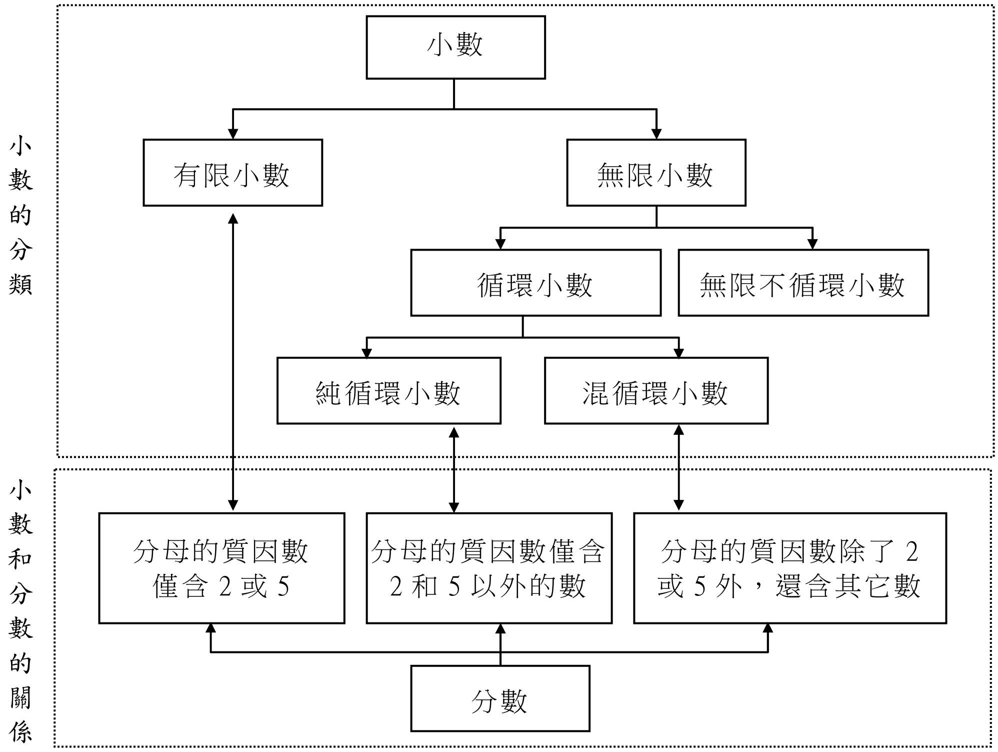

圖 1　小數與分數的關係