中學生通訊解題第七十八期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
7801

試求所有滿足下列條件的數對 (m,n)：

(1) m,n 兩數皆為大於 1 且小於 99 的正整數，又其中一個數為質數，另一個數為完全平方數。

(2) m,n 這兩個數的差為某個質數的兩倍。

(3) m^2+n^2 為某個完全平方數的兩倍。

參考解答：

首先，我們假設 $m>n$。

根據 (2) 及 (3)，可以得到 $m=n+2p, m^2+n^2=2k^2$，其中 p 為質數，k 為正整數。將 $m=n+2p$ 代入 $m^2+n^2=2k^2$，可以得 $(n+2p)^2+n^2=2k^2$。經化簡後得 $[k+(n+p)][k-(n+p)]=p^2$，又因為 p 為質數，所以 $[k+(n+p)]=p^2,[k-(n+p)]=1$。

因此 $n=\dfrac{(p-1)^2-2}{2}$，但 n 為小於 99 的正整數，所以 p 為小於 15 的奇質數，即 $p=3,5,7,11,13$。分別代入可得 $(m,n,p)=(7,1,3),(17,7,5),(31,17,7),(71,49,11),(97,71,13)$

根據題意 $(m,n,p)=(71,49,11)$ 是解，因此數對 $(m,n)=(71,49),(49,71)$。

解題評註：

本題牽涉到較大的代數計算量及質數的分析，因此難度較高。

問題編號
7802

試求所有正整數數對 (m,n)，使得 $\dfrac{5m-4}{n}$ 及 $\dfrac{2n+3}{m}$ 皆為整數。

參考解答：

(i) 若 $\dfrac{5m-4}{n}\geq 2$ 且 $\dfrac{2n+3}{m}\geq 5$，則 $5m-4\geq 2n$ 及 $2n+3\geq 5m$。將兩式相加會造成矛盾！所以 $\dfrac{5m-4}{n}<2$ 或 $\dfrac{2n+3}{m}<5$。

(ii) 假設 $\dfrac{5m-4}{n}<2$，加上它又是正整數，所以 $\dfrac{5m-4}{n}=1$。將 $n=5m-4$ 代入，可得 $\dfrac{2n+3}{m}=\dfrac{10m-5}{m}=10-\dfrac{5}{m}$，所以

$m=1,5$。故數對 $(m,n)=(1,1),(5,21)$。

(iii) 假設 $\dfrac{2n+3}{m}<5$，所以 $\dfrac{2n+3}{m}=1,2,3,4$。

$\dfrac{2n+3}{m}=2,4$ 顯然不合(奇偶性)，所以 $\dfrac{2n+3}{m}=1,3$。當 $\dfrac{2n+3}{m}=1$ 仿造(ii)，可得數對 $(m,n)=(5,1),(25,11)$；當 $\dfrac{2n+3}{m}=3$，得 $3m=2n+3$，由題意 $3\times\dfrac{5m-4}{n}=\dfrac{10n+3}{n}=10+\dfrac{3}{n}$ 亦為正整數，所以 $n=1,3$。代回檢驗，數對 $(m,n)=(3,3)$。

綜合上述，數對 $(m,n)=(1,1),(5,21),(5,1),(25,11),(3,3)$ 為滿足題意的所有解。

解題評註：

本題主要的關鍵是對於某些代數量作分類討論，進而作計算及檢驗。

問題編號
7803

將 6 個相同的黑球與 6 個相同的白球排成一列，從左至右依序編號為 $1,2,...,12$，求 6 個黑球的編號和小於 6 個白球的編號和的情形有幾種。

參考解答：

12 個編號總和為 $1+2+....+12=78$，將這些數平分成兩組，共有 $C_6^{12}=924$ 種方法，現在只要將兩組和皆為 $\dfrac{78}{2}=39$ 的去掉，再除以 2，就是所求的方法數。而 $a+b+c+d+e=39$ 中，至少有一個小於或等於 5，否則 $6+7+8+9+10=40>39$，矛盾。設 $a\le 5$，同理 $b\le 8$，列出 (a,b,c,d,e) 符合條件的情形如下：

1	5	10	11	12
1	6	9	11	12
1	7	8	11	12
1	7	9	10	12
1	8	9	10	11
2	4	10	11	12
2	5	9	11	12
2	6	8	11	12
2	6	9	10	12
2	7	8	10	12
2	7	9	10	11

3	4	9	11	12
3	5	8	11	12
3	5	9	10	12
3	6	7	11	12
3	6	8	10	12
3	6	9	10	11
3	7	8	9	12
3	7	8	10	11
4	5	7	11	12
4	6	7	10	12
4	6	8	9	12
4	7	8	9	11
5	6	7	9	12
5	6	7	10	11
5	6	8	9	11

共 19 種，故所求有 $\dfrac{924-26}{2}=449$ 種。

問題編號
7804

有一質點只能在數線上向左或向右移動整數格。有一個箱子裡有一樣的球 2010 個，分別編號 1 至 2010。每次從箱子裡抽取一球，取後不放回。

若一開始從箱子裡抽中球的號碼為 a_1，代表質點的起始位置為 a_1。

步驟 1：從箱子裡抽中球的號碼為 a_2，代表質點必須從 a_1 移動到 a_2。

步驟 2：從箱子裡抽中球的號碼為 a_3，代表質點必須從 a_2 移動到 a_3。

⋮

步驟 k：從箱子裡抽中球的號碼為 a_k，代表質點必須從 a_{k-1} 移動到 a_k。

一直重複這樣的步驟，直至箱子裡的球數都抽完為止。

當此質點移動到 a_{2010} 的位置後，必須再回到 a_1。

試問：此質點從 a_1 開始到 a_1 結束，所經歷過的總路徑最長為何?

參考解答：

(1) **找總路徑長的上界：**

總路徑長

$$=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2009}-a_{2010}|+|a_{2010}-a_1|$$
$$=(Max(a_1,a_2)-Min(a_1,a_2))+$$
$$(Max(a_2,a_3)-Min(a_2,a_3))+\ldots+$$
$$(Max(a_{2009},a_{2010})-Min(a_{2009},a_{2010}))+$$
$$(Max(a_{2010},a_1)-Min(a_{2010},a_1))$$
$$\le 2(1006+1007+\ldots+2010)-2(1+2+\ldots+1005)$$
$$=2(1005+1005+\ldots.+1005)$$
$$=2\times1005\times1005$$
$$=2020050$$

(2) **證明等號成立：**

取

$$a_1=1,a_2=1006,a_3=1007,\ldots.,a_{2009}=1005,$$
$$a_{2010}=2010$$

此時總路徑長

$$=|1-1006|+|1006-2|+|2-1007||1007-3|+\ldots$$
$$+|1005-2010|+|2010-1|$$
$$=2(1006+1007+\ldots.+2010)-2(1+2+\ldots+1005)$$
$$=2(1005+1005+\ldots.+1005)$$
$$=2\times1005\times1005$$
$$=2020050$$

(3) 由 (1),(2) 可知，最大的距離為 2020050，且(2)為其中一種取法。

解題評註：

本題屬於組合最值的問題，關鍵有兩個步驟：

步驟一：說明路徑總長不超過 2020050

步驟二：實際舉出一個的確辦得到路徑長為 2020050 的例子。

以上兩個步驟缺一不可。

若只有步驟一而沒有步驟二，或許可能不存在路徑總長為 2020050 的狀況。

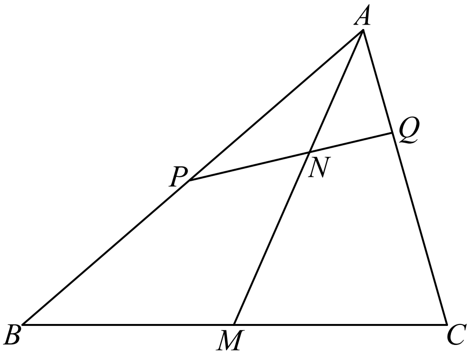
若只有步驟二而沒有步驟一，或許可能有總長大於 2020050 的狀況。

因此兩個步驟缺一不可。

問題編號
7805

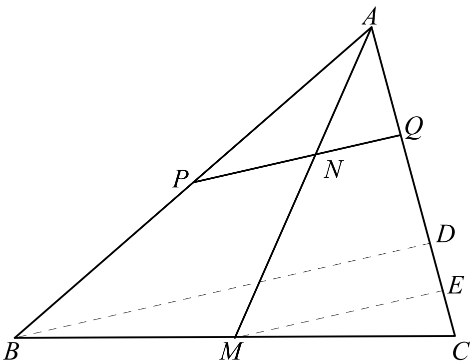
設 $\overline{AM}$ 是 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的中線，任作一直線分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AM}$ 於 P、Q、N，求證：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}=\frac{2\overline{AM}}{\overline{AN}}$$



參考解答：

過 B 做 $\overline{BD}\,//\,\overline{PQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於 D，過 M 作 $\overline{ME}\,//\,\overline{PQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E



$\because\ \overline{BM}=\overline{MC}$，

$\therefore\ \overline{CE}=\overline{ED}$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AQ}}$，$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AQ}}$

$$\therefore\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AQ}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}$$

$$=\frac{(\overline{AE}-\overline{DE})+(\overline{AE}+\overline{EC})}{\overline{AQ}}$$

$$=\frac{2\overline{AE}}{\overline{AQ}}=\frac{2\overline{AM}}{\overline{AN}}$$

解題評註：

解題重點：這個幾何題有好幾種解法，可以作不同的輔助線。作得好，只要利用平行線性質，即可解決。作得不夠漂亮，還得利用相似三角形的性質才能解決。我們提供上面的解法給各位參考。