

# 國中補救教學示例--從拼圖學因式分解

李祐宗

澎湖縣立湖西國民中學

## 壹、前言

因式分解是國中八年級上學期的單元，本身也是多項式展開的逆算式。筆者鑑於學生碰到此單元的學習成效不彰，為引起學習動機及幫助學生藉由教具的操作活動來得到基本題型的因式分解答案，因而設計此教學活動，以期達到補救教學之效。

## 貳、教學說明

### 一、教學主題

以一次及二次多項式、各項係數均為正數的多項式為佈題主角。

### 二、教學對象

國中八年級學生

### 三、教學時間

2 節課（90 分鐘）或以上。

### 四、教學目標

- (一) 能從矩形的拼圖中了解因式分解的意義。
- (二) 能試著由簡單的拼圖紙張拼出基本的因式分解式。

- (三) 能推演特定形式的因式分解式。

## 五、能力指標

- (一) 8-a-10 能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義。
- (二) 8-a-11 能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式。

## 六、教學材料

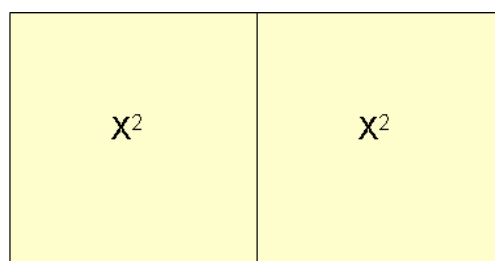
因式分解圖卡（如附件，請每一位同學先用剪刀剪開）、學習單

## 七、教學流程

### (一) 介紹因式分解圖卡

首先教師介紹因式分解圖卡的每一單元的面積及其邊長，例如二次項的單元邊長為  $X$ ，面積為  $X^2$ ；一次項的單元邊長分別為  $1$  和  $X$ ，面積為  $X$ ；常數項的單元為邊長為  $1$  的正方形。接下來進行以下流程：

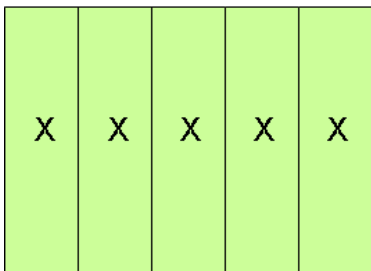
1. 教師拿出二個二次項的卡拼成一矩形，詢問學生此矩形的面積及邊長。



答：面積為  $2X^2$ ，邊長為  $2X$  以及  $X$ 。

因為面積等於邊長乘以邊長，所以  
 $2X^2 = 2X \times X$ 。

2. 教師拿出五個一次項的卡拼成一矩形，詢問學生此矩形的面積及邊長。



答：面積為  $5X$ ，邊長為  $5$  及  $X$ ，所以  
 $5X = 5 \times X$ 。

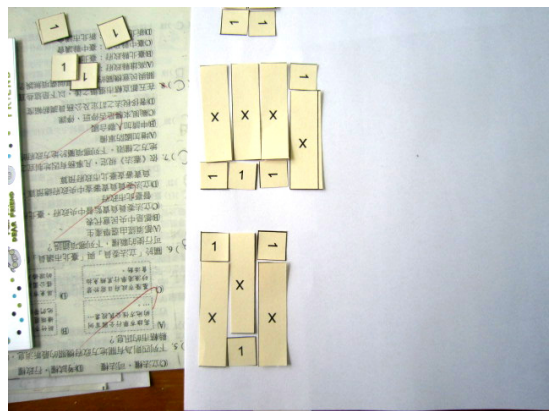
※ 以上兩個流程的目的是讓學生在學習更多項之多項式的題目之前，先學習從單項的多項式來作因式分解，接下來便可循序漸加深題目的深度。

### (二) 學習單的四個流程

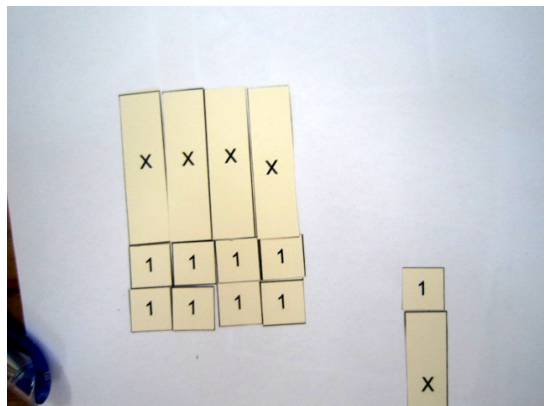
1. 請同學拿出二次項及常數項（單位為 1）的卡各數張拼成任一矩形並將拼法以及因式分解過程記錄下來。
2. 請同學拿出二次項及一次項的卡各數張拼成任一矩形並將拼法以及因式分解過程記錄下來。
3. 請同學拿出二次項、一次項及常數項（單位為 1）的卡各數張拼成任一正方形並將拼法以及因式分解過程記錄下來。
4. 請同學拿出二次項、一次項及常數項（單位為 1）的卡各數張拼成任一正方形並將拼法以及因式分解過程記錄下來。

以下是學生的學習成果抽樣呈現。

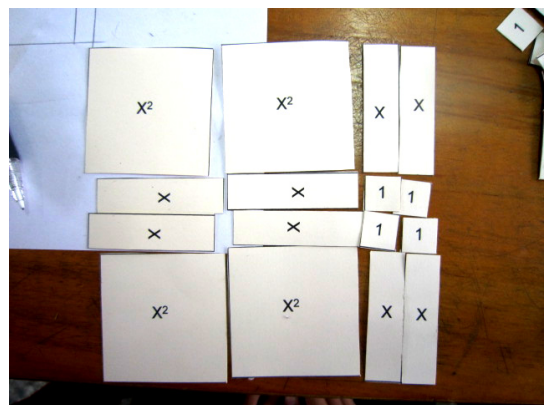
※ 學習單四個流程的拼法：



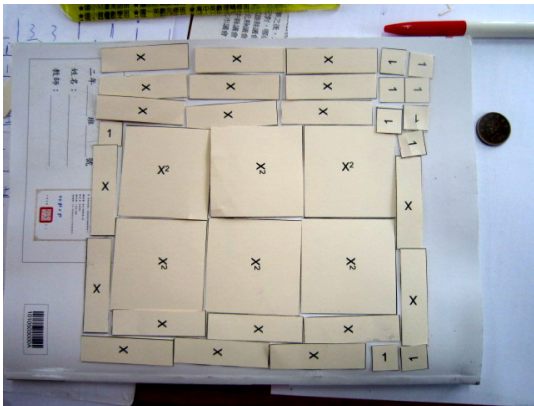
$4X+4$  及  $3X+3$  的拼法



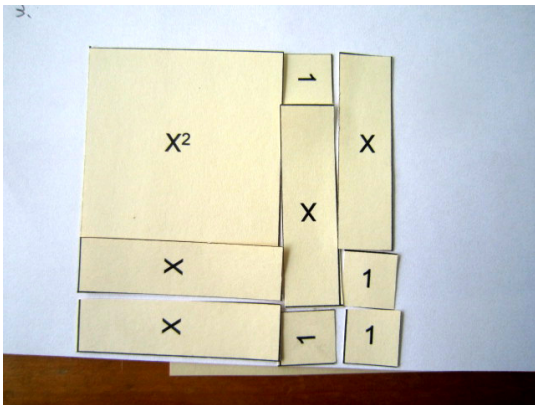
$4X+8$  的拼法



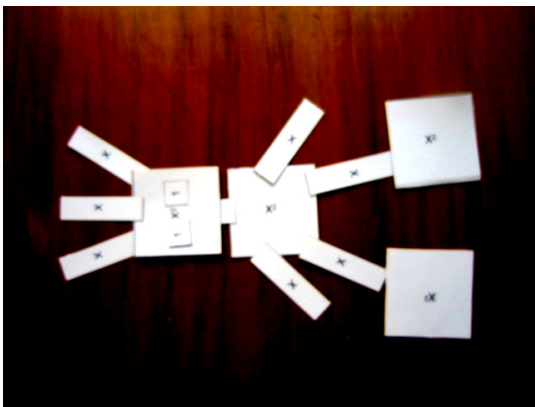
$4X^2+8X+4$  的拼法



$6x^2 + 19x + 10$  的拼法



$x^2 + 4x + 4$  的拼法



竟然有人拼成機器人！真有創意！

※ 學習單的分解過程記錄：

①

$x$	$x$
$1$	$1$

$(2x+2) \cdot (x+1) = 2(x+1)$

②

$x$	$x^2$	$x$
-----	-------	-----

$x^2 + 2x = x(x+2)$

③

$x^2$	$x$
$x$	$1$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

④

$x$	$1$
$x^2$	$x$
$x$	$x$

$2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x+1)$

一. 圓+圓 → 長方形

$4x^2 + 8 = 4(x+2)$

$x$	$x$	$x$	$x$
$1$	$1$	$1$	$1$
$1$	$1$	$1$	$1$

五. 圓式分解  $3x^2 + 11x + 6 = (3x+2)(x+3)$

$1$	$x$	$x$	$x$	$1$
$x$	$x^2$	$x^2$	$x^2$	$x$
$1$	$x$	$x$	$x$	$1$
$1$	$x$	$x$	$x$	$1$

二. 圓+圓 → 長方形

$2x^2 + 3x = x(x+2)$

$x^2$	$x$
$x$	$x$

$2x \cdot (x+1)$

三. 圓+圓+圓 → 正方形

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2)$

$x^2$	$x$	$x$
$x$	$1$	$1$
$x$	$1$	$1$

六.  $4x^2 + 15x + 9 = (x+3)(4x+3)$

四. 圓+圓+圓 → 長方形

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$x$	$x$	$x$
$x$	$1$	$1$
$x$	$1$	$1$

$(x+2)(x+1)$

1.  $x+1 \rightarrow$  矩形

1	1
$x$	$x$

$= 2x+2 = 2(x+1)$

2.  $x^2+1 \rightarrow$  矩形

$x^2$	$x$
$x$	$x^2$

$= 2(x^2)+2x = 2x^2+2x = 2(x^2+x)$

3. 全  $\rightarrow$  正方形

$x^2$	$x$	$x^2$
$x$	$x$	$x$
$x^2$	$x$	$x^2$

4. 全  $\rightarrow$  長

$x^2$	$x$
$x$	1
$x$	$x^2$

5. 因式分解

$3x^2+11x+6 = (3x+2)(x+3)$

$x$	$x^2$	$x$
$x$	$x^2$	$x$
$x$	$x^2$	$x$

6.  $4x^2+15x+9 = (4x+3)(x+3)$

		$x^2$	$x$
		$x$	1

(1)

$x$	$x$	$x$	$x$
1	1	1	1

$4x^2+4 = 4(x+1)$

(4)  $x^2+z$

$x$	$x^2$	$x$
1	$x$	1

$x^2+3x+z = (x+z)(x+1)$

(2)

$x$	$x^2$	$x$
-----	-------	-----

$x(x^2+z)$

(3)

$x^2$	$x$	$x$
$x$	1	1
$x$	1	1

$(x+z)(x+2) = x^2+3x+z$

(1)

$x^2$	$x$
$x$	1

$x^2+2x+1 = (x+1)^2$

(2)

$x^2$	$x$	$x^2$
$x$	1	$x$
$x^2$	$x$	$x^2$

$4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$

(4)

$x^2$	$x$	$x$
$x$	1	1
$x$	1	1
$x$	1	1

$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

5.  $3x^2+11x+6 = (3x+2)(x+3)$

6.  $4x^2+15x+9 = (4x+3)(x+3)$

1.

$x$	$x$	$x$
1	1	1

$3x+3 = 3x(1+x)$

2.

$x^2$
$x$
$x$

$x^2+2x = x(x+2)$

3.

$x^2$	$x$
$x$	1

$x^2+2x+1 = (x+1)^2$

4.

$x^2$	$x$
$x$	1
$x^2$	$x$

$2x^2+3x+1 = (x+1)(2x+1)$

1.  $\square + \square \rightarrow$  矩形

$6x+b = 6(x+b)$

2.  $\square^2 + \square \rightarrow$  長方形

$4x^2 + 2x = 2x(2x+1)$

3.  $\square^2 + \square^2 \rightarrow$  正方形

$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

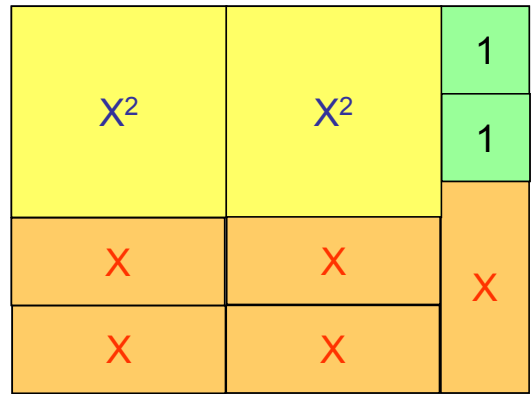
4. 長方形

$6x^2 + 5x + 1 = (2x+1)(3x+1)$

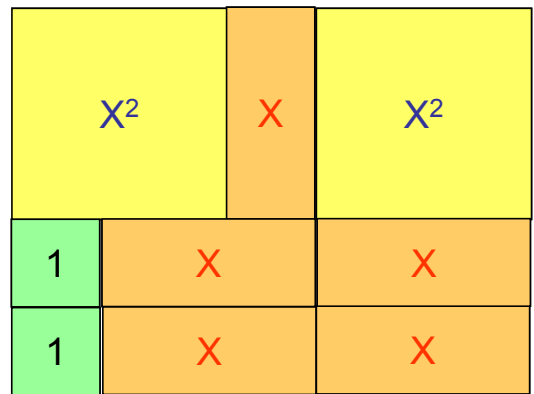
5. 因式分解

(1)  $3x^2 + 11x + 6 = (3x+2)(x+3)$

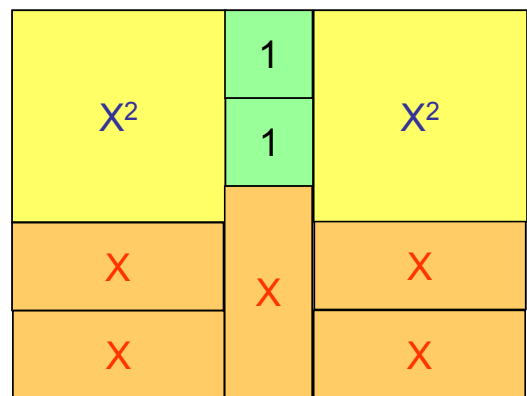
(2)  $4x^2 + 15x + 9 = (4x+3)(x+3)$



拼法二



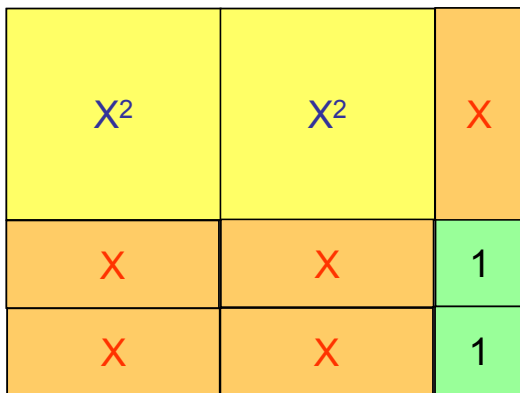
拼法三



拼法四

### 八、拼圖的討論

在拼圖過程中，我們發現同一個多項式可以有不同的拼法。以  $2X^2 + 5X + 2$  為例，至少有下列四種拼法：



拼法一

從學生的拼法當中，發現拼法一及二是較容易出現的圖形，拼法三及四幾乎很

少出現，這牽扯到拼法的難易程度，其實拼法一是筆者建議學生以此方式來拼的圖形，雖然這四種圖形皆可。

接下來教師將同學的拼圖提出一一討論與比較：

教師發問：同學可否寫出上述各項圖形中寫出這些矩形的長與寬呢？

學生回答：無論如何排列，都將產生一個  $(2X+1) \times (X+2)$  的矩形，且這四個矩形都是一樣的。

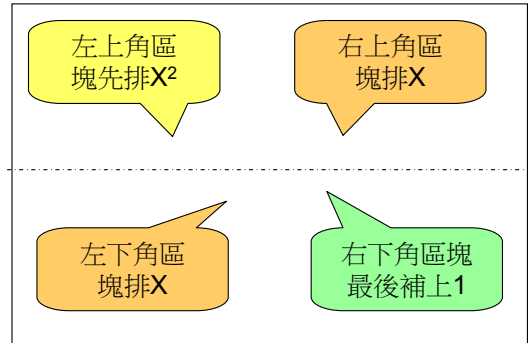
教師講解：嗯，很好，是否我們可以說  $2X^2 + 5X + 2 = (2X+1) \times (X+2)$  (矩形面積 = 長  $\times$  寬) 呢？

學生回答：對！

教師講解：因此我們可以說  $2X^2 + 5X + 2$  的因式分解是  $(2X+1) \times (X+2)$ 。反之  $(2X+1) \times (X+2)$  展開後可以得到  $2X^2 + 5X + 2$ 。

接下來再練習一題，如何拼出  $X^2 + 6X + 5$  的矩形呢？(如左下圖)

$X^2$	$X$
$X$	1
$X$	1
$X$	1
$X$	1
$X$	1



建議的拼圖方式

所以得到  $X^2 + 6X + 5 = (X+1) \times (X+5)$ ，反之  $(X+1) \times (X+5)$  展開後可以得到  $X^2 + 6X + 5$ 。

國中階段因式分解皆為一元二次式，所以會有二次項、一次項及常數項。所以只要按照上圖就可以很輕易排出矩形，從而得到因式分解式。而一個一元二次式可分解為兩個一次式的相乘。因此矩形的邊長皆為一次式。接下來請同學拿出學習單及因式分解圖卡來寫出各項题目的因式分解式吧！

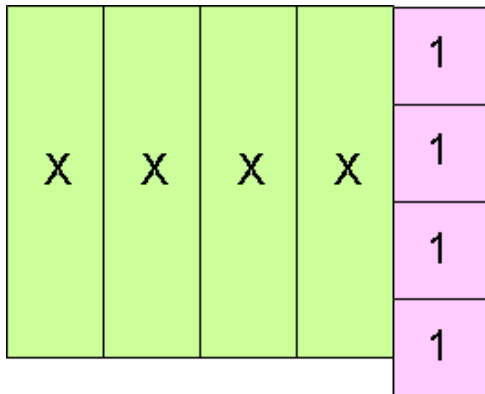
**例題一：**因式分解  $2X^2 + 4X + 2$ 。

請將拼出的圖形貼上來！

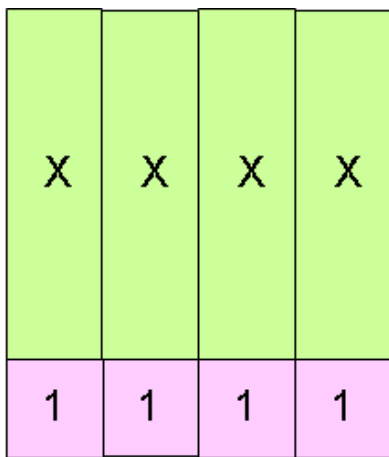
**例題二：**因式分解  $3X^2 + 10X + 3$ 。

請將拼出的圖形貼上來！

### 九、拼圖的錯誤迷思概念



錯誤的拼圖方式



正確的拼圖方式

以  $4X + 4$  為例，要將此一次式做因式分解的拼圖有不少學生會出現如上圖的錯誤拼法，會有次錯誤的概念是因為學生以為  $X$  是  $1$  的整數倍，事實上  $X$  為任意數，不見得是  $1$  的倍數。正確的拼法應如上圖形才對，所以在此建議教師在設計拼圖卡時， $X$  的長度不要設計成  $1$  的倍數，以免誤導學生。

### 十、無法用拼圖拼的多項式

教師發問：請問各位同學像這樣的  $X^2 - 3X + 2$  因式分解式是否可以用拼圖卡來拼呢？

學生回答：好像不行ㄟ...

教師再問：請問為何不行？

學生回答：因為一次項的係數為負號，所以無法用圖拼出！

教師講解：沒有錯，所以用拼圖卡只能拼出多項式中各項係數為正整數的多項式。

### 十一、牛刀小試篇

事實上，因式分解的題目不勝枚舉，但有些題目容易出現規律而輕易得到因式分解，例如：含有  $(X + 1)$  的因式的題目形式皆為  $(X + 1) \times (aX + b) = aX^2 + (a + b)X + b$ ，舉例解題如下：

$$X^2 + 6X + 5 = (X + 1) \times (X + 5)$$

$$X^2 + 30X + 29 = (X + 1) \times (X + 29)$$

$$2X^2 + 7X + 5 = (X + 1) \times (2X + 5)$$

$$3X^2 + 22X + 19 = (X + 1) \times (3X + 19)$$

※（學生練習）現在請同學寫出  $aX^2 + (a + b)X + b = (X + 1) \times (aX + b)$  的因式分解式 3 個：

答案：

1. \_\_\_\_\_。

2. \_\_\_\_\_。

3. \_\_\_\_\_。

若是屬於  $aX^2 + (axb+1)X + b$  皆有  $(X+b)$  的因式，因為  $aX^2 + (axb+1)X + b = (aX+1) \times (X+b)$ ，舉例如下：

$$2X^2 + 5X + 2 = (2X+1) \times (X+2)$$

$$2X^2 + 7X + 3 = (2X+1) \times (X+3)$$

$$12X^2 + 25X + 2 = (12X+1) \times (X+2)$$

$$X^2 + 33X + 32 = (X+1) \times (X+32)$$

※(學生練習)現在請同學寫出  $aX^2 + (axb+1)X + b = (aX+1) \times (X+b)$  的因式分解式 3 個：

答案：

1. \_\_\_\_\_。

2. \_\_\_\_\_。

3. \_\_\_\_\_。

接下來推導另一公式： $(aX+1) \times (bX+1) = abX^2 + (a+b)X + 1$ ，舉例如下：

$$6X^2 + 5X + 1 = (2X+1) \times (3X+1)$$

$$8X^2 + 6X + 1 = (2X+1) \times (4X+1)$$

$$35X^2 + 12X + 1 = (5X+1) \times (7X+1)$$

$$96X^2 + 20X + 1 = (12X+1) \times (8X+1)$$

※(學生練習)現在請同學寫出  $abX^2 + (a+b)X + 1 = (aX+1) \times (bX+1)$  的因式分解式 3 個：

答案：

1. \_\_\_\_\_。

2. \_\_\_\_\_。

3. \_\_\_\_\_。

除此之外，較具規律性的題目有完全平方式  $X^2 - 2aX + a^2 = (X-a)^2$ 、 $X^2 + 2aX + a^2 = (X+a)^2$  或是平方差公式  $X^2 - a^2 = (X+a) \times (X-a)$  等。這些都是經由簡易的判斷便可得到因式分解式。

### 參、總結

上述的拼圖法只能針對特定的多項式來作因式分解，例如  $2X^2 - 3X - 2$  就無法由拼圖法來學習，而必須藉由提公因式或是乘法公式，甚至是十字交乘法來作。數學的概念只有一種，但是教學方式可以有很多種，尤其教師在作補救教學時，要能有更多的方式和輔具來作教學。



## 附件：因式分解圖卡

$x^2$				$x^2$				$x^2$	
$x^2$				$x^2$				$x^2$	
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1