平面上n條直線最多分割區域數的公式 $C_0^n+C_1^n+C_2^n$之推演

阮圓真

高雄市立女子高級中學

壹、前言

在龍騰版 95 暫綱高中數學第四冊中的 2-6 遞迴關係之範例 2

> 設平面上n條直線（其中任兩條不平行，任三條不共點）可以將平面分割成a_n個區域。
>
> (1) 寫下數列 $\langle a_n \rangle$的遞迴關係式。
>
> (2) 求一般項a_n
>
> 答：(1) $a_n=a_{n-1}+n, n\geq 2$ (2) $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}, n\geq 1$

我學習文中的解法，觀察幾何關係，重新整理得到一個不錯的關係式如下：

> 設平面上的n條直線（其中任兩條不平行，任三條不共點）可以將平面分割成$a_2(n)$個區域。
>
> (1)寫下數列 $\langle a_2(n) \rangle$的遞迴關係式。
>
> (2)求一般項$a_2(n)$
>
> 答：(1) $a_2(n)=a_2(n-1)+n, n\geq 2$
>
> (2) $a_2(n)=C_0^n+C_1^n+C_2^n=\dfrac{n^2+n+2}{2}, n\geq 1$

實際計算上，公式$a_2(n)=C_0^n+C_1^n+C_2^n$較易記憶求解。僅將我的作法分享給大家。(適合高中的同學參考)

貳、本文

一、首先說明下題的解法：

設平面上的 n 條直線（其中任兩條不平行，任三條不共點）可以將平面分割成 $a_2(n)$ 個區域。

(1)寫下數列 $\langle a_2(n)\rangle$ 的遞迴關係式。

(2)求一般項 $a_2(n)$

答：(1) $a_2(n)=a_2(n-1)+n, n\geq 2$

(2) $a_2(n)=C_0^n+C_1^n+C_2^n=\dfrac{n^2+n+2}{2}, n\geq 1$

解法：

$a_2(1)=2$

$a_2(2)=a_2(1)+(C_2^2+1)$

$a_2(3)=a_2(2)+(C_2^3-C_2^2+1)$

：

：

：

（n 條直線會比前 $n-1$ 條直線多產生 $C_2^n-C_2^{n-1}$ 個交點，此 $C_2^n-C_2^{n-1}$ 個交點會將第 n 條直線分成 $C_2^n-C_2^{n-1}+1$ 段，又每一段分別將該區分成兩區，所以 $a_2(n)$ 比 $a_2(n-1)$ 多出 $C_2^n-C_2^{n-1}+1$ 區域）(圖說如附件圖 1-1～1-4)

$a_2(n)=a_2(n-1)+(C_2^n-C_2^{n-1}+1)=a_2(n-1)+n$

將上述 n 個等式累加得 $a_2(n)$ 為

$$\begin{aligned}
&a_2(n)\\
&=2+(n-1)+C_2^n\\
&=1+n+C_2^n\\
&=C_0^n+C_1^n+C_2^n\\
&=\frac{n^2+n+2}{2}
\end{aligned}$$

本題的目的為求出一般項 $a_2(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$，而 $a_2(n)$ 恰為平面上 n 條相異直線將平面分割成最多個區域數。實際計算上，$a_2(n)=C_0^n+C_1^n+C_2^n$ 較易記憶運用求解。

演練：平面上 6 條相異直線將平面分割成最多個區域數為何？

解：$a_2(6)=C_0^6+C_1^6+C_2^6$=22，

答：22 個

二、類題(三維空間)的解法：

設空間中的 n 個平面（其中任兩個不平行，任三個不共線）可以將空間分割成 $a_3(n)$ 個區域。

(1)寫下數列 $\langle a_3(n)\rangle$ 的遞迴關係式。

(2)求一般項 $a_3(n)$

答：(1) $a_3(n)=a_3(n-1)+\dfrac{n^2-n+2}{2}, n\geq 2$

(2) $a_3(n)=C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n=\dfrac{n^3+5n+6}{6}, n\geq 1$

解法：

$a_3(1)=2$

$a_3(2)=a_3(1)+a_2(1)$

$a_3(3)=a_3(2)+a_2(2)$

:

:

:

$a_3(n)=a_3(n-1)+a_2(n-1)$

（ n 個平面會比前 $n-1$ 個平面多產生 $C_2^n-C_2^{n-1}=n-1$ 條交線，此 $n-1$ 條交線會將第 n 個平面最多分成 $a_2(n-1)$ 個平面區域，又每一平面區域分別將該空間區分成兩區，所以 $a_3(n)$ 比 $a_3(n-1)$ 多出 $a_2(n-1)$ 個區域）(圖說如附件圖 2-1～2-4)

將上述 n 個等式累加得 $a_3(n)$ 為

$$
\begin{aligned}
& a_3(n) \\
&= 2+\sum_{k=1}^{n-1} a_2(k) \\
&= 2+(C_0^1+C_1^1)+(C_0^2+C_1^2+C_2^2)+\cdots+(C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+C_2^{n-1}) \\
&= 2+(n-1)+(C_1^1+C_1^2+C_1^3+\cdots+C_1^{n-1})+(C_2^2+C_2^3+\cdots+C_2^{n-1}) \\
&= C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n \\
&= \frac{n^3+5n+6}{6}
\end{aligned}
$$

在計算過程中

1.運用巴斯卡定理： $C_n^m=C_n^{m-1}+C_{n-1}^{m-1}$ ，

2.當 $n\geq r$ 時， $C_r^n=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots 1}$ ，當 $n<r$ ， $C_r^n=0$ (分子必為 0)。

演練：空間中的 6 個相異平面將空間分割成最多個區域數為何？

解： $a_3(6)= C_0^6+C_1^6+C_2^6+C_3^6=4$，答：42 個

三、類題(一維空間)的解法：

設數線上的 n 個相異點，可以將數線分割成 $a_1(n)$ 個線段或半射線。

(1)寫下數列 $\langle a_1(n)\rangle$ 的遞迴關係式。

(2)求一般項 $a_1(n)$

答：(1) $a_1(n)=a_1(n-1)+1, n\geq 2$ (2) $a_1(n)=C_0^n+C_1^n=n+1, n\geq 1$

解法：

$a_1(1)=2$

$a_1(2)=a_1(1)+1$

$a_1(3)=a_1(2)+1$

⋮

$a_1(n)=a_1(n-1)+1$

（ n 個點會比前 $n-1$ 個點多產生 1 個點，此點會將該區域分成兩區，所以 $a_1(n)$ 比 $a_1(n-1)$ 多出 1 個區域）

將上述 n 個等式累加得 $a_1(n)$ 為 $a_1(n)=n+1$

由前文的類題，我猜想 m 維空間中也有相似的結構與結果。

參、後記

感謝數學老師謝瓊瑤老師的指導與校稿。

附件一

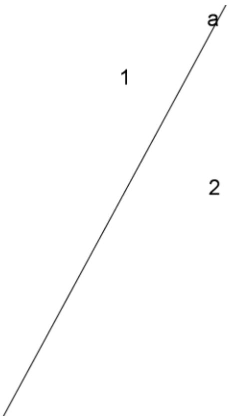

圖 1-1、直線 a 將平面分成 $a_2(1)=2$ 區域。

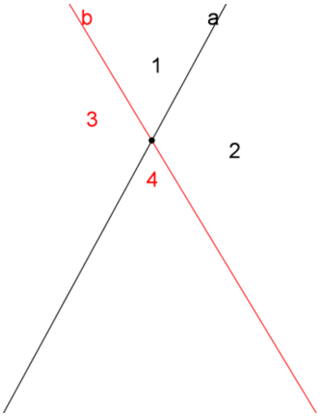

圖 1-2、直線 b 與直線 a 交於一點，此交點將直線 b 分成 C_2^2+1 段，又每一段分別將該區分成兩區，所以 $a_2(2)$ 比 $a_2(1)$ 多出 C_2^2+1 區域。

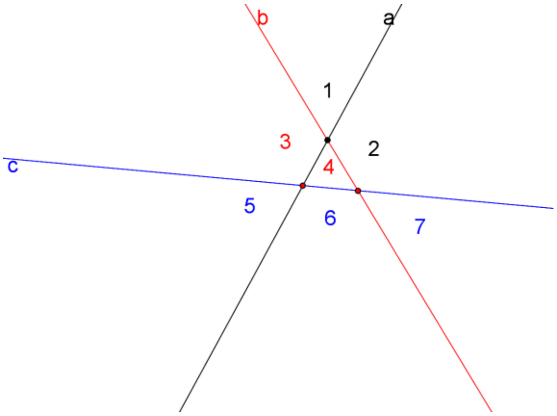

圖 1-3、直線 c 與前兩直線多產生 $C_2^3 - C_2^2$ 個交點，此 $C_2^3 - C_2^2$ 個交點會將直線 c 分成 $C_2^3 - C_2^2 + 1$ 段，又每一段分別將該區分成兩區，所以 $a_2(3)$ 比 $a_2(2)$ 多出 $C_2^3 - C_2^2 + 1$ 區域。

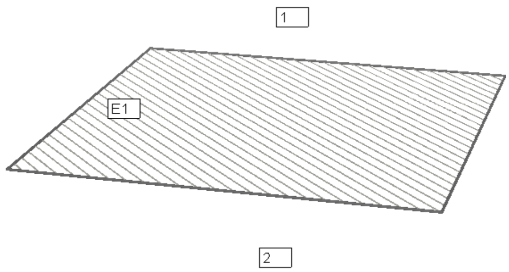

圖 2-1、平面 E_1 將空間分成 $a_3(1) = 2$ 區域。

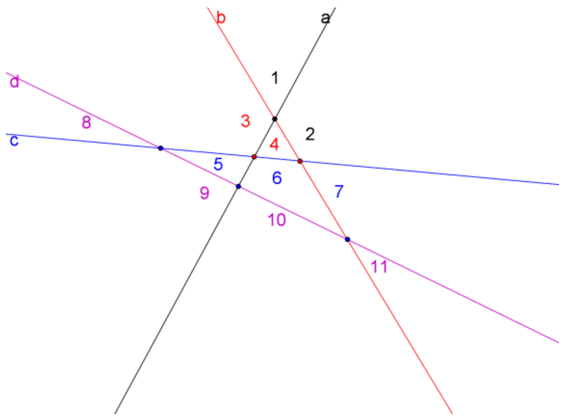

圖 1-4、直線 d 與前 3 直線多產生 $C_2^4 - C_2^3$ 個交點，此 $C_2^4 - C_2^3$ 個交點會將直線 c 分成 $C_2^4 - C_2^3 + 1$ 段，又每一段分別將該區分成兩區，所以 $a_2(4)$ 比 $a_2(3)$ 多出 $C_2^4 - C_2^3 + 1$ 區域。

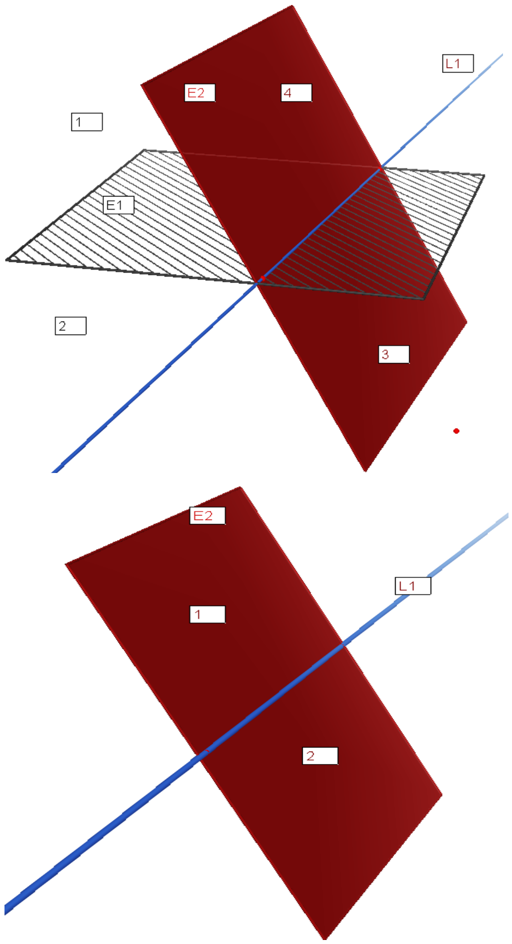

圖 2-2、平面 E_2 與平面 E_1 交於一直線 L_1，此交線 L_1 將平面 E_2 分成 $a_2(1)$區，又每一區分別將該空間區域分成兩區，所以 $a_3(2)$ 比 $a_3(1)$ 多出 $a_2(1)$ 區域。

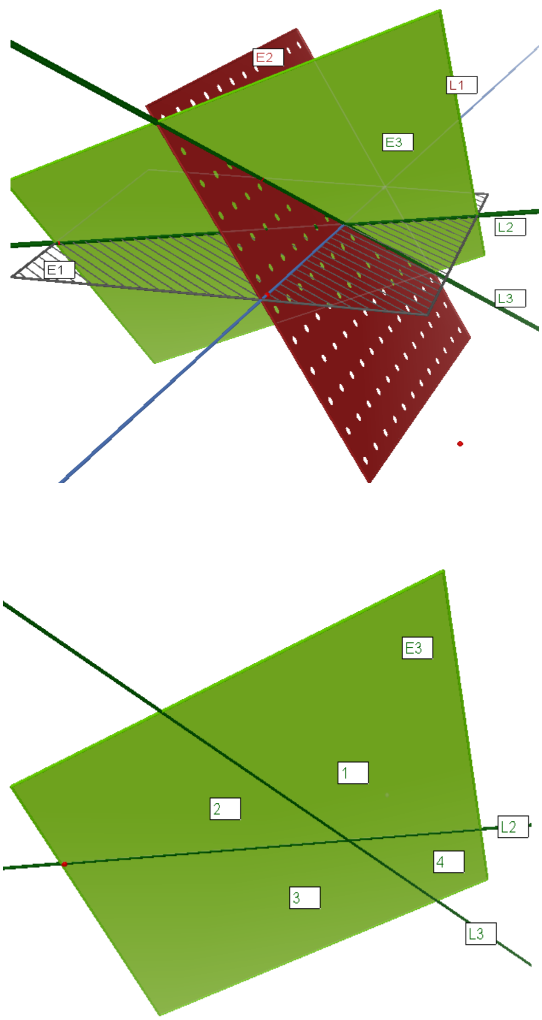

圖 2-3、平面 E_3 與前兩平面多產生 $C_2^3-C_2^2=2$ 條交線，此 $C_2^3-C_2^2=2$ 條交線 L_2,L_3 會將平面 E_3 分成 a_2(2區，又每一區分別將該空間區域分成兩區，所以 $a_3(3)$ 比 $a_3(2)$ 多出 $a_2(2)$區域。

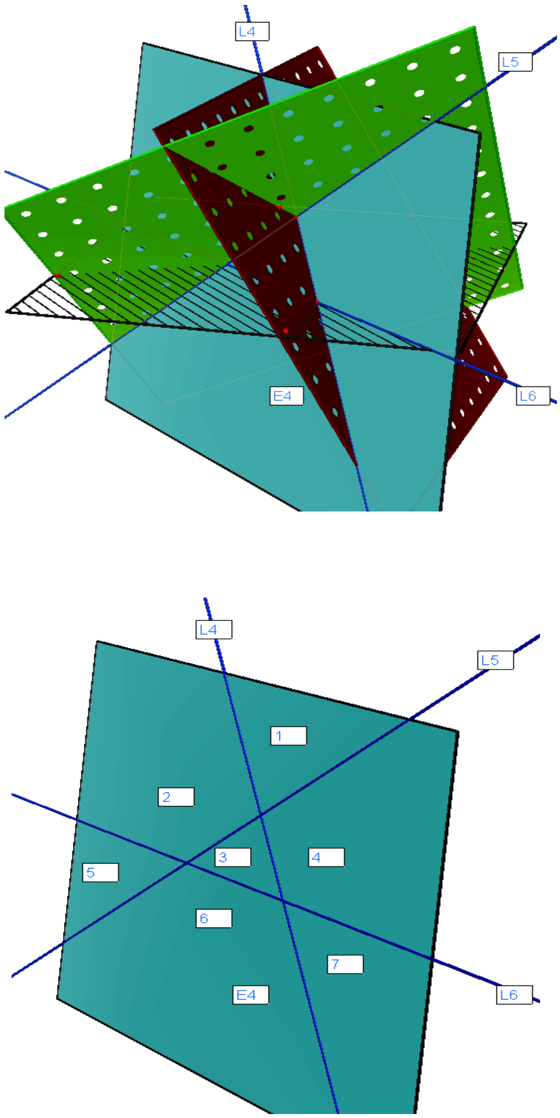

圖 2-4、平面 E_4 與前 3 個平面多產生 $C_2^4-C_2^3=3$ 條交線，此 $C_2^4-C_2^3=3$ 條交線會將平面 E_4 分成 $a_2(3)$區，又每一區分別將該空間區域分成兩區，所以 $a_3(4)$ 比 $a_3(3)$ 多出 $a_2(3)$區域。